1. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\limsup a_n = 0$.
(β) Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\limsup a_n = 0 \iff \lim a_n = 0 \ .$$

(α) Αν $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $a_n > 0$ για κάθε n, ενώ

$$\limsup \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0 .$$

(β) ($\Leftarrow$) Αν $\lim a_n = 0$, τότε ισχύει $\limsup a_n = \lim a_n = 0$, αφού αν μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει, τότε ισχύει

$$\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n .$$

($\Rightarrow$) Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ισχύει $\limsup a_n = 0$.
Θα δείξουμε ότι η (a_n) συγκλίνει.
Γι' αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $\liminf a_n = \limsup a_n = 0$.
Έστω λοιπόν (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n) με $a_{k_n} \to \liminf a_n$.
Αφού $a_{k_n} \geq 0$ για κάθε n, θα ισχύει και $\liminf a_n \geq 0$.
Όμως

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n = 0 .$$

Άρα $\liminf a_n = \limsup a_n = 0$, από όπου συμπεραίνουμε ότι η (a_n) συγκλίνει στο 0.

($\Rightarrow$) Άλλος τρόπος: Δείχνουμε ότι $K = \{0\}$.
Πράγματι αν x οριακό σημείο της (a_n) τότε υπάρχει (a_{k_n}) με $a_{k_n} \to x$. Όμως, αφού $a_{k_n} \geq 0$, ισχύει $x \geq 0$ και αφού $0 \leq x \leq \limsup a_n = 0$, ισχύει $x = 0$. Άρα $K = \{0\}$.

2. Δίνεται φραγμένη ακολουθία (a_n) και έστω $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι ισχύει $\limsup a_n \leqslant s$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) για την οποία ισχύει $\limsup a_n < s$.

(γ) Δείξτε ότι, αν ισχύει $a_n \neq s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\limsup a_n = s$.

(α) Έστω $x = \limsup a_n$. Τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim a_{k_n} = x$.
Αφού $a_{k_n} \leq s$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι ισχύει και $x = \lim a_{k_n} \leq s$.

(β) Για την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $s = \max\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$, ενώ $\limsup a_n = \lim a_n = 0$. Άρα $\limsup a_n < s$.

(γ) Έστω (a_n) ακολουθία για την οποία ισχύει $a_n \neq s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim a_{k_n} = s$. Από αυτό έπεται ότι $s \leq \limsup a_n$. Όμως, σύμφωνα με το (α), ισχύει και $\limsup a_n \leq s$. Άρα τελικά $\limsup a_n = s$.

Κατασκευή της υπακολουθίας (a_{k_n}):
Γίνεται επαγωγικά. Χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι $a_n < s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Από αυτό και τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι, για κάθε $x < s$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$x < a_n < s.$$

Η επιλογή της ακολουθίας (k_n) γίνεται έτσι ώστε:

(i) $k_1 < k_2 < \dots$, (ii) $a_{k_1} < a_{k_2} < \dots$

και (iii) $s - \frac{1}{n} < a_{k_n} < s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Για $n=1$ επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

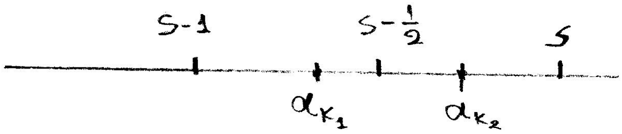
$$s-1 < a_{k_1} < s.$$

Για $n=2$ θέτουμε $x_2 = \max\{s-\frac{1}{2}, a_1, a_2, \dots, a_{k_1}\}$

Επιλέγουμε $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_2 < a_{k_2} < s$.

Από τον ορισμό του x_2 έπεται ότι ισχύει

$k_1 < k_2$, $a_{k_1} < a_{k_2}$ και $s-\frac{1}{2} < a_{k_2} < s$.



Επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι οι $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ έχουν επιλεγεί.

Θέτουμε

$$x_{n+1} = \max\left\{ s-\frac{1}{n+1}, a_1, a_2, \dots, a_{k_n} \right\}$$

και επιλέγουμε $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ ώστε

$$x_{n+1} < a_{k_{n+1}} < s.$$

Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγική κατασκευή.

Από την ιδιότητα

$$s-\frac{1}{n} < a_{k_n} < s, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

έπεται ότι $a_{k_n} \to s$.

