Μ-20 Ανισότητα Brunn-Minkowski

Ισοπεριμετρική Ανισότητα / Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό, συμπαγές με $\text{int}K \neq \emptyset$ $V_d(K)=\lambda_d(K)$, $V_d(\lambda K) = \lambda^d \lambda_d(K)$, $\lambda \geq 0$.

Αν K κυρτό + συμπαγές $V_d(K)>0 \iff \text{int}K\neq\emptyset$

Θέτουμε $V_d = V$ Τότε $V^{1/d}: \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty)$

(i) $V^{1/d}$ θετικά ομογενής

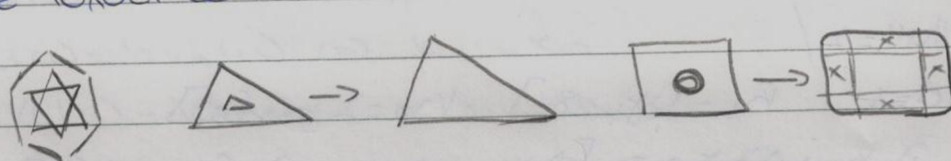
(ii) $V^{1/d}(K)=V^{1/d}(-K)$

(iii) $V^{1/d}(K_1+K_2) \geq V^{1/d}(K_1)+V^{1/d}(K_2)$ Brunn-Minkowski

~

Αρκεί να δείξουμε ότι $V^{1/d}(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2) \geq \lambda_1 V^{1/d}(K_1) + \lambda_2 V^{1/d}(K_2)$, $\lambda_1,\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$, K_1,K_2 κυρτά σώματα

Πότε ισχύει το "="?



Αν. B-M: Αν K_1,K_2 κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$, $\lambda_1,\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$ Τότε $V^{1/d}(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)\geq \lambda_1 V^{1/d}(K_1)+\lambda_2 V^{1/d}(K_2)$

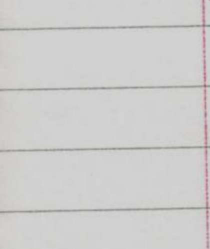
Ισότητα $\iff$ K_1,K_2 ομοιόθετα $K_1 = x_0+\mu K_2$ για κάποια $x_0\in\mathbb{R}^d$, $\mu>0$.

— Τι θα χρειαστούμε:

1) Αν $a_1,a_2>0$, $\lambda_1,\lambda_2>0$ $\lambda_1+\lambda_2=1$ τότε

$$\left[\lambda_1 a_1^{1/d-1} + \lambda_2 a_2^{1/d-1}\right]^{d-1}\left[\lambda_1/a_1+\lambda_2/a_2\right]\geq 1$$

Ισότητα $\iff a_1=a_2$ [log γνήσια κοίλη]



2) Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών

3) Θεώρημα Fubbini

$u\in\mathbb{R}^d$: $\|u\|=1$ $m_K=\min\{\langle x,u\rangle, x\in K\}$

$M_K = \max\{\langle x,u\rangle, x\in K\} = h_K(u)$

$V(K)=\int_{m_K}^{M_K} V_{d-1}(K\cap H(u,z))\,dz$

$z \to V_{d-1}(K\cap H(u,z))$ συνεχής

$g_K(t)=\int_{\mu_K}^{t} V_{d-1}(K\cap H(u,z))dz$

$g_K : [\mu_K, M_K] \to [0, V(K)]$.

$g_K'(t) = V_{d-1}(K\cap H(u,t))>0 \quad , t\in(\mu_K,M_K) \Rightarrow g_K$ γν. αύξουσα

$\exists\ f_K=g_K^{-1}:[0,V(K)]\to[\mu_K,M_K]$.

$f'_K(T)=\dfrac{1}{V_{d-1}(K\cap H(u,f_K(T)))} \quad , t\in(0,V(K))$

4) x_0 κεντρο βαρους (κ.β) του $K \Leftrightarrow \langle x_0,u\rangle=\int_K \langle x,u\rangle dx$

$\forall \|u\|=1$

$\langle x_0,u\rangle=\int_{\mu_K}^{M_K} z\, V_{d-1}(K\cap H(u,z))dz \overset{z=f_K(T)}{=} \int_0^{V(K)} f_K(T)\cdot\dfrac{1}{f_K'(T)}\cdot f_K'(T)dT$

$=\int_0^{V(K)} f_K(T)\,dT$

Αποδειξη:

$f_i=f_{K_i}\ \ \mu_i=\mu_{K_i}\ \ M_i=M_{K_i}\ ,i=1,2$.

