Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εαρινό Εξάμηνο 2019 - 20

5η Σειρά Ασκήσεων

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού
Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t)dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε την g.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$G(x) = \int_0^x g(t)dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}$.

Αφού η g είναι συνεχής, από το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα έχουμε ότι η G είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

(1) $G'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού $g(x) = 1 + G(x)$, έχουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = G'(x)$. Από την (1) παίρνουμε $g'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όπως ξέρουμε, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = c e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Είναι $(e^{-x} g(x))' = 0$, άρα $e^{-x} \cdot g(x) = $ σταθερά.)

Για $x = 0$, είναι $g(0) = c$, ενώ από την αρχική σχέση είναι $g(0) = 1$.

Άρα $c = 1$ και τελικά $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $[a,b]$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x f^2(t)dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

Βασική Παρατήρηση

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι, αν η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_a^x g(t)dt = 0, \quad \text{για κάθε } x \in [a,b],$$

τότε $g \equiv 0$, δηλαδή $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [a,b]$.

Πράγματι: Θεωρούμε την $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, $x \in [a,b]$. Τότε, αφού η g είναι συνεχής, από το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα είναι $G'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in [a,b]$. Όμως, από την υπόθεση, $G \equiv 0$, άρα $G' \equiv 0$, δηλαδή $g \equiv 0$.

Αν τώρα για μια συνεχή συνάρτηση f στο $[a,b]$ ισχύει

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x f^2(t)dt,$$

τότε θεωρώντας την $g = f - f^2$, από τα προηγούμενα έχουμε ότι $g(x) = 0$, δηλαδή $f(x)(1-f(x)) = 0$, για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα, για κάθε $x \in [a,b]$ είτε $f(x) = 0$ είτε $f(x) = 1$. Όμως, αφού η f είναι συνεχής, δεν μπορεί να παίρνει ακριβώς δύο διαφορετικές τιμές στο $[a,b]$ (σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης τιμής, θα έπρεπε να παίρνει και κάθε ενδιάμεση τιμή).

Άρα είτε $f \equiv 0$ (δηλαδή $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$)
είτε $f \equiv 1$ (δηλαδή $f(x) = 1$ $\forall x \in [a,b]$).

3. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών. Τα περισσότερα προκύπτουν χρησιμοποιώντας αθροίσματα Riemann κατάλληλων συναρτήσεων. Υπάρχει όμως ανάμεσά τους ένα μαύρο πρόβατο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί με άλλη μέθοδο.

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^{2n}}}{n}$ (ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$ (iv) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(2n)^2}\right)$

(v) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

Υπενθυμίζουμε κατ' αρχάς ότι:

- Αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k=b\}$ είναι μία διαμέριση του $[a,b]$, τότε συμβολίζουμε με $\|P\|$ το πλάτος της διαμέρισης P, δηλαδή $\|P\| = \max\{x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ \dots,\ x_k-x_{k-1}\}$.

  Μια επιλογή σημείων για την P, είναι μία k-άδα $\Xi=(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{k-1})$ με $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, για κάθε $i=0,1,\dots,k-1$.

- Σύμφωνα με τον ορισμό του Riemann για το ολοκλήρωμα, αν η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε:

  Για οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a,b]$ με $\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0$ και οποιαδήποτε αντίστοιχη ακολουθία επιλογών σημείων (Ξ_n) για τις P_n, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty}\sum(f,P_n,\Xi_n) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

δηλαδή, αν $P_n=\{a=x_0^n<x_1^n<\dots<x_{k_n}^n=b\}$ και $\Xi_n=(\xi_i^n)_{i=1}^{k_n-1}$ με $\xi_i^n\in(x_i^n,x_{i+1}^n)$, $i=1,\dots,k_n-1$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{k_n-1} f(\xi_i^n)(x_{i+1}^n-x_i^n)\right] = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ένα άθροισμα της μορφής

$$\Sigma(f, P, \Xi) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

λέγεται άθροισμα Riemann της f για την P.

