Απειροστικός Λογισμός II

Επαναληπτικές Ασκήσεις - Μέρος Γ′

Μάιος-Ιούνιος 2021

Άσκηση T-1

(α) Έστω I διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν η f' είναι φραγμένη συνάρτηση τότε η f είναι Lipschitz συνεχής.
Στη συνέχεια εξετάστε αν η $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(\xi)| \leqslant M$ για κάθε $\xi \in I$. Έστω $x < y$ στο I. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, y)$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leqslant M \cdot |x - y|.$$

Δηλαδή, η f είναι Lipschitz συνεχής.

Παραγωγίζοντας την g βλέπουμε ότι

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x}} + \frac{2\ln x}{\sqrt{x}}$$

απ' όπου έπεται ότι $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$. Η g' είναι επίσης συνεχής στο $[1, \infty)$, άρα είναι φραγμένη. Από το προηγούμενο ερώτημα, η g είναι Lipschitz συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση Τ-1

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις $f, g, h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \qquad h(x) = x \sin x.$$

Να διατυπώσετε σαφώς τα κριτήρια (από τη θεωρία ή τις βασικές ασκήσεις που έγιναν στο μάθημα) τα οποία χρησιμοποιείτε.

Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[0, +\infty)$, θέτοντας

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.$$

Αν $x \geqslant 1$ τότε

$$|f'(x)| \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| + \frac{1}{x} \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leqslant 2.$$

Συνεπώς, η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και ομοιόμορφα συνεχής, στο $[1, +\infty)$. Αφού είναι και συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση Τ-1

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις $f, g, h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \qquad h(x) = x \sin x.$$

Να διατυπώσετε σαφώς τα κριτήρια (από τη θεωρία ή τις βασικές ασκήσεις που έγιναν στο μάθημα) τα οποία χρησιμοποιείτε.

Η $g(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Αν $x, y \in [1, +\infty)$, τότε

$$|g(x) - g(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \frac{1}{2}|x-y|,$$

δηλαδή η g ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[1, +\infty)$. Συνεπώς, η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$. Αφού είναι και ομοιόμορφα συνεχής (ως συνεχής σε κλειστό διάστημα) στο $[0, 1]$, έπεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$.

Άλλος τρόπος: Παρατηρούμε ότι $|g(x) - g(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ για κάθε $x, y \geqslant 0$. Έπεται ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής με τον ορισμό. Για δοθέν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$.

Άσκηση Τ-1

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις $f, g, h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \qquad h(x) = x \sin x.$$

Να διατυπώσετε σαφώς τα κριτήρια (από τη θεωρία ή τις βασικές ασκήσεις που έγιναν στο μάθημα) τα οποία χρησιμοποιείτε.

Η h δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρούμε ότι η $h'(x) = x \cos x + \sin x$ δεν είναι φραγμένη και ότι παίρνει μεγάλες τιμές στα σημεία της μορφής $2n\pi$ όπου n μεγάλος φυσικός. Ορίζουμε $x_n = 2n\pi$ και $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$. Τότε, $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$, αλλά

$$h(y_n) - h(x_n) = \big(2n\pi + (1/n)\big) \sin(1/n) = 2\pi \frac{\sin(1/n)}{1/n} + \frac{\sin(1/n)}{n} \to 2\pi \cdot 1 + 0 = 2\pi \neq 0$$

όταν $n \to \infty$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται ότι η h δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση Τ-2

(α) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $a \leqslant \gamma < \delta \leqslant b$ τότε $\int_\gamma^\delta g(x)\,dx = 0$. Αποδείξτε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Πρώτος τρόπος: Αν πάρουμε $\gamma = a$ και $\delta = x \in (a, b]$, η υπόθεση μας δίνει ότι

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt = 0$$

για κάθε $x \in [a, b]$ (αφού έχουμε επίσης $G(a) = 0$). Από το θεμελιώδες θεώρημα έπεται ότι $g = G' = 0$.

Δεύτερος τρόπος: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $g(x) \neq 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $g(x) > 0$. Αφού η g είναι συνεχής, υπάρχει διάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ το οποίο περιέχει το x, τέτοιο ώστε $g(t) > \frac{g(x)}{2}$ για κάθε $t \in [\gamma, \delta]$. Τότε,

$$\int_\gamma^\delta g(t)\,dt \geqslant \frac{g(x)}{2}(\delta - \gamma),$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

Άσκηση Τ-2

(β) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b g(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$. [*Υπόδειξη:* Εξηγήστε πρώτα γιατί υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε $L(g, P) > 0$.]