$\|u\|=1$ /

$d=1 \quad K_1=[\gamma_1,\delta_1]\ ,K_2=[\gamma_2,\delta_2]$

$\lambda_1K_1+\lambda_2K_2=[\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2,\lambda_1\delta_1+\lambda_2\delta_2]$

$V_1(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)=\lambda_1V_1(K_1)+\lambda_2V_1(K_2)$ ισχυει.

Εστω οτι ισχυει για $d\geq1$

1η περιπτωση $V(K_1)=V(K_2)=1$

Πρεπει ν.δ.ο. $V(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)\geq 1$

$f_i:[0,1]\to[\mu_i,M_i] \quad ,i=1,2$

$h_{\lambda_1K_1+\lambda_2K_2}=\lambda_1h_{K_1}+\lambda_2h_{K_2}$

$V(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)=\int_{\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2}^{\lambda_1M_1+\lambda_2M_2} V_{d-1}((\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)\cap H(u,z))dz \overset{*}{=}$

$f(T)=\lambda_1f_1(T)+\lambda_2f_2(T)\ ,T\in[0,1]$

$(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)\cap H(u,f(T))\supseteq\lambda_1(K_1\cap H(u,f_1(T)))+\lambda_2K_2\cap H(u,f_2(T))$

$\overset{*}{\underset{z=f(T)}{=}}\int_0^1 V_{d-1}((\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)\cap H(u,f(T)))f'(T)\,dT\geq$

$\int_0^1 V_{d-1}(\lambda_1(K_1\cap H(u,f_1(T)))+\lambda_2(K_2\cap H(u,f_2(T)))f'(T)dT \overset{E.Y.}{\geq}$

$\lambda_1\int_0^1\Big[V_{d-1}^{1/d-1}(K_1\cap H(u,f_1(T)))f'(T)dT+\lambda_2\ V_{d-1}^{1/d-1}(K_2\cap H(u,f_2(T))\Big]^{d-1}\cdot$

$\Big[\dfrac{\lambda_1}{V_{d-1}(K\cap H(u,f_1(T))}+\dfrac{\lambda_2}{V_{d-1}(K\cap H(u,f_2(T)))}\Big]dT\overset{(1)}{\geq}1$

2η περίπτωση: K_1, K_2 τυχαία κ.σ.

$$K_i' = \frac{K_i}{V^{1/d}(K_i)} \qquad \lambda_1' = \frac{\lambda_1 V^{1/d}(K_1)}{\lambda_1 V^{1/d}(K_1)+\lambda_2 V^{1/d}(K_2)}, \quad \lambda_2' = \frac{\lambda_2 V^{1/d}(K_2)}{\lambda_1 V^{1/d}(K_1)+\lambda_2 V^{1/d}(K_2)}$$

$$V(\lambda_1' K_1' + \lambda_2' K_2') \geq 1$$

$$V\left(\frac{\lambda_1 K_1+\lambda_2 K_2}{\lambda_1 V^{1/d}(K_1)+\lambda_2 V^{1/d}(K_2)}\right) \geq 1 \quad ✓.$$

Ισότητα $- V(K_1)=V(K_2)=1$

Πρέπει $V(K_1\cap H(u,f_1(\tau))) = V(K_2 \cap H(u,f_2(\tau)))$, $\tau\in[0,1]$

$f_1'(\tau)=f_2'(\tau)$, $\tau\in[0,1] \Rightarrow f_1=f_2+c_u$ $[0,1]$

Έστω ότι το 0 είναι ΚΒ των K_1,K_2

$0=\langle 0,u\rangle=\int_0^1 f_1(\tau)d\tau = \int_0^1 f_2(\tau)d\tau$ Άρα $c_u=0$

$f_1(1)=f_2(1)$

$h_{K_1}(u)=h_{K_2}(u) \Leftrightarrow K_1=K_2$.

-Αν $V(K_1)=V(K_2)=1$ x_i ΚΒ K_i

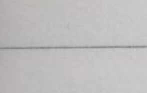
$K_i - x_i$, $i=1,2$ έχουν ΚΒ το 0.

