Χειμερινό Εξάμηνο 2014

ΚΥΡΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

(1)

Τερζοπούλου Ζωή , ΑΜ: 1112201100286

ΘΕΜΑ. Μετρική Hausdorff και Αλγόριθμος Atallah

Εισαγωγή

Έστω $\langle X, d\rangle$ μετρικός χώρος. Ορίζουμε $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X)$ το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του X.

Σκοπός μας είναι να εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathcal{H}$ με κατάλληλη μετρική h, ώστε ο $\langle \mathcal{H}, h\rangle$ να είναι πλήρης μετρικός χώρος αν ο $\langle X, d\rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και συμπαγής μετρικός χώρος αν ο $\langle X, d\rangle$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.
Το ρόλο αυτό θα παίζει η μετρική Hausdorff.
Στη συνέχεια, θα δούμε έναν αλγόριθμο, ο οποίος σε γραμμικό χρόνο υπολογίζει την απόσταση Hausdorff μεταξύ δύο κυρτών πολυγώνων στον $\mathbb{R}^2$.
Από εδώ και πέρα, θα θεωρούμε $X = \mathbb{R}^d$, με την ευκλείδια μετρική.

Ενότητα 1: Μετρική Hausdorff

Ορισμός

Έστω $A, B \in \mathcal{H}$ και $d(x, B) = \min\{|x-b|, b \in B\}$ η απόσταση του $x \in \mathbb{R}^d$ από το B.

$$\left[\; |x-y| = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}, \quad \forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \forall\, y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d \;\right]$$

ορίζουμε:

- $\tilde{d}(A,B) = \max\{d(a,B) : a \in A\}$, την απόσταση του A από το B

  $\tilde{d}(B,A) = \max\{d(b,A) : b \in B\}$, την απόσταση του B από το A

- Ως Hausdorff απόσταση των A, B ορίζουμε

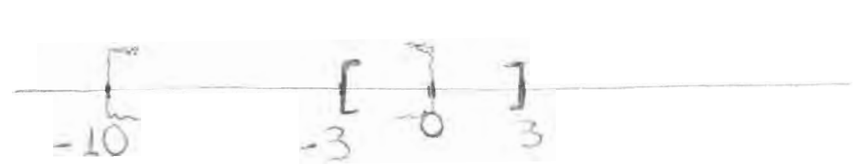
$$h(A,B) = \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\} =$$
$$= \max\{\max_{a \in A} \min_{b \in B} |a-b|, \max_{b \in B} \min_{a \in A} |a-b|\}.$$

Παρατηρήσεις

1. Αφού $A, B \in \mathcal{H}$, τα A, B είναι συμπαγή. Επίσης οι συναρτήσεις $d(\cdot, A)$, $d(\cdot, B)$ είναι συνεχείς, οπότε υπάρχουν $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ τ.ω $h(A,B) = |a_0 - b_0|$.

2. Γενικά $\tilde{d}(A,B) \neq \tilde{d}(B,A)$

π.χ:



$A = [-10, 0]$
$B = [-3, 3]$

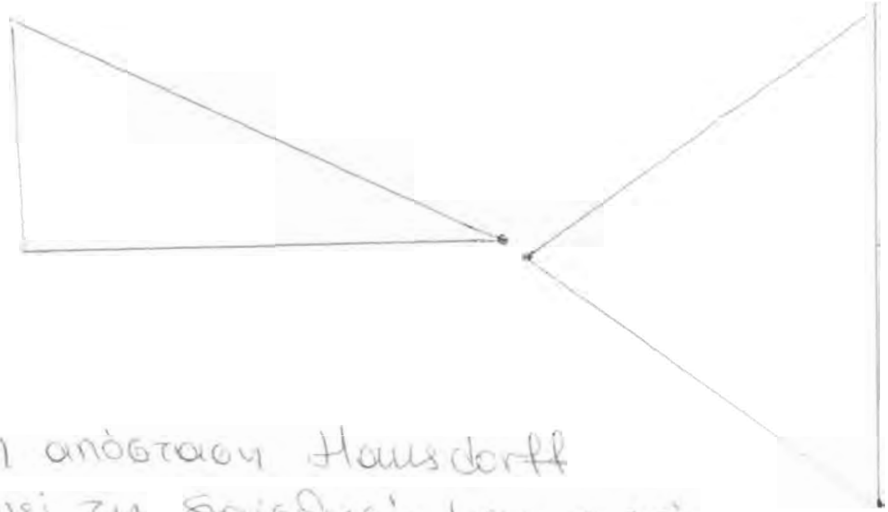
$\tilde{d}(A,B) = 7 \neq 3 = \tilde{d}(B,A)$. Εδώ $h(A,B) = 7$.