Στα ερωτήματα (i), (ii), (iv), (v) θα δείξουμε ότι οι ακολουθίες που δίνονται είναι ακολουθίες της μορφής $\left(\Sigma(f, P_n, \Xi_n)\right)$ για κατάλληλο κάθε φορά διάστημα $[a,b]$, κατάλληλη συνάρτηση f και κατάλληλες ακολουθίες (P_n), (Ξ_n) με $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$, οπότε θα έχουν όριο το $\int_a^b f(x)\,dx$.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τη διαμέριση

$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{2n}{n}\right\}$ και την επιλογή σημείων

$\Xi_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2n}{n}\right)$. Τότε

$$a_n = \frac{e^{1/n} + \dots + e^{2n/n}}{n} = \sum_{i=0}^{2n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right)\cdot\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \Sigma(f, P_n, \Xi_n)$$

και, αφού $\|P_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, P_n, \Xi_n) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 e^x\,dx = e^2 - 1$$

(iii) Είναι

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \dots + \frac{n}{n+n}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i+1}{n}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{1+x}$, και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τη διαμέριση

$$P_n = \left\{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1\right\} \quad \text{με } \|P_n\| = \frac{1}{n}$$

και την επιλογή σημείων

$$\Xi_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right). \quad \text{Τότε}$$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right)\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \Sigma(f, P_n, \Xi_n)$$

και, αφού $\|P_n\| \to 0$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, P_n, \Xi_n) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2.$$

(iv) Είναι $a_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n^2}{(n+n)^2}\right)$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(1+\frac{i+1}{n})^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ και τις ακολουθίες (P_n) και (Ξ_n) με $P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \dots < \frac{n}{n}\right\}$ και $\Xi_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$, οπότε

$$a_n = \Sigma(f, P_n, \Xi_n) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(v) Είναι

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1^2} + \frac{n^2}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και τις ακολουθίες (P_n) και (Ξ_n)

με $P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n}\}$ και

$\Xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n})$. Τότε $a_n = \Sigma(f, P_n, \Xi_n)$.

Άρα, αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, P_n, \Xi_n) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan 1 - \arctan 0$$

δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

(iii) Αυτό το όριο υπολογίζεται διαφορετικά.

Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η ακολουθία (S_n) των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει. Έστω $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_{n-1}) = S - S = 0$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0.$$

Άλλος τρόπος: Έστω $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$.

Το a_n είναι άθροισμα $n+1$ θετικών όρων, καθένας από τους οποίους είναι μικρότερος ή ίσος του $\frac{1}{n^2}$.

Άρα ισχύει: $0 < a_n \le \frac{n+1}{n^2}$ και, αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$, έχουμε και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. (α) Δίνεται διάστημα $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ και συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \neq x_0$ και $f(x_0) = c \neq 0$. Χρησιμοποιώντας τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού, δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα στο $[a,b]$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, το αόριστο ολοκλήρωμα της οποίας ισούται με τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$.

(α) Υποθέτουμε ότι η f έχει παράγουσα, δηλαδή ότι υπάρχει $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Από το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \text{ για κάθε } x \in [a,b].$$

Όμως $\int_a^x f(t)\,dt = 0$, για κάθε $x \in [a,b]$, άρα $F(x) = F(a)$, σταθερά. Έπεται ότι $F'(x) = 0$, για κάθε $x \in [a,b]$ και αφού $F' = f$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άτοπο, αφού $f(x_0) \neq 0$.
Συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει παράγουσα.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x} = \int_0^x f(t)\,dt$, για κάθε $x \in [0,1]$.
Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι και φραγμένη, οπότε υπάρχει $M > 0$ με $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [0,1]$. Έπεται ότι, για κάθε $x \in [0,1]$:

$$\left| \int_0^x f(t)\,dt \right| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq M \cdot x.$$

Άρα, για κάθε $x \in (0,1]$, θα ισχύει

$$\sqrt{x} \leq M \cdot x \quad , \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq M \quad \forall x \in (0,1],$$

άτοπο, αφού $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει τέτοια f.

<u>Παρατήρηση</u>: Αυτό που κρύβεται πίσω από την απόδειξη είναι ότι το αόριστο ολοκλήρωμα είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση (δείτε το Θεώρημα 5.2.2), ενώ η $g(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz συνεχής.

5. Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Δείξτε ότι η $G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t)\, dt$$

είναι αύξουσα.

Αφού η g είναι συνεχής,
από το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα, έπεται ότι η
συνάρτηση H με $H(x) = \int_0^x g(t)dt$, $x \in [0, +\infty)$,
είναι παραγωγίσιμη με $H'(x) = g(x)$.

Έπεται ότι και η G είναι παραγωγίσιμη
στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων
συναρτήσεων.
Θα δείξουμε ότι $G'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Έστω $x \in (0, +\infty)$. Είναι:

$$G'(x) = \frac{1}{x} g(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x g(t)dt .$$

Αφού η g είναι αύξουσα, είναι $g(t) \leq g(x)$
για κάθε $t \in [0, x]$, άρα $\int_0^x g(t)dt \leq x \cdot g(x)$.

