Μερικές σημειώσεις για Βάση Hamel, Middle-point convexity

Τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ είναι σώματα ("Βασική Άλγεβρα", Εύδοξος)
Συμβολίζουμε F ένα από τα 3 αυτά σώματα.

Θα λέμε ότι το $X (\neq \emptyset)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος F αν ικανοποιούνται οι ιδιότητες της (+) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού tx με $t \in F$, $x \in X$.

Με την βοήθεια του λήμματος Zorn ή του Αξιώματος της Επιλογής ("Θεωρία Συνόλων") αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα

Κάθε δ.χ. X επί του F έχει (αλγεβρική) βάση B_F.

Εάν $F = \mathbb{Q}$ μια βάση B_F του X καλείται βάση Hamel (1905, ο Hamel ήταν μαθητής του Hilbert)

Για $X = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{Q}$ κάθε B_F του $\mathbb{R}$ έχει τον πληθάριθμο c (του $\mathbb{R}$)

Δυο ερωτήματα που απαντώνται αρνητικά, με την βοήθεια ύπαρξης βάσης Hamel είναι τα εξής:

1) Εάν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ είναι η f συνεχής; (Συνάρτηση Cauchy)
("Απλογ. Ι", Νεγρεπόντης κα, Εύδοξος, Ασκήσεις 7.7, 8.12, 9.4)

2) Εάν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$ $x, y \in \mathbb{R}$ είναι η f κυρτή, κατά συνέπεια και συνεχής;
("Κυρτή Συνάρτηση", Ασκήσεις III) (Middle point Convexity)

Εάν η f είναι συνεχής και $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$ $x,y\in\mathbb{R}$ τότε η f είναι κυρτή (Ασκ. III, η/ τάξη "Κυρτή Ανάλυση")

Παράδειγμα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$ $x,y\in\mathbb{R}$ ασυνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f|_{(\alpha,\beta)}$ δεν είναι κυρτή για κάθε $(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$ $(-\infty\le\alpha<\beta\le+\infty)$

Έστω $B_{\mathbb{Q}}$ μια βάση Hamel στον $\mathbb{R}$. Τότε για $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν μοναδικά $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}\subseteq B_{\mathbb{Q}}$ και $r_1,r_2,\dots,r_n\in\mathbb{Q}$ ώστε $x=r_1b_1+\dots+r_nb_n$. (*)

Επιλέγουμε $b_0\in B_{\mathbb{Q}}$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2r_1 & \text{αν } x=r_1b_0+r_2b_2'+\dots+r_kb_k' \\ 0 & \text{αν } x=r_1b_1'+r_2b_2'+\dots+r_nb_n' \text{ και } b_i'\neq b_0,\ i=1\dots n\end{cases}$$ (χρήση της (*))

δηλαδή: αναλύουμε το x στην βάση $B_{\mathbb{Q}}$ παίρνουμε την "συντεταγμένη" του στο "διάνυσμα" b_0 της βάσης και το $f(x)$ είναι το 2-πλάσιο της "συντεταγμένης" αυτής. Άρα $f(-x)=-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι ασυνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$

- $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Έστω $b_1\in B_{\mathbb{Q}}$, $b_1\neq b_0$. Τότε $\mathbb{R}=\overline{b_0\mathbb{Q}}=\overline{b_1\mathbb{Q}}$. Υπάρχουν $r_n,r_n'\in\mathbb{Q}$: $r_nb_0\to x$, $r_n'b_1\to x$

Όμως $f(r_nb_0)=r_n\xrightarrow[n]{}\frac{x}{b_0}\neq 0$ ενώ $f(r_n'b_1)=0\xrightarrow[n]{}0$. Άρα (ΑΜ) ασυνεχής στο $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- $x=0$. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$. ⊕

Θεωρούμε τυχαία ακ. $x_n\xrightarrow[n]{}1$. Τότε $\frac{x_n-1}{2}\xrightarrow[n]{}0 \overset{\text{ΑΜ}}{\underset{⊕}{\Rightarrow}} f\left(\frac{x_n-1}{2}\right)\xrightarrow[n]{}f(0)=0$

Άρα, $f\left(\frac{x_n-1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x_n)+\frac{1}{2}f(-1)=\frac{1}{2}f(x_n)-\frac{1}{2}f(1)\xrightarrow[n]{}0\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow[n]{}f(1)$. Άτοπο η f ασυνεχής στο $1\in\mathbb{R}$