3. Γενικά $A \cap B \neq \emptyset \not\Rightarrow \tilde{d}(A,B) = 0$ ή $\tilde{d}(B,A) = 0$ ή $h(A,B)$=

βλ. προηγούμενο παράδειγμα.

4. Ο προφανής ορισμός της απόστασης μεταξύ δύο συνόλων A, B ως την ελάχιστη απόσταση μεταξύ ενός σημείου του A και ενός σημείου του B δεν είναι διαισθητικά ικανοποιητικός, αφού πιθανόν δύο σύνολα να έχουν δύο σημεία πολύ "κοντά" το ένα στο άλλο, αλλά στην πραγματικότητα να είναι "μακριά" ως προς τα υπόλοιπα σημεία τους.

π.χ.

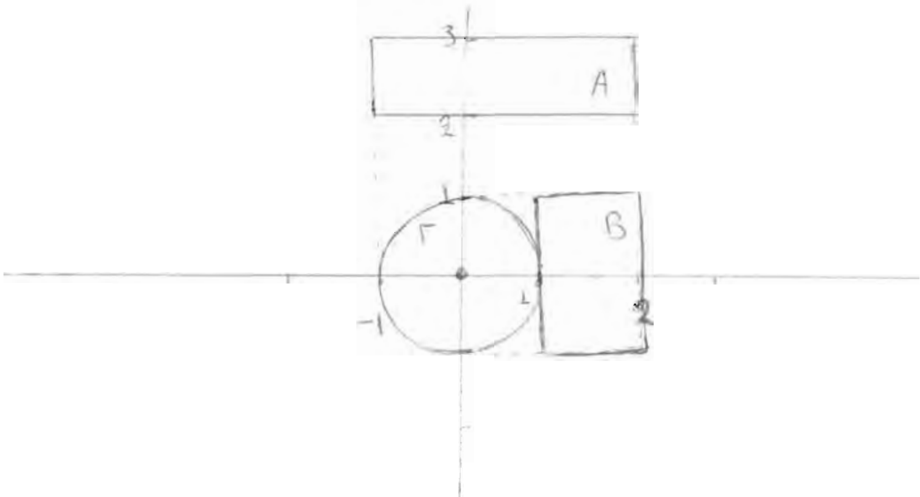


Έτσι, η απόσταση Hausdorff ικανοποιεί τη διαίσθησή μας, αφού μικρή απόσταση Hausdorff σημαίνει ότι κανένα σημείο του συνόλου A δεν είναι πολύ μακριά από το σύνολο B

Ασκήσεις

1. Αν $A=[-1,2]\times[2,3]$, $B=[1,2]\times[-1,1]$, $\Gamma=\hat{S}(0,1)$
Να υπολογιστούν οι αποστάσεις Hausdorff των A,B,Γ ανά δύο. $(A,B,\Gamma\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^2))$

Λύση



Από το σχήμα εύκολα υπολογίζουμε ότι:

$\tilde{d}(A,B)=2\sqrt{2}$, $\tilde{d}(B,A)=3 \Rightarrow h(A,B)=3$

$\tilde{d}(B,\Gamma)=\sqrt{5}-1$, $\tilde{d}(\Gamma,B)=2 \Rightarrow h(B,\Gamma)=2$

$\tilde{d}(A,\Gamma)=\sqrt{13}-1$ $\tilde{d}(\Gamma,A)=3 \Rightarrow h(A,\Gamma)=3$

2. Να βρείτε σύνολα $A, B, \Gamma \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ ώστε $A \subset B \subset \Gamma$ και $h(A,B) = h(A,\Gamma) = h(B,\Gamma)$

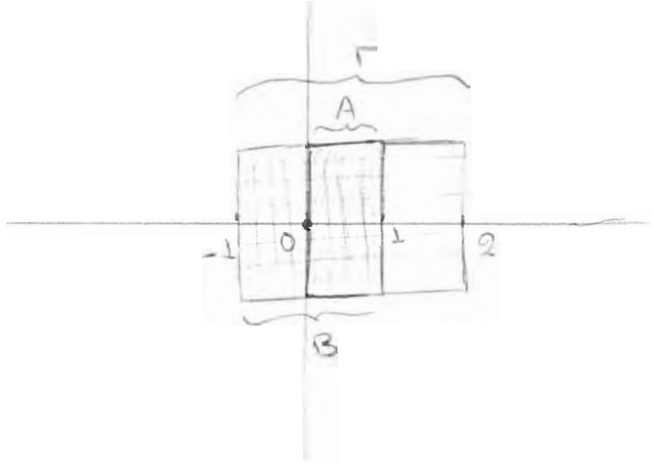
Λύση

Θεωρούμε τα σύνολα

$A = [0,1] \times [-1,1]$

$B = [-1,1] \times [-1,1] \quad \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$