Έπεται ότι

$$G'(x) = \frac{1}{x} \left(g(x) - \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \right) \geq 0 .$$

Αφού το $x > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι
$G'(x) \geq 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$. Άρα η G
είναι αύξουσα.

6. Ορίζουμε $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$$G(x) = \int_0^x e^t \cos(x-t)\, dt.$$
Βρείτε τον τύπο της G.

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^x e^t \cos(x-t)dt$

Θέτουμε $u = x-t \Rightarrow du = -dt$

και: για $t=0$ είναι $u=x$, για $t=x$ είναι $u=0$.

Άρα

$$G(x) = \int_0^x e^t \cos(x-t)dt = -\int_x^0 e^{x-u}\cos u\, du = e^x \int_0^x e^{-u}\cos u\, du.$$

Για το $I = \int_0^x e^{-u}\cos u\, du$, με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε:

$$I = \int_0^x (-e^{-u})' \cdot \cos u\, du = \left[-e^{-u}\cos u\right]_0^x - \int_0^x e^{-u}\cdot \sin u\, du$$

$$\Rightarrow I = 1 - e^{-x}\cos x - \int_0^x (-e^{-u})' \cdot \sin u\, du$$

$$\Rightarrow I = 1 - e^{-x}\cos x + \left[e^{-u}\cdot \sin u\right]_0^x - \int_0^x e^{-u}\cdot \cos u\, du$$

$$\Rightarrow I = 1 - e^{-x}\cos x + e^{-x}\cdot \sin x - I$$

$$\Rightarrow 2I = 1 + e^{-x}(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]$$

και τελικά

$$G(x) = \frac{1}{2}\left[e^x + \sin x - \cos x\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άλλος τρόπος (πιο άμεσος): Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά μέρη χωρίς να κάνουμε πρώτα αντικατάσταση.

7. Ορίζουμε $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή με δύο τρόπους:

(α) Υπολογίζοντας την παράγωγό της.

(β) Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα.

(α) Είναι, για κάθε $x>0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = 0$$

Αρα η f είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

(β) Είναι $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x$

και $\displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan \frac{1}{x}$.

Αφού $x>0$, είναι $\arctan x = \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

και $\arctan(\frac{1}{x}) = \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Αρα $\tan\theta = x$ και $\tan\varphi = \frac{1}{x}$, δηλαδή

$\tan\theta = x = \cot\varphi$ με $\varphi, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Επεται ότι $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, δηλαδή

$\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $f(x) = \frac{\pi}{2}$, για

κάθε $x \in (0, +\infty)$.

8. (α) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0.$$

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx\right) = f(1).$$

(α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι και φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M>0$ με $|f(x)|\le M$, για κάθε $x\in[0,1]$.

Είναι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \le \int_0^1 x^n|f(x)|dx \le M\int_0^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \le \frac{M}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}.$$

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

(β) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$n\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx = \int_0^1 (x^n)'f(x)dx = \left[x^n f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x^n f'(x)dx$$

$$\Rightarrow n\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx = f(1) - \int_0^1 x^n f'(x)dx$$

(από την υπόθεση η f' είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη).

Από το (α) έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f'(x)dx = 0$,

άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx\right] = f(1)$.

9. (α) Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x)\,dx$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(β) Βρείτε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, με την ιδιότητα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x)\,dx$ να είναι πεπερασμένο, αλλά η f να μην έχει όριο στο $+\infty$. (Δεν χρειάζεται να δώσετε τύπο για την f, μπορείτε απλώς να την περιγράψετε.)

(α) Έστω ότι $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = L$ $(L \in \mathbb{R})$.

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^y f(t)\,dt = L.$$

Έπεται ότι ισχύει το εξής: Για κάθε $r>0$ και για κάθε ακολουθία (y_n) με $y_n \to +\infty$ είναι

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty} \int_{y_n}^{y_n+r} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_0^{y_n+r} f(t)\,dt - \int_0^{y_n} f(t)\,dt \right] = L - L = 0.$$

Έστω τώρα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και θα βρούμε μία ακολουθία (x_n) με $x_n \to +\infty$, ένα $\delta > 0$ και ένα $a > 0$ ώστε να ισχύει

$$(2)\quad \left| \int_{x_n}^{x_n+\delta} f(t)\,dt \right| \geq a, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αυτό θα είναι άτοπο, αφού αντιβαίνει στην (1).

Έστω λοιπόν ότι $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = L$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά δεν ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Το τελευταίο σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθία (x_n) με $x_n \to +\infty$ για την οποία ισχύει $|f(x_n)| > \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Περνώντας σε υπακολουθία της (x_n), μπορούμε να υποθέσουμε ότι

είτε $f(x_n) > \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

είτε $f(x_n) < -\varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο, δηλαδή ότι $f(x_n) > \varepsilon$, για κάθε n.

Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: Για κάθε $x, y \in [0, +\infty)$ με $|x-y| \leq \delta$, ισχύει $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ειδικότερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:

Για κάθε $y \in [x_n - \delta, x_n + \delta]$ είναι

$$f(y) \geq f(x_n) - |f(x_n) - f(y)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(t)\,dt \geq \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2},$$

δηλαδή ισχύει η (2) με $\alpha = \frac{\delta \cdot \varepsilon}{2}$.

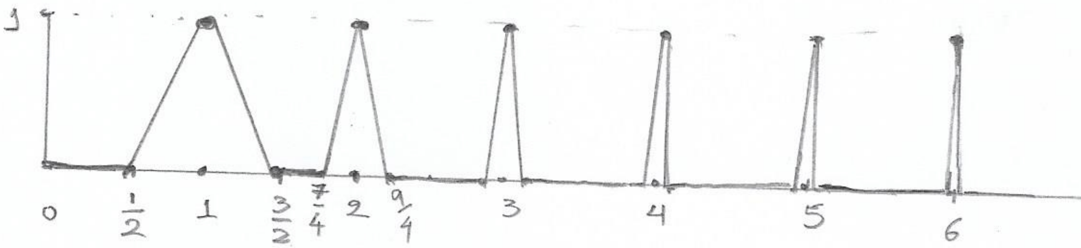
Άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(β) Κατασκευάζουμε μία συνάρτηση $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ως εξής:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε: $f(n) = 1$, $f\left(n - \frac{1}{2^n}\right) = 0$, $f\left(n + \frac{1}{2^n}\right) = 0$ και επεκτείνουμε γραμμικά την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[n - \frac{1}{2^n}, n\right]$ και $\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right]$.

Τέλος, θέτουμε $f(x) = 0$ για κάθε x με $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]$.



Από την κατασκευή της, η f είναι συνεχής.
Παρατηρήστε επίσης ότι, για κάθε n, το τρίγωνο με βάση το διάστημα $\left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]$ και ύψος 1 έχει εμβαδόν $E_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$, άρα

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n+\frac{1}{2^n}} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Όμως το όριο της f στο $+\infty$ δεν υπάρχει.

10. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin(2kx)}{\sin x}$ επεκτείνεται σε σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,\pi]$. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι, για κάθε ακέραιο k, ισχύει

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2kx)}{\sin x} dx = 0.$$

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2kx)}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\left[2k\,\frac{\sin(2kx)}{2kx}\cdot\frac{x}{\sin x}\right] =$$

$$= 2k\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2kx}{2kx}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = 2k\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = 2k$$

Επίσης:

$$\frac{\sin(2kx)}{\sin x} = \frac{-\sin(2k\pi - 2kx)}{\sin(\pi - x)} = -\frac{\sin(2k(\pi-x))}{\sin(\pi-x)}, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin(2kx)}{\sin x} = -\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin(2k(\pi-x))}{\sin(\pi-x)} = -\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(2ky)}{\sin y} = -2k$$

Αυτό σημαίνει ότι η f επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,\pi]$, θέτοντας $f(0)=2k$ και $f(\pi)=-2k$. Επομένως έχει νόημα το ολοκλήρωμα $I = \int_0^\pi \frac{\sin(2kx)}{\sin x}dx$.

Για τον υπολογισμό του I, εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $u = \pi - x \Rightarrow x = \pi - u$, $dx = -du$ και $[x=0 \to u=\pi,\ x=\pi \to u=0]$, έχουμε:

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(2kx)}{\sin x}dx = -\int_\pi^0 \frac{\sin(2k\pi - 2ku)}{\sin(\pi-u)}du$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi \frac{-\sin(2ku)}{\sin u}du = -\int_0^\pi \frac{\sin(2ku)}{\sin u}du.$$

Άρα $I = -I$, δηλαδή $2I = 0$, άρα $I = 0$.

