ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ (2007-08)

Τελική Εξέταση – 19 Ιουνίου 2008

1. Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(β) Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. **(1,5μ)**

2. Για καθεμία από τις παρακάτω σειρές, εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{συν}(k^3)}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{\ln k}{k}\right).$$

(1.5μ)

3. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) η οποία δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό αλλά ικανοποιεί την $a_{n+1} - a_n \to 0$.

Υπάρχει φραγμένη ακολουθία (a_n) με αυτές τις ιδιότητες;

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει. **(2μ)**

4. (α) Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ με $f(1) = f(2) = 4$ και $f(x) = 0$ για κάθε άλλο $x \in [0,3]$. Αποδείξτε με το κριτήριο του Riemann ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και βρείτε το ολοκλήρωμά της. **(1.5μ)**

5. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση.

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x)\,dx = 3$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $t_1, t_2 \in (a,b)$ ώστε

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx = 1.$$

(1,5μ)

6. Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx - \int_k^{k+1} (k+1-x)f'(x)\,dx.$$

(1μ)

7. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x}, \qquad \int \text{συν}^2 x\, \text{ημ}^3 x\,dx, \qquad \int \text{ημ}(\ln x)\,dx.$$

(2μ)

8. (α) Έστω $n \geq 1$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και έστω $x_0 \in (a,b)$. Ορίζουμε $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$. Αποδείξτε ότι

$$T_{n+1,F,x_0}(x) = \int_{x_0}^x T_{n,f,x_0}(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$

(γενικά, με $T_{k,g,y}$ συμβολίζουμε το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της g με κέντρο το y).

(β) Έστω $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{3,f,0}$.

(γ) Έστω $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, με $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ και $f^{(4)}(0) > 0$. Αποδείξτε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο 0.
(2μ)