$\Gamma = [-1,2] \times [-1,1]$



προφανώς $A \subset B \subset \Gamma$ και

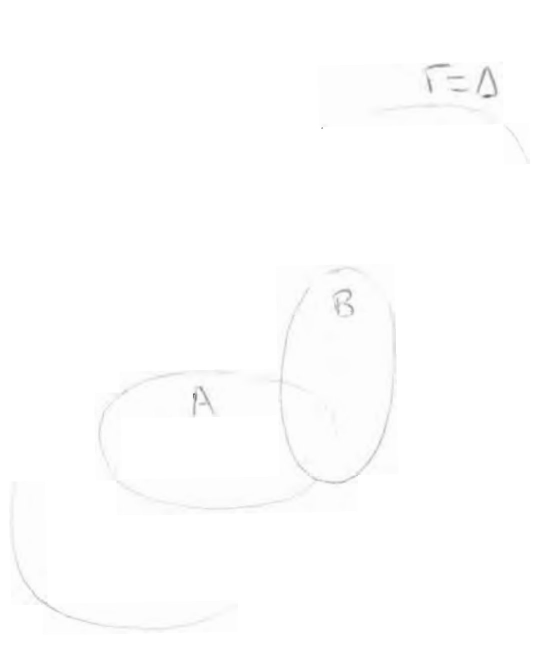
$h(A,B) = h(A,\Gamma) = h(B,\Gamma) = 1$

3. Έστω $A, B, \Gamma, \Delta \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ με $A \subseteq \Gamma$, $B \subseteq \Delta$

Υπάρχει σχέση μεταξύ των $h(A,B)$, $h(\Gamma,\Delta)$;

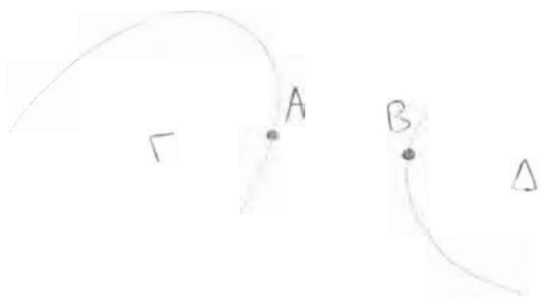
Λύση

Είναι δυνατόν να ισχύει $h(A,B) > h(\Gamma,\Delta)$ (σχήμα α) αλλά και $h(A,B) < h(\Gamma,\Delta)$ (σχήμα β).



Σχήμα α

$h(A,B) > 0 = h(\Gamma,\Delta)$



Σχήμα β

$h(A,B) < h(\Gamma,\Delta)$

Ισοδύναμος ορισμός

Έστω $A \in \mathcal{H}$, $\varepsilon \geq 0$ και $\hat{S}(0,1)$ η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^d$. Ορίζουμε:

$$A+\varepsilon = A + \varepsilon \hat{S}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = a + \varepsilon y,\ a \in A,\ y \in \hat{S}(0,1)\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^d : d(x,A) \leq \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} \hat{S}(a,\varepsilon).$$

Αν $A, B \in \mathcal{H}$, έχουμε

$$h(A,B) = \min\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B+\varepsilon,\ \&\ B \subseteq A+\varepsilon\} \quad (*)$$

Παρατήρηση

1. Για $\varepsilon > 0$, $A = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x,A) = 0\}$, που ισχύει, αφού $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow A$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d \Rightarrow A$ κλειστό.
2. Το $A+\varepsilon$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη του (*)

Αρχικά, υπάρχει $\varepsilon > 0$: $A \subseteq B+\varepsilon$ & $B \subseteq A+\varepsilon$, αφού τα A, B είναι φραγμένα. ($A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$).

Οπότε, $\exists\ \gamma = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B+\varepsilon\ \&\ B \subseteq A+\varepsilon\} \in \mathbb{R}$

Αν $\varepsilon \geq 0$ και $A \subseteq B+\varepsilon$ & $B \subseteq A+\varepsilon$, τότε $\tilde{d}(A,B) \leq \varepsilon$ και $\tilde{d}(B,A) \leq \varepsilon$. Άρα $h(A,B) \leq \varepsilon$. Οπότε $h(A,B) \leq \gamma$.