$\Rightarrow K_1-x_1=K_2-x_2 \Rightarrow K_1 = x_0'+K_2$.

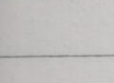
-Αν $V(K_1),V(K_2)>0$ $K_1'=x_0'+K_2' \Leftrightarrow \frac{K_1}{V^{1/d}(K_1)} = x_0' + \frac{K_2}{V^{1/d}(K_2)}$

$\Leftrightarrow K_1 = y_0+\mu K_2$, $\mu>0$. $\Rightarrow K_1,K_2$ ομοιόθετα σε κάθε περίπτωση.

Θεώρημα: Έστω K_1,K_2 κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$



$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\varphi(t)=V^{1/d}((1-t)K_1+tK_2)-(1-t)V^{1/d}(K_1)-tV^{1/d}(K_2)$



(i) φ κοίλη, $\varphi\geq0$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$

(ii) $\varphi(t)>0$, $t\in(0,1) \Leftrightarrow K_1,K_2$ δεν είναι ομοιόθετα

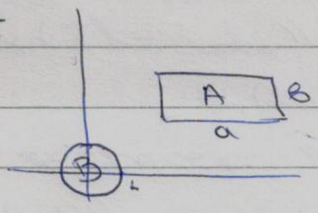
(iii) $\varphi(t)=0$, $t\in[0,1] \Leftrightarrow K_1,K_2$ είναι ομοιόθετα.

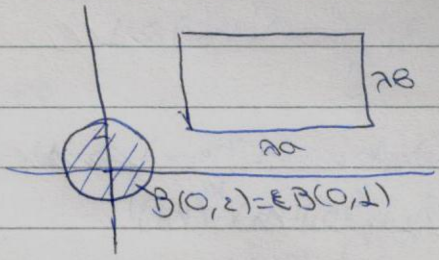
Ξέρουμε ότι $V(\lambda K)=\lambda^d V(K)$ και $V(\mu L)=\mu^d V(L)$

$V(\lambda K+\mu L)\ge \left[\lambda V^{1/d}(K)+\mu V^{1/d}(L)\right]^d = \lambda^d V(K)+\dots+\mu^d V(L)$

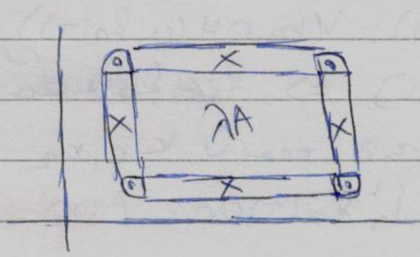
π.χ

$\mathbb{R}^2$





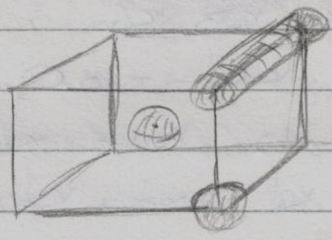
$\lambda>0,\ \varepsilon>0$



$V_2(\lambda A+\varepsilon B(0,1))=$
$\lambda^2 V_2(A)+2\lambda a\cdot\varepsilon+2\lambda b\cdot\varepsilon+\varepsilon^2 V_2(B(0,1))$
$=\lambda^2 V_2(A)+2(a+b)\lambda\varepsilon+\varepsilon^2 V_2(B(0,1))$

όπου $2(a+b)$ = περίμετρος του A.

$\mathbb{R}^3$



$V_3(A+\varepsilon B(0,1))=$
$V_3(A)+\varepsilon^2 V_3(B(0,1))+$
$2(ab+b\gamma+\gamma a)\cdot\varepsilon+2(a+b+\gamma)\cdot$
$\pi\varepsilon^2$

$$\frac{V_3(A+\varepsilon B(0,1))-V_3(A)}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{}\text{Εμβαδόν του A.}$$

Θεώρημα: Έστω K, L κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$. Τότε $V(\lambda K+\mu L)=\lambda^d V_0+\binom{d}{1}V_1\lambda^{d-1}\mu+\binom{d}{2}V_2\lambda^{d-2}\mu^2+\dots+V_d\mu^d$, $\lambda,\mu\ge 0$ όπου $V_1,\dots,V_{d-1}\ge 0$, $V_0=V(K)$, $V_d=V(L)$, $V_1\overset{\text{συμβ.}}{=}V((K,d-1),(L,1))$, $V_i=V((K,d-i),(L,i))$, $i=1,\dots,d-1$ Μεικτοί όγκοι.

