

**Απειροστικός Λογισμός II**  
**Χειμερινό Εξάμηνο 2021 - 22**  
**2η Σειρά Ασκήσεων - Σειρές**

1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (\log k)^2} \quad (\beta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^p}, \quad p > 0 \\
 & (\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \quad (\delta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^k} \quad (\epsilon)^* \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}} \\
 & (\sigma\tau) \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad (\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad (\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k^a}, \quad a \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς αιτιολογώντας την απάντησή σας:

- (α) Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ .  
 (β) Αν  $b_k \geq 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}$ .

3. Δίνονται ακολουθίες  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  με  $a_k \geq 0$  και  $b_k \geq 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ .

- (α) Αν οι σειρές  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  και  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$ .  
 (β) Αν οι σειρές  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  και  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$ .  
 (γ) Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ .

4. Δίνονται ακολουθίες  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  με  $a_k > 0$ ,  $b_k > 0$  και με την ιδιότητα  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ , για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ . Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  συγκλίνει, δείξτε ότι συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

5. (α) Δίνεται ακολουθία  $(a_k)$  με  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και  $(a_k)$  φθίνουσα. Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει, δείξτε ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), βρείτε εκτιμήσεις (άνω και κάτω φράγματα) για το άθροισμα της σειράς  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ ,  $p > 1$ . Δείξτε ειδικότερα ότι  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ .

6. Είδαμε ότι  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ .

(α) Χρησιμοποιώντας αυτή την αναπαράσταση του  $e$  και συγκρίνοντας την  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  με κατάλληλη γεωμετρική σειρά, δείξτε ότι  $e < 3$ .

(β) Δείξτε ακόμα ότι, αν  $s_n$  είναι το  $n$ -οστό μερικό άθροισμα αυτής της σειράς, ισχύει η ανισότητα:  
 $0 < e - s_n < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$ .

**7\***. (Αναδιατάξεις σειρών) Είδαμε ότι η εναλλάσσοσα αρμονική σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$  συγκλίνει. Έστω  $s$  το άθροισμά της.

(α) Δείξτε ότι  $s > 0$ .

(β) Θεωρούμε τώρα την εξής αναδιάταξη των όρων της παραπάνω σειράς:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

(όπου το μοτίβο είναι ότι ένας θετικός όρος ακολουθείται από δύο αρνητικούς.)

Αποδείξτε ότι το νέο άθροισμα ισούται με  $\frac{s}{2}$ .

Συμπέρασμα: Το άθροισμα μιας σειράς άπειρων όρων μπορεί να αλλάξει αν αναδιατάξουμε τους όρους της.

**8\*\***. Δίνεται ακολουθία  $(a_k)$ . Αν  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  είναι μία 1-1 και επί συνάρτηση, τότε η ακολουθία  $(b_k)$  με  $b_k = a_{\sigma(k)}$ , για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ , λέγεται αναδιάταξη της  $(a_k)$ . Αποδείξτε ότι: Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει απολύτως, τότε και για κάθε αναδιάταξη  $(b_k)$  της  $(a_k)$  η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  συγκλίνει απολύτως και ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$