Έστω ότι $h(A,B) < \gamma$

Τότε $\exists\ \delta \geq 0$ τ.ω. $h(A,B) < \delta < \gamma \Rightarrow \tilde{d}(A,B) < \delta$ & $\tilde{d}(B,A) < \delta$

$\Rightarrow d(a,B) < \delta$ & $d(b,A) < \delta$ $\forall a \in A, b \in B$.

$\Rightarrow A \subseteq B+\delta$ & $B \subseteq A+\delta$ $\xrightarrow{\text{από τον ορισμό του } \gamma}$ $\gamma \leq \delta$. Άτοπο

Άρα $h(A,B) = \gamma$.

τώρα, χρειάζεται ν.δ.ο: $\{\varepsilon\geq 0: A\subseteq B+\varepsilon$ & $B\subseteq A+\varepsilon\}$ κλειστό ③

Έστω $(\gamma_n)_n$ με $\gamma_n\geq\gamma\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$ και $A\subseteq B+\gamma_n$, $B\subseteq A+\gamma_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε:

$$A\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}(B+\gamma_n)=B+\gamma \quad , \quad B\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}(A+\gamma_n)=A+\gamma$$

(λόγω της κλειστότητας των $A+\gamma$, $B+\gamma$).

Άρα έχω το ζητούμενο και άρα

$h(A,B)=\min\{\varepsilon\geq 0: A\subseteq B+\varepsilon$ & $B\subseteq A+\varepsilon\}$ ▨

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

Η h είναι μετρική.

<u>Απόδειξη</u>

i) $h(A,B)\geq 0$.

Προφανώς $h(A,A)=0$, $\forall A\in\mathcal{H}$.

Αν $h(A,B)=0=\min\{\varepsilon\geq 0: A\subseteq B+\varepsilon, B\subseteq A+\varepsilon\}$, τότε

$A\subseteq B$ & $B\subseteq A\Rightarrow A=B$

ii) $h(A,B)=h(B,A)$ εξ' ορισμού.

iii) Θέλω $h(A,B)\leq h(A,C)+h(C,B)$, $A,B,C\in\mathcal{H}$

Έστω $h(A,C)=\gamma$, $h(C,B)=\delta$. Τότε

$A\subseteq C+\gamma$ & $C\subseteq A+\gamma$, $B\subseteq C+\delta$ & $C\subseteq B+\delta$. Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} A\subseteq C+\gamma\subseteq B+(\gamma+\delta) \\ B\subseteq C+\delta\subseteq A+(\gamma+\delta)\end{array}\right\}\Rightarrow h(A,B)\leq\gamma+\delta$$

$\Rightarrow h(A,B)\leq h(A,C)+h(C,B)$

▨

Παρατήρηση - Σχόλιο:

Ισχύει ότι $h(\{x\},\{y\}) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}^d$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η μετρική Hausdorff αποτελεί μια επέκταση της μετρικής του $\mathbb{R}^d$

Η μετρική στον $\mathbb{R}^d$ μετρά αποστάσεις μεταξύ σημείων του $\mathbb{R}^d$ και η h μετρά αποστάσεις μεταξύ συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$.

Όταν τα σύνολα είναι μονοσύνολα, οι δύο μετρικές ταυτίζονται.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία του $<\mathcal{H}, h>$, δηλαδή $K_{n+1} \subseteq K_n$, $n\in\mathbb{N}$, τότε η $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, $K\in\mathcal{H}$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $K \neq \emptyset$ (από πραγματική ανάλυση)

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} K_n = K$, ως προς την h μετρική.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλω ν.δ.ο. $h(K_n, K) \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

Ισχύει $K \subseteq K_n \subseteq K_n + \varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Θεωρούμε $V = \bigcup_{a\in K} S(a,\varepsilon)$.

Το V είναι ανοιχτό, (ως ένωση ανοιχτών) , φραγμένο, και $K \subseteq V$

Έστω $X \in \mathcal{H}$ με $K_1 \subseteq X$ και $V \subseteq X$. Τότε

$$X = V \cup (X \setminus V) = V \cup (X \cap V^c) \subseteq V \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right)^c = V \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c\right)$$

με V, K_n^c ανοιχτά $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αφού το X είναι συμπαγές και η $(K_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ⓸b
ακολουθία, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$: $X \subseteq V \cup K_{n_0}^c$.