Απόδειξη:

1) K, L = πολύτοπα = κυρ. πολύεδρα. Με επαγωγή $V(\lambda K+\mu L)$ = ομογενές πολυώνυμο d-βαθμού

2) $V: \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty)$ συνεχής όμως το σύνολο των πολυτόπων είναι πυκνό στο $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^d)$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\ P_n \xrightarrow{\text{πολ.}} K \\ \quad Q_n \xrightarrow{\text{πολ}} L \end{array}\right\} \lambda P_n + \mu Q_n \to \lambda K + \mu K \Rightarrow V(\lambda P_n + \mu Q_n) \to V(\lambda K + \mu L)$$

Ισοπεριμετρική Ανισότητα:

Έστω K, L κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$ τότε

$$V(\lambda K + \mu K) = \lambda^d v_0 + \binom{d}{1} v_1 \lambda^{d-1}\mu + \dots + \mu^d v_d$$

όπου $v_0 := V((K,d)) = V(K) = v_0$

$v_1 := V(K, d-1, (L,1))$

$\vdots$

$v_d := V((L,d)) = V(L) = v_d$

Τότε

$v_1^d \geq V^{d-1}(K)V(L)$ ισότητα $\Leftrightarrow$ K, L ομοιόθετα.

Απόδειξη:

$$\varphi(t) = V^{1/d}((1-t)K + tL) - (1-t)V^{1/d}(K) - t\,V^{1/d}(L), \quad t \in [0,1]$$

$$= \left[v_0(1-t)^d + \binom{d}{1} v_1 (1-t)^{d-1} t + \binom{d}{2} v_2 (1-t)^{d-2} t + \dots + v_d t^d\right]^{1/d}$$

$$- (1-t)v_0^{1/d} - t v_d^{1/d}$$

$$\varphi'(0) = \frac{1}{d v_0^{1-1/d}} \cdot \left[-dv_0 + dv_1\right] + v_0^{1/d} - v_d^{1/d}$$

$$= \frac{-v_0 + v_1 + v_0 - v_0^{\frac{d-1}{d}} \cdot v_d^{1/d}}{v_0^{1-1/d}}$$

K, L όχι ομοιόθετα $\Leftrightarrow$ $\varphi'(0) > 0$ $\Leftrightarrow$ $v_1^d > v_0^{d-1} \cdot v_d$

Εμβαδόν Επιφανείας κυρτού σώματος κατά Mink

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(K + \varepsilon B) - V(K)}{\varepsilon} =: E(K).$$

$$V(K + \varepsilon B) = V(K) + d v_1 \varepsilon + \binom{d}{2} v_2 \varepsilon^2 + \dots + V(B(0,1))\varepsilon^d$$

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(K + \varepsilon B) - V(K)}{\varepsilon} = d v_1.$$

$E(K) = d v_1$ $\quad v_1^d \geq V^{d-1}(K)\, V(B(0,1))$ ισότης $\Leftrightarrow$ K σφαίρα

$$E(B(0,1)) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(B(0,1)+\varepsilon B(0,1)) - V(B(0,1))}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{((1+\varepsilon)^d - 1)\, V(B(0,1))}{\varepsilon} = d\, V(B(0,1))$$

Άρα $E(B(0,1)) = d\,V(B(0,1))$

Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα: Έστω η κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$ $V_1^d = \left[\frac{E(h)}{d}\right]^d \geq V^{d-1}(h) \cdot V(B(0,1))$ ισότητα $\Leftrightarrow$ K = σφαίρα

$$\left[\frac{E(h)}{d\,V(B(0,1))}\right]^d \geq \left[\frac{V(h)}{V(B(0,1))}\right]^{d-1} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{E(K)}{E(B(0,1))}\right]^d \geq \left[\frac{V(h)}{V(B(0,1))}\right]^{d-1}$$

(i) Εάν K κ.σ. με $V(h) = V(B(0,1))$ τότε $E(h) > E(B(0,1))$ ισότητα $\Leftrightarrow$ η σφαίρα ακτίνας 1

(ii) Εάν h κ.σ. με $E(h) = E(B(0,1))$ τότε $V(B(0,1)) \geq V(h)$ ισότητα $\Leftrightarrow$ η σφαίρα ακτίνας 1