Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 2ο Τεστ
3 Απριλίου 2021

1. (4 μον.) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν $k^2 a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως.

2. (3+1 μον.) **(α)** Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^3+2}\right)^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^{\sqrt{k}}.$$

(β) Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

3. (1+1+2 μον.) **(α)** Προσδιορίστε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k}.$$

(β) Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ ακολουθια πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $a_n = f(1/n)$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι:

1. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f(0) = 0$.
2. Αν υπάρχει η $f'(0)$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f'(0) = 0$. [*Υπόδειξη:* παρατηρήστε ότι $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} n a_n$.]