Άρα $K_{n_0} \subseteq V$ και $K_n \subseteq \bigcup_{a\in K} S(a,\varepsilon) \subseteq K+\varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Τελικά, $h(K_n,K) \leq \varepsilon \quad \forall n\geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} K_n = K$. ▨

Παράδειγμα (όπου η απόσταση Hausdorff δεν επιτυγχάνεται)

Γενικά, αν A, B τυχαία υποσύνολα του X, είναι

$$h(A,B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a,B),\ \sup_{b \in B} d(b,A) \right\}$$

Ερώτημα: Πότε υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τ.ω. $h(A,B) = d(a,b)$;

Απάντηση: Αν τα A, B είναι ανοιχτά, περιμένουμε ότι ίσως να μην υπάρχουν τέτοια στοιχεία $a \in A$ και $b \in B$.

Παρακάτω όμως βλέπουμε ότι αυτό είναι δυνατό να συμβαίνει ακόμα και για κλειστά σύνολα A, B.

- Θεωρώ $X = \ell_2 = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$

και θεωρώ $B = \{ e_1, e_2, \dots \}$ κλειστό.

$$A = B \cup \underbrace{\left(-1, -\tfrac{1}{2}, \dots, -\tfrac{1}{n}, \dots \right)}_{a} \quad \text{κλειστό.}$$

Είναι: $\sup_{b \in B} d(b,A) = 0$ (αφού $B \subset A$)

οπότε $h(A,B) = d(a,B)$.

τώρα, $d(a, e_n) = \| a - e_n \|_2 = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \sum_{k \neq n} \frac{1}{k^2} \right]^{1/2} = \left(1 + \frac{2}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}$

$$= \left(1 + \frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{n} \right)^{1/2}.$$

Οπότε $h(A,B) = \inf_n d(a, e_n) = \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \right)^{1/2}$

όμως $d(a, e_n) > \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \right)^{1/2} = h(A,B) \quad \forall n$ (άρα $\forall e_n \in B$)

Παρατηρούμε ότι τα A, B είναι κλειστά, αλλά όχι συμπαγή.

Άσκηση. Έστω μ.χ. $\langle X, d\rangle$, $\langle \mathcal{H}(X), h\rangle$.

Η συνάρτηση $diam : \mathcal{H}(X) \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής και μάλιστα $|diam(A) - diam(B)| \leq 2\, h(A,B)$

Λύση

Λόγω συμμετρίας, αρκεί ν.δ.ο: $diam(A) - diam(B) \leq 2h(A,B)$

ή $diam(A) \leq diam(B) + 2h(A,B)$.

Είναι: (αν $h(A,B) = \varepsilon > 0$), $A \subseteq B + \varepsilon$ & $B \subseteq A + \varepsilon$

άρα $diam(A) \leq diam(B+\varepsilon) = diam(B) + 2\varepsilon$

$\Rightarrow$ $diam(A) \leq diam(B) + 2h(A,B)$.

όμοια, $diam(B) \leq diam(A) + 2h(A,B)$

$\Rightarrow$ $|diam(A) - diam(B)| \leq 2h(A,B)$.

(1)

ΚΥΡΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Χειμερινό εξάμηνο 2014

Λαμπρινάκης Γιώργος A.M.: 1112201100155

ΘΕΜΑ: Μετρική Hausdorff

Εισαγωγή

Έστω (X,d) μετρικός χώρος.

Ορίζουμε $\mathcal{F} := \{F \subset X : F$ κλειστό και φραγμένο$\}$

και το εφοδιάζουμε με την συνάρτηση

$h: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ με

$$h(A,B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(b,A)\}$$

Η h είναι καλά ορισμένη και είναι μετρική.

Υποθέτοντας τώρα ότι $X = \mathbb{R}^d$ έχουμε ότι

$\mathcal{F} \equiv \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) := \{K \subset \mathbb{R}^d : K$ συμπαγές$\}$ και αποδεικνύεται ότι ο χώρος $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h)$ είναι πλήρης χώρος.

(- ο $\mathbb{R}^d$ είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη μετρική όπου είναι πλήρης.

- γενικότερα ισχύει ότι αν (X,d) μετρικός χώρος ο $(\mathcal{F}, h)$ είναι πλήρης $\Leftrightarrow$ ο (X,d) είναι πλήρης)

Υπενθύμιση

1) Ισοδύναμος Ορισμός της Μετρικής Hausdorff

$$h(A) = \min\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B+\varepsilon \text{ και } B \subseteq A+\varepsilon\}$$

(όπου αν $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ τότε

$A+\varepsilon := A + \varepsilon \bar{S}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = a+\varepsilon y, a \in A, y \in \bar{S}(0,1)\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^d : d(x,A) \leq \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} \bar{S}(a,\varepsilon)$)

2) Αν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία του $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h)$, τότε η $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$.

