Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2007-08)

Ενδιάμεση Εξέταση – 10 Μαΐου 2008

1. (α) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(ii) Αν $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(iii) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_k \to 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{s_k}) της (a_k) με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_{s_k} < +\infty$.

(β) Έστω $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ημ}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. Να βρεθούν τα $\liminf a_n$ και $\limsup a_n$.

(2+1μ)

2. (α) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ημ}^2 k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}.$$

(β) Προσδιορίστε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k}.$$

(2+1μ)

3. (α) Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση: δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Είναι Lipschitz συνεχής;

(1+2μ)

4. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $f(x) = 1$ για κάθε $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες: $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$ και $f(\frac{1}{2}) = 1$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx > 0.$$

(γ) Έστω $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx$$

συγκλίνει.

(1+1+1μ)

Καλή επιτυχία!