Άλλη λύση του 2(γ)

Για να δείξουμε ότι το s είναι οριακό σημείο της (a_n) μπορούμε, αντί να κατασκευάσουμε υπακολουθία (a_{k_n}) με $a_{k_n} \to s$, να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1.3.2.

Σύμφωνα με το Λήμμα, για να είναι το s οριακό σημείο, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n \geq m$ ώστε $s - \varepsilon < a_n < s$.
(Η ανισότητα $a_n < s$ ισχύει ούτως ή άλλως για κάθε n, από τις υποθέσεις)
Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$.
Θέτουμε

$$x = \max\{s-\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

Τότε $x < s$, αφού $s - \varepsilon < s$ και $a_n < s$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

Αφού $x < s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, από τον ορισμό του supremum υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με $x < a_{n_1} \leq s$ (και μάλιστα εδώ ισχύει $x < a_{n_1} < s$).
Τότε, από τον ορισμό του x, ισχύει

$$s - \varepsilon < a_{n_1}$$

και, αφού $a_{n_1} > a_1, a_2, \ldots, a_m$, το a_{n_1} δεν είναι κάποιο από τα $a_1, a_2, \ldots, a_m$ και συμπεραίνουμε ότι

$$n_1 > m.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

3. Δίνονται οι ακουλουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ και $b_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακολουθιών $(a_n), (b_n)$ και $(a_n + b_n)$ και παρατηρήστε ότι

$$\liminf a_n + \liminf b_n < \liminf(a_n + b_n) < \limsup(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n \quad .$$

Είναι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$a_{4k} = \sin(2k\pi) = 0$	$b_{4k} = \cos(2k\pi) = 1$
$a_{4k+1} = \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$	$b_{4k+1} = \cos(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$
$a_{4k+2} = \sin(2k\pi + \pi) = 0$	$b_{4k+2} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$
$a_{4k+3} = \sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1$	$b_{4k+3} = \cos(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = 0$

Άρα, για την (γ_n) με $\gamma_n = a_n + b_n$

$\gamma_{4k} = a_{4k} + b_{4k} = 1$ και $\gamma_{4k+1} = a_{4k+1} + b_{4k+1} = 1$

$\gamma_{4k+2} = a_{4k+2} + b_{4k+2} = -1$ και $\gamma_{4k+3} = a_{4k+3} + b_{4k+3} = -1$

Άρα τα σύνολα των οριακών σημείων της (a_n), της (b_n) και της (γ_n) είναι

$K_{(a_n)} = \{-1, 0, 1\}$, $K_{(b_n)} = \{-1, 0, 1\}$ και $K_{(\gamma_n)} = \{-1, 1\}$

Άρα $\liminf a_n = \liminf b_n = \limsup \gamma_n = 1$

$\limsup a_n = \limsup b_n = \liminf \gamma_n = -1$

οπότε

$\liminf a_n + \liminf b_n = -2 < -1 = \liminf(a_n + b_n)$

και $\limsup a_n + \limsup b_n = 2 > 1 = \limsup(a_n + b_n)$

(Θυμηθείτε ότι πάντα ισχύουν οι ανισότητες

$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$)

4. Δίνεται ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = 2, \quad \lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = 4 \text{ και } \lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = 5.$$

(α) Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη.
(β) Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_0 = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N}\}, \quad A_1 = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k+1, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k+2, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N}\}.$$

Έστω (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n) με $\lim a_{k_n} = \ell$, για κάποιον $\ell \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει ένα ακριβώς από τα παρακάτω:
(i) Για κάθε $n \geq n_0$, $k_n \in A_0$ ή (ii) για κάθε $n \geq n_0$, $k_n \in A_1$ ή (iii) για κάθε $n \geq n_0$, $k_n \in A_2$ και συμπεράνατε ότι $\ell \in \{2, 4, 5\}$.

(α) Η υπακολουθία (a_{3k}) συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει $M_0 > 0$ με $|a_{3k}| \leq M_0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Όμοια, καθεμιά από τις υπακολουθίες (a_{3k+1}) και (a_{3k+2}) είναι φραγμένες αφού συγκλίνουν, οπότε υπάρχουν $M_1 > 0$ και $M_2 > 0$ με $|a_{3k+1}| \leq M_1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και

$|a_{3k+2}| \leq M_2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, M_0, M_1, M_2\}$.
Αφού κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 3$ είτε είναι της μορφής $n = 3k$, είτε της μορφής $n = 3k+1$, είτε $n = 3k+2$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη.