Θεώρημα

Ο χωρος $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ιδιαιτέρως: Αν ο X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$ τότε ο $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη

Έστω $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στο $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h)$

Τότε η $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, δηλαδή $\exists\ A\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ και $\rho>0$ ώστε $h(A,K_n)\leq\rho$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Άρα $K_n\subseteq A+\rho=B$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$ όπου $B\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ προφανώς.

Θεωρούμε

$$A_m=\overline{\bigcup_{i=m}^{\infty}K_i}$$

Τότε:
- A_m κλειστό $\forall\ m\in\mathbb{N}$
- A_m φραγμένο $(A_m\subset B)$
- $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία

$\Big\}\ A_m\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$

Άρα (Υπενθύμιση 2) $\exists\ \lim\limits_{m\to\infty}A_m=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}A_m=K\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$

Ισχυρισμός: "$\lim\limits_{n\to\infty}K_n=K$"

Έστω $\varepsilon>0$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=K$ $\exists\ n_1\in\mathbb{N}$: $h(A_n,K)<\varepsilon$ $\forall\ n\geq n_1$

$$\Rightarrow A_n\subseteq K+\varepsilon$$

Άρα $K_n\subseteq K+\varepsilon$ για $n\geq n_1$ (1) $(K_n\subset A_n)$

Η $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία συνεπώς $\exists\ n_0\geq n_1$ ώστε

$$h(K_i,K_n)<\varepsilon\quad\forall\ i,n\geq n_0$$

$$\Rightarrow K_i\subseteq K_n+\varepsilon\quad\forall\ i,n\geq n_0$$

Άρα

$$\bigcup_{i=n_0}^{\infty}K_i\subseteq K_n+\varepsilon\quad\text{για } n\geq n_0$$

$$\Rightarrow A_{n_0}\subseteq\overline{K_n+\varepsilon}=K_n+\varepsilon\quad\text{για } n\geq n_0$$

③

Επομένως $K \subseteq K_n + \varepsilon$ (2) $\forall\, n \geq n_0$

Από (1) (2) έχουμε ότι

$K_n \subseteq K + \varepsilon$ και $K \subseteq K_n + \varepsilon$ $\forall\, n \geq n_0$

Άρα $h(K_n, K) \leq \varepsilon$ $\forall\, n \geq n_0$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν

Άρα $K_n \xrightarrow{h} K$

Έστω τώρα X πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$

Τότε ο $(\mathcal{H}(X), h)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h)$

Πράγματι έστω $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathcal{H}(X)$

και $\lim_{n\to\infty} K_n = K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ και $\varepsilon > 0$

Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$K \subseteq K_n + \varepsilon \subseteq X + \varepsilon$ για $\forall\, n \geq n_0$

Άρα $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, X) \leq \varepsilon\}$ $\forall\, \varepsilon > 0$

Συνεπώς $K \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, X) \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, X) = 0\} = X$

Άρα

$K \in \mathcal{H}(X)$

Άρα ο $(\mathcal{H}(X), h)$ είναι πλήρης μ.χ. □

<u>Παρατήρηση</u>

Από την απόδειξη του θεωρήματος έπεται ότι αν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h)$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i\right)} = K$$

$$\left(\lim_{m\to\infty} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i\right)} = K = \lim_{n\to\infty} K_n\right)$$

Θεώρημα

Αν η ακολουθία $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ συγκλίνει στο K, τότε

$$K = \{x\in\mathbb{R}^d : \exists\ x_n\in K_n,\ n\in\mathbb{N} \text{ ώστε } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$$
$$= \{x\in\mathbb{R}^d : \exists\ x_{v_n}\in K_{v_n},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ υπακολουθία ώστε } \lim_{n\to\infty} x_{v_n} = x\}.$$

Απόδειξη

Έστω $x\in K$.

Επιλέγουμε $x_n\in\{y\in K_n : d(x,K_n) = |x-y|\}$ Τότε

$$|x-x_n| = d(x,K_n) \leq h(K,K_n)$$

Έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} h(K,K_n) = 0$.

Συνεπώς $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Άρα $K \subseteq \{x\in\mathbb{R}^d : \exists\ x_n\in K_n,\ n\in\mathbb{N} \text{ ώστε } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$

Αντίστροφα, έστω $x\in\mathbb{R}^d$ και $x_n\in K_n$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Έστω $m\in\mathbb{N}$.

Τότε $x_n \in \bigcup_{i=m}^{\infty} K_i$ για $n\geq m$.