Γνωρίζουμε ότι

$$\sup\{L(g, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \int_a^b g(x)dx > 0.$$

Άρα υπάρχει διαμέριση $P_0 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$L(g, P_0) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

Έπεται ότι υπάρχει k τέτοιος ώστε $m_k(x_{k+1} - x_k) > 0$, δηλαδή $m_k > 0$. Όμως,

$$m_k = \inf\{g(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}.$$

Θετοντας $\gamma = x_k$ και $\delta = x_{k+1}$ έχουμε $g(x) \geqslant m_k > 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

Άσκηση Τ-3

(α) Σωστό ή λάθος; Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων στα οποία είναι ασυνεχής είναι πεπερασμένο.

Λάθος: Η συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς είναι ασυνεχής σε άπειρα σημεία, τα $x_k = \frac{1}{k}$ όπου $k \in \mathbb{N}$, αλλά είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η f είναι φραγμένη.

(ii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[b, 2]$ (είναι ακριβώς τόσα όσοι είναι οι φυσικοί k για τους οποίους $1/k \geqslant b$).

(iii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, 2]$ (από γνωστή άσκηση).

(iv) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$ (από γνωστή άσκηση).

Άσκηση Τ-3

(β) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι: αν οι f, g είναι επιπλέον φραγμένες, τότε η $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ είναι επίσης Lipschitz συνεχής.
Ισχύει το ίδιο αν δεν υποθέσουμε ότι οι f και g είναι φραγμένες;

Υποθέτουμε ότι οι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχείς με σταθερές L_f, L_g και φραγμένες, δηλαδή υπάρχουν $M_f, M_g > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M_f$ και $|g(x)| \leqslant M_g$ για κάθε $x \in A$. Τότε, αν $x, y \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leqslant |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leqslant M_f \cdot L_g\, |x - y| + M_g \cdot L_f\, |x - y| = (M_f L_g + M_g L_f)\, |x - y|, \end{aligned}$$

δηλαδή η $f \cdot g$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά $M_f L_g + M_g L_f$.

Χωρίς την υπόθεση ότι οι f και g δεν είναι φραγμένες, το συμπέρασμα γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα θεωρήστε τις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = g(x) = x$ ή $f(x) = x$ και $g(x) = \sin x$ (στο δεύτερο παράδειγμα η μία από τις δύο συναρτήσεις είναι φραγμένη).

Άσκηση Τ-3

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ **και ότι** $f(0) = 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f στο 0 βρίσκουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|t| < \delta$ να ισχύει

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| < \varepsilon.$$

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$. Τότε

$$f(y) = f(x + (y - x)) \leqslant f(x) + f(y - x)$$

άρα

$$f(y) - f(x) \leqslant f(y - x) < \varepsilon$$

αφού $|f(y - x)| < \varepsilon$, και όμοια

$$f(x) - f(y) \leqslant f(x - y) < \varepsilon.$$

Συνεπώς, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Άσκηση 3.23

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in (0,1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1,2)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Η συνάρτηση $f : (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in (0,1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1,2)$ είναι συνεχής: έστω $x_0 \in (0,1)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \delta(x_0) > 0$ (δεν εξαρτάται από το $\varepsilon > 0$) ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0,1)$. Αν $x \in (0,1) \cup (1,2)$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $x \in (0,1)$. Άρα, $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής στο x_0.
Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (1,2)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο $(0,1) \cup (1,2)$.
Όμως, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θεωρήστε τις ακολουθίες $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ και $y_n = 1 + \frac{1}{n+1}$. Έχουμε $x_n \in (0,1)$, $y_n \in (1,2)$ και $y_n - x_n = \frac{2}{n+1} \to 0$. Όμως, $f(y_n) - f(x_n) = 1 - 0 = 1 \not\to 0$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται το συμπέρασμα.

Άσκηση 3.26

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχει $T > 0$ ώστε $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2T]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2T]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < T$ ώστε αν $x, y \in [0, 2T]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Δείξτε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$: μπορείτε να υποθέσετε ότι $x < y$. Υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $mT \leqslant x \leqslant (m+1)T$. Τότε,
$y < x + \delta < (m+1)T + T = mT + 2T$. Παρατηρήστε ότι $x - mT, y - mT \in [0, 2T]$ και ότι

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - mT) - f(y - mT)|$$

από την περιοδικότητα της f. Αφού

$$|(x - mT) - (y - mT)| = |x - y| < \delta,$$

έχουμε $|f(x - mT) - f(y - mT)| < \varepsilon$ και έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 3.28

Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$$

($f(x)$ είναι η «απόσταση» του x από το A). Δείξτε ότι

(α) $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(β) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $f(x) \leqslant |x-a|$ και $|x-a| \leqslant |x-y| + |y-a|$ από την τριγωνική ανισότητα. Άρα,

$$f(x) \leqslant |x-y| + |y-a|.$$

Αφού $f(x) - |x-y| \leqslant |y-a|$ για κάθε $a \in A$, συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) - |x-y| \leqslant \inf\{|y-a| : a \in A\} = f(y).$$

Δηλαδή,

$$f(x) - f(y) \leqslant |x-y|.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(y) - f(x) \leqslant |y-x| = |x-y|$. Έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$.