(β) Έστω ότι $a_{k_n} \to \ell$ με $\ell \in \mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι ένα τουλάχιστον από τα σύνολα $A_0 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$, $A_1 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$, $A_2 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το $A_0 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο. Θα δείξουμε ότι τότε τα $A_1 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $A_2 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένα.

Παρατηρούμε ότι η υπακολουθία της (a_n) που αποτελείται από τους όρους a_m, με $m \in A_0 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κοινή υπακολουθία της (a_{k_n}) και της (a_{3k}) και, ως υπακολουθία της (a_{k_n}) θα συγκλίνει στο ℓ, ενώ ως υπακολουθία της (a_{3k}) θα πρέπει να συγκλίνει στο 2. Από μοναδικότητα του ορίου, παίρνουμε $\ell = 2$.

Αν τώρα το $A_1 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ ήταν άπειρο, τότε με τον ίδιο τρόπο θα παίρναμε και $\ell = 4$, άτοπο. Όμοια θα καταλήγαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι το $A_2 \cap \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο.

Συμπεραίνουμε ότι καθένα από αυτά τα σύνολα είναι πεπερασμένο, δηλαδή το σύνολο $B = \{n \in \mathbb{N} : k_n \in A_1 \cup A_2\}$ είναι πεπερασμένο. Θέτοντας $n_0 = \max B + 1$ παίρνουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $k_n \in A_0$.

5. (α) Δίνεται αύξουσα και φραγμένη ακολουθία (a_n) και μια υπακολουθία της (a_{k_n}). Δείξτε ότι

$$\sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(β) Αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ισχύει $a_{k_n} \to a$, δείξτε ότι $a_n \to a$.

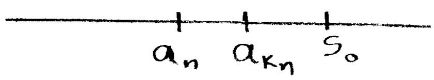
(α) Εστω $s_0 = \sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ και $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Αφού $\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ισχύει πάντα $s_0 \leq s$.

Εστω τώρα ότι η (a_n) είναι αύξουσα. Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη από το s_0. Πράγματι· για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$a_n \leq a_{k_n} \leq s_0 \,, \quad \text{αφού } n \leq k_n \text{ και } a_n \nearrow.$$

Συμπεραίνουμε ότι $s \leq s_0$ και τελικά $s = s_0$.



(β) Αφού η (a_{k_n}) είναι αύξουσα, ισχύει

$$a = \lim a_{k_n} = \sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

Όπως στο (α), έχουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$a_n \leq a_{k_n} \leq a \,.$$

Άρα η (a_n) είναι φραγμένη και ως αύξουσα και φραγμένη, συγκλίνει*. Τότε κατ' ανάγκη κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο, οπότε

$$\lim a = \lim a_{k_n} = a$$

* (Αλλιώς:) Είναι $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αλλά, από το (α), $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\} = a$.

Άλλη λύση για το 5(α)

Έστω $s_0 = \sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ και $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Αφού η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και φραγμένη, συγκλίνει στο $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή $\lim a_n = s$. Για τον ίδιο λόγο, η (a_{k_n}) συγκλίνει στο $\sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή $\lim a_{k_n} = s_0$. Όμως κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει και αυτή στο ίδιο όριο. Άρα $s = s_0$.

6. (α) Αν $a_n \to 0$, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $2^n a_{k_n} \to 0$.

(β) Αν $a_n \to 0$, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$ να συγκλίνει.