Έπεται ότι το $x\in\overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i}$. Αυτό ικανοποιείται $\forall\, m\in\mathbb{N}$

Άρα $x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i}\right)$

Άρα έχουμε ότι $\{x\in\mathbb{R}^d : \exists\ x_n\in K_n,\ n\in\mathbb{N} \text{ ώστε } \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \subseteq K$

Τελικά έχουμε τη ζητούμενη ισότητα

Για τη δεύτερη ισότητα έχουμε προφανώς ότι

$$K = \{x\in\mathbb{R}^d : \exists\ x_n\in K_n,\ n\in\mathbb{N} \text{ ώστε } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$$
$$\subseteq \{x\in\mathbb{R}^d : \exists\ x_{v_n}\in K_{v_n},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ υπακολουθία ώστε } \lim x_{v_n} = x\}.$$

Έστω τώρα $x\in\mathbb{R}^d$ και $x_{v_n}\in K_{v_n}$ με $\lim x_{v_n} = x$

Έστω $m\in\mathbb{N}$.

Τότε $v_i\geq m$ για $i\geq m$ και $x_{v_i}\in K_{v_i}\subseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} K_n$ για $i\geq m$

Άρα $x\in\overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} K_n}$ για τυχαίο m

Άρα $x\in K$.

5

Παρατήρηση 1

Αν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία του $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ και

$$K = \{x\in\mathbb{R}^d : \exists\, x_n\in K_n,\ n\in\mathbb{N},\ \text{ώστε } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$$
$$= \{x\in\mathbb{R}^d : \exists\, x_{\nu_n}\in K_{\nu_n},\ (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ υπακολουθία ώστε } \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n} = x\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$$

ΔΕΝ συνεπάγεται ότι η $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Πράγματι, έστω $K_n = [0,1]\cup\{n\}$, $n\in\mathbb{N}$.
Τότε προφανώς $K = [0,1]$ και παραπάνω δύο ισότητες ισχύουν.
Όμως η (K_n) δεν συγκλίνει κατά Hausdorff.

Χειμ. Εξάμηνο 2014 | Θεώρημα Επιλογής Blaschke | ΚΥΡΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ | Γιώργος Βασδέκης AM 1112201100023

Έστω B συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε ο $(H(B), h)$ συμπαγής.

Απόδειξη

Αφού B συμπαγές $\Rightarrow$ B πλήρης μ. χ. $\Rightarrow$ $(H(B), h)$ πλήρης μ. χ.

Αρκεί να δείξουμε πως $(H(B), h)$ ολικά φραγμένος.

Ο B συμπαγής $\Rightarrow$ B ολικά φραγμένος.

Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists\, x_1, \dots, x_n \in B$ ώστε $B \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \hat{S}(x_k, \frac{\varepsilon}{4})$ άρα

$B = \bigcup_{k=1}^{n} (\hat{S}(x_k, \frac{\varepsilon}{4}) \cap B)$. Θέτουμε $C_k = \hat{S}(x_k, \frac{\varepsilon}{4}) \cap B$

Τότε C_k κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς B οπότε $C_k \in H(B)$.

Θεωρούμε $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των δυνατών ενώσεων των C_k, $k = 1, \dots, n$

$\mathcal{F} = \{ \bigcup_{i=1}^{m} C_{k_i},\ k_1, k_2, \dots, k_m \in \{1, \dots, k\},\ m \le k \}$. Το $\mathcal{F}$ αποτελείται από ενώσεις συμπαγών υποσυνόλων του B άρα $\mathcal{F} \subseteq H(B)$ και το $\mathcal{F}$ μπορεί να έχει το πολύ $2^n - 1$ στοιχεία δηλαδή είναι πεπερασμένο.

Θα δείξουμε ότι $H(B) \subseteq \bigcup_{D \in \mathcal{F}} S_h(D, \varepsilon)$ άρα $H(B)$ ολικά φραγμένος.