(β) Από το (α) η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 4.13

Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):

(α) $f(x) = x + [x]$.

(α) $f(x) = x + [x]$. Η f είναι αύξουσα στο $[0, 2]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Μπορείτε να γράψετε

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xdx + \int_0^2 [x]dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 2 και το δεύτερο ίσο με 1.

Άσκηση 4.13

Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0,2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):

(β) $f(x)=1$ αν $x=\frac{1}{k}$ για κάποιον $k\in\mathbb{N}$, και $f(x)=0$ αλλιώς.

(β) $f(x)=1$ αν $x=\frac{1}{k}$ για κάποιον $k\in\mathbb{N}$, και $f(x)=0$ αλλιώς. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η f είναι φραγμένη.

(ii) Αν $0<b<2$, τότε η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[b,2]$ (είναι ακριβώς τόσα όσοι είναι οι φυσικοί k για τους οποίους $1/k\geqslant b$).

(iii) Αν $0<b<2$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b,2]$ (από γνωστή άσκηση).

(iv) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$ (από γνωστή άσκηση).

Άσκηση 4.23

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.

Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(y)| \leqslant M$ για κάθε $y \in [0,1]$. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Από τη συνέχεια της f στο 0, υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε: αν $0 \leqslant y \leqslant \delta$ τότε $|f(y) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right)^n < \delta.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ μπορούμε να γράψουμε (παρατηρήστε ότι αν $0 < x < 1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}$ τότε $|f(x^n) - f(0)| < \varepsilon/2$)

$$\begin{aligned}
|a_n - f(0)| &= \left| \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} (f(x^n) - f(0))dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (f(x^n) - f(0))dx \right| \\
&\leqslant \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} |f(x^n) - f(0)|\, dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (|f(x^n)| + |f(0)|)\, dx \\
&\leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M+1} \cdot 2M < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, $a_n \to f(0)$.

Άσκηση 4.25

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ για κάθε $x, y \in [0,1]$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Παρατηρήστε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)|dx.$$

Στο διάστημα $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ έχουμε $|f(x) - f(k/n)| \leqslant M\left(\frac{k}{n} - x\right)$, άρα

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)| \leqslant M \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx = M \int_0^{1/n} y\, dy = \frac{M}{2n^2}.$$

Άρα,

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$$

Άσκηση 4.28

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leqslant M \int_a^x |f(t)| dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(t)| \leqslant A$ για κάθε $t \in [a, b]$. Αυτό δείχνει ότι

$$|f(x)| \leqslant M \int_a^x |f(t)| dt \leqslant M \int_a^x A\, dt = MA(x - a)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Εισάγοντας αυτή την εκτίμηση πάλι στην υπόθεση, παίρνουμε

$$|f(x)| \leqslant M \int_a^x |f(t)| dt \leqslant M^2 A \int_a^x (t - a)\, dt = \frac{M^2 A}{2}(x - a)^2$$

για κάθε $x \in [a, b]$, και επαγωγικά,

$$|f(x)| \leqslant \frac{M^n A}{n!}(x - a)^n$$

για κάθε $x \in [a, b]$ και *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n A}{n!}(x - a)^n = 0,$$

άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 4.30

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M > 0$ (αλλιώς, $f = 0$). Παρατηρούμε ότι

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b M^n dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n}$$

και $M(b-a)^{1/n} \to M$ όταν $n \to \infty$, άρα $\limsup_n \gamma_n \leqslant M$.

Έστω $0 < \varepsilon < M$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = M$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a, b]$ με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $f(x) > M - \varepsilon$ για κάθε $x \in J$. Άρα,

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geqslant \left(\int_J [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geqslant (M-\varepsilon)\,\delta^{1/n} \to M - \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\liminf \gamma_n \geqslant M - \varepsilon$ για τυχόν $\varepsilon \in (0, M)$, και συμπεραίνουμε ότι $\liminf \gamma_n \geqslant M$. Έπεται ότι $\limsup \gamma_n = \liminf \gamma_n = M$, άρα $\gamma_n \to M$.