(α) Η υπακολουθία (a_{k_n}) κατασκευάζεται επαγωγικά, έτσι ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να ισχύει

$$|a_{k_n}| < \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

- Για $n=1$, εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = \frac{1}{2}$, παίρνουμε ότι υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq m_1$, να ισχύει $|a_k| < \frac{1}{2}$.
  Θέτουμε $k_1 = m_1$, οπότε $|a_{k_1}| < \frac{1}{2}$.
- Για $n=2$, παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot 2^2}$ και βρίσκουμε ότι υπάρχει $m_2 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq m_2$, να ισχύει $|a_k| < \frac{1}{2 \cdot 2^2}$.
  Θέτουμε $k_2 = \max\{k_1+1, m_2\}$, οπότε $k_1 < k_2$ και $|a_{k_2}| < \frac{1}{2 \cdot 2^2}$.
- Επαγωγικό βήμα:
  Υποθέτουμε ότι οι $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ έχουν επιλεγεί. Για $\varepsilon = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$, βρίσκουμε ότι υπάρχει m_{n+1} ώστε, για κάθε $k \geq m_{n+1}$, να ισχύει $|a_k| < \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$.
  Θέτουμε

  $$k_{n+1} = \max\{k_n + 1, m_{n+1}\}, \text{ οπότε}$$

  $k_n < k_{n+1}$ και $|a_{k_{n+1}}| < \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$

7. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) με την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, αλλά η (a_n) να αποκλίνει.

(β) Αν για την ακολουθία (b_n) ισχύει $|b_{n+1}-b_n|\le \frac{1}{2^n}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δείξτε ότι η (b_n) συγκλίνει.

(γ) Ορίζουμε την ακολουθία (a_n) ως εξής: $a_1=0$, $a_2=1$ και

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2},\quad n=1,2,\dots$$

Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

(α) Θεωρούμε την (a_n) με $a_n=\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Ισχύει

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\longrightarrow 0$$

Δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, ενώ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

(β) Θα δείξουμε ότι η (b_n) είναι ακολουθία Cauchy. Έστω $n,m\in\mathbb{N}$ με $m>n$. Θέτουμε $m=n+k$. Είναι

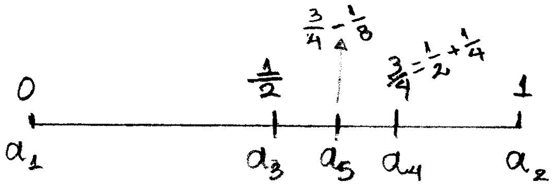
$$|b_m-b_n|=|b_{n+k}-b_n|\le|b_{n+k}-b_{n+k-1}|+|b_{n+k-1}-b_{n+k-2}|+\dots+|b_{n+1}-b_n|\le\frac{1}{2^{n+k-1}}+\frac{1}{2^{n+k-2}}+\dots+\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)<\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

Όμως, $\frac{1}{2^{n-1}}\to 0$.
Έπεται ότι, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει n_0 ώστε, αν $m>n\ge n_0$ να ισχύει $|b_m-b_n|<\varepsilon$, δηλαδή η (b_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει.

7(γ) Εστω $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ και

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$



Παρατηρούμε ότι $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$.

Άρα:

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{4}(a_{n-1} - a_{n-2}) = \ldots = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}(a_2 - a_1)$$

Δηλαδή $a_{n+1} - a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Από το (β) ξέρουμε ότι η (a_n) συγκλίνει.

Έχουμε:

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$\Rightarrow a_n = (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}} + (-1)^{n-3}\frac{1}{2^{n-3}} + \ldots + 1$$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{2^k}$$

(μερικό άθροισμα γεωμετρικής σειράς με λόγο $-\frac{1}{2}$)

οπότε τελικά

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Άλλη λύση για το 7(γ)

Όπως πριν βλέπουμε ότι $a_{n+1} - a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$
και από το (β) παίρνουμε ότι
η (a_n) συγκλίνει.

Έστω $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Από τη σχέση $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, προσθέτοντας
και στα δύο μέλη το a_{n+1} , παίρνουμε
$2a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$
Έτσι, έχουμε , για κάθε n,

$$2a_{n+1} + a_n = 2a_n + a_{n-1} = \dots = 2a_2 + a_1$$

$$\Rightarrow 2a_{n+1} + a_n = 2$$

Περνώντας στο όριο,

$$\lim_{n\to\infty} (2a_{n+1} + a_n) = 2 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

8. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με $a_n = \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0 \ ,$$

αλλά η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy .

Είναι

$$\ln(n+k) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) ,$$

οπότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (σταθερό), είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln(n+k) - \ln(n)\right] = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)$$

$$= \ln 1 = 0.$$

Όμως, η ακολουθία $a_n = \ln(n)$ δεν είναι Cauchy, αφού αποκλίνει στο $+\infty$.