11. Αποδείξτε ότι, για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού n, ισχύει

$$\int e^{-x}p(x)dx = -e^{-x}\cdot[p(x)+p'(x)+\cdots+p^{(n)}(x)]+c$$

Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο βαθμό n του πολυωνύμου.
Για $n=0$, έχουμε $p(x)=a$ ($a\neq 0$, σταθερά).
Είναι

$$\int e^{-x}p(x)\,dx = \int e^{-x}\cdot a\,dx = -ae^{-x}+c = -e^{-x}p(x)+c.$$

Άρα ισχύει για $n=0$

Έστω $n\geq 1$. Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$ (Επαγωγική υπόθεση).
Θα δείξουμε ότι ισχύει για τα πολυώνυμα βαθμού n.
Έστω $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού n.
Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int e^{-x}p(x)\,dx = \int (-e^{-x})'p(x)\,dx = -e^{-x}p(x)+\int e^{-x}p'(x)\,dx.$$

Αφού το πολυώνυμο $p'(x)$ έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του $n-1$, ισχύει σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση

$$\int e^{-x}p'(x)\,dx = -e^{-x}[p'(x)+p''(x)+\cdots+p^{(n)}(x)]+c$$

Άρα

$$\int e^{-x}p(x)\,dx = -e^{-x}[p(x)+p'(x)+p''(x)+\cdots+p^{(n)}(x)]+c,$$

δηλαδή το αποτέλεσμα ισχύει για τα πολυώνυμα βαθμού n. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε πολυώνυμο βαθμού n, δηλαδή ισχύει για κάθε πολυώνυμο $p(x)$.

12. Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, για κάθε τιμή του $n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \geq 0$, θέτουμε $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

Είναι $I_0 = \int_0^1 dx = 1$.

Θα βρούμε έναν αναδρομικό τύπο για την ακολουθία (I_n).

Για $n \geq 1$ είναι:

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 (x)'(1-x^2)^n dx$$

και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$I_n = \left[x \cdot (1-x^2)^n \right]_0^1 - n \int_0^1 x \cdot (1-x^2)^{n-1} \cdot (-2x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad I_n = 2n \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n-1} dx$$ και,

γράφοντας $x^2 = -(1-x^2) + 1$,

$$I_n = -2n \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1} dx + 2n \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow \quad I_n = -2n\, I_n + 2n\, I_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad (2n+1) I_n = 2n\, I_{n-1}$$ και τελικά

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Άρα, για $n \geq 1$ είναι:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} I_0,$$ δηλαδή, αφού $I_0 = 1$,

$$I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

13. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν ακέραιοι a_n και b_n ώστε να ισχύει

$$\int_0^1 x^n e^x dx = a_n \cdot e + b_n$$

(β) Θυμηθείτε ότι στο 2ο Κεφάλαιο αποδείξαμε ότι ο αριθμός e είναι άρρητος. Χρησιμοποιώντας το (α) και την Άσκηση 8(α), δώστε μια διαφορετική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος.

(α) Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο n.
Για $n=0$, είναι

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1,$$

άρα το αποτέλεσμα ισχύει με $a_0 = 1$ και $b_0 = -1$.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για το $n-1$, δηλαδή ότι υπάρχουν $a_{n-1}, b_{n-1} \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$\int_0^1 x^{n-1} e^x dx = a_{n-1} \cdot e + b_{n-1}.$$

Δείχνουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για το n.
Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 (e^x)' x^n dx = [e^x x^n]_0^1 - n\int_0^1 e^x x^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^n e^x dx = e - n \cdot (a_{n-1} e + b_{n-1}),$$ από την Επαγωγική Υπόθεση.

Συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για το n, με $a_n = 1 - n \cdot a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ και $b_n = -n \cdot b_{n-1} \in \mathbb{Z}$.
Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.
Συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα 8(α), έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 x^n e^x dx \right) = 0,$$ δηλαδή $$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n e + b_n) = 0.} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι, αφού $\forall n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση f_n με $f_n(x) = x^n e^x$ είναι συνεχής με $f_n(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1]$, ισχύει $\int_0^1 x^n e^x dx > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε τώρα – με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο – ότι ο e είναι ρητός, δηλαδή ότι υπάρχουν p, q θετικοί ακέραιοι ώστε $e = \frac{p}{q}$.

Από την (1) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{p}{q} + b_n \right) = 0$$ και, πολλαπλασιάζοντας με q,

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot p + b_n \cdot q \right) = 0 .$$

Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\gamma_n = a_n \cdot p + b_n \cdot q$ είναι ακέραιος και ο μόνος τρόπος μία ακολουθία ακεραίων να συγκλίνει στο 0 είναι να είναι τελικά ίση με 0. Συμπεραίνουμε ότι: υπάρχει n_0 ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n \cdot p + b_n \cdot q = 0$, άρα $a_n \frac{p}{q} + b_n = 0$, δηλαδή $a_n \cdot e + b_n = 0$, άρα $\int_0^1 x^n e^x dx = 0 \ \forall n \geq n_0$.

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού, όπως είδαμε, ισχύει $\int_0^1 x^n e^x dx > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμπεραίνουμε ότι ο e είναι άρρητος.