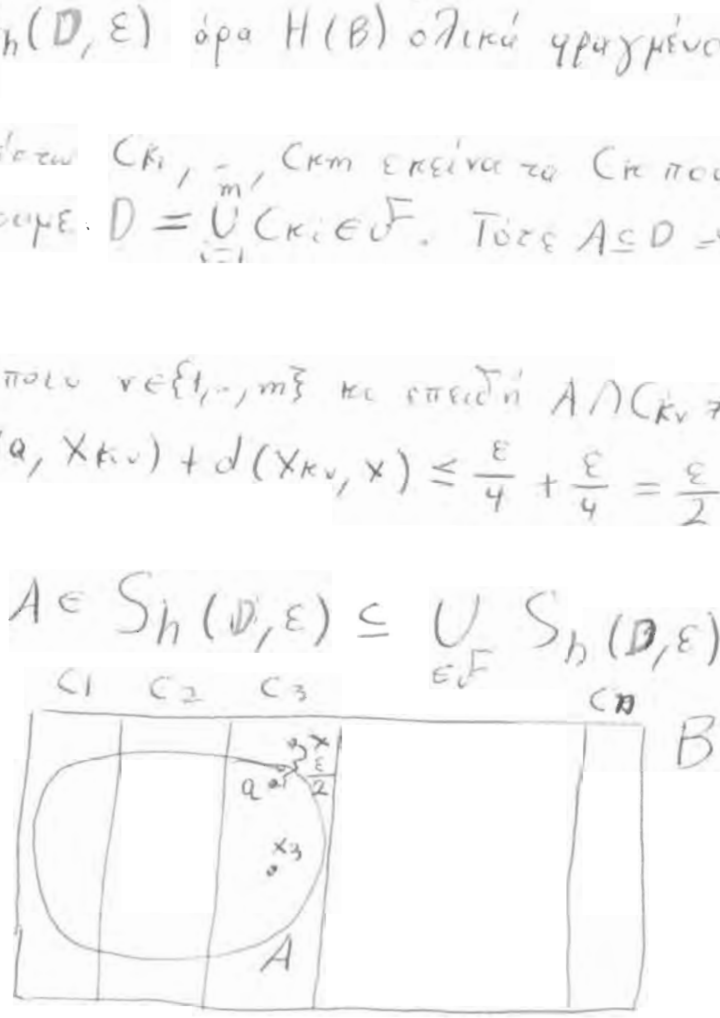
Έστω $A \in H(B)$ οπότε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} C_k$ και έστω $C_{k_1}, \dots, C_{k_m}$ εκείνα τα C_k που έχουν μη κενή τομή με το A. Θέτουμε $D = \bigcup_{i=1}^{m} C_{k_i} \in \mathcal{F}$. Τότε $A \subseteq D \Rightarrow$
$\Rightarrow A \subseteq \hat{S}(0,1) \frac{\varepsilon}{2} + D$.

Έστω $x \in D$, τότε $x \in C_{k_\nu}$ για κάποιο $\nu \in \{1, \dots, m\}$ κι επειδή $A \cap C_{k_\nu} \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists\, a \in A \cap C_{k_\nu}$ οπότε $d(a, x) \le d(a, x_{k_\nu}) + d(x_{k_\nu}, x) \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Δηλαδή $D \subseteq A + \frac{\varepsilon}{2} \hat{S}(0,1)$.

Άρα $h(D, A) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Άρα $A \in S_h(D, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{D \in \mathcal{F}} S_h(D, \varepsilon)$

Άρα $H(B) \subseteq \bigcup_{D \in \mathcal{F}} S_h(D, \varepsilon)$



Σημείωση

$S_h(D, \varepsilon) = \{ A \subseteq \mathbb{R}^d : h(A, D) < \varepsilon \}$

Παρατήρηση

Από το Θεώρημα του Blaschke έπεται ότι "Κάθε φραγμένη ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία".

Απόδειξη

Έστω A_n φραγμένη ακολουθία συμπαγών του $\mathbb{R}^d$, τότε $\exists M>0$:
$h(A_n,\{0\}) \leq M$ $\quad d(A_n,\{0\}) = \max_{a\in A_n} d(a,0) = \max_{a\in A_n}\|a\|$ και
$d(\{0\},A_n) = \min_{a\in A_n} d(a,0) = \min_{a\in A_n}\|a\|$. Άρα $h(A_n,\{0\}) = \max_{a\in A_n}\|a\|$

Άρα $\forall n, \forall a\in A_n \ \|a\|\leq M \Rightarrow \forall n \ A_n \subseteq S(0,M)$ συμπαγές
και το συμπέρασμα έπεται απ' το Blaschke

Ασκήσεις

1) Αν $A_n, B_n, A, B \in H(\mathbb{R}^d)$, $a_n, b_n, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ και $A_n \xrightarrow{h} A$, $B_n \xrightarrow{h} B$, $a_n \to a$, $b_n \to b$ τότε $a_nA_n + b_nB_n \xrightarrow{h} aA + bB$

Λύση

- Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $A_n \subseteq A + \varepsilon \hat{S}(0,1)$, $A \subseteq A_n + \varepsilon \hat{S}(0,1)$, $B_n \subseteq B + \varepsilon \hat{S}(0,1)$ και $B \subseteq B_n + \varepsilon \hat{S}(0,1)$. Άρα $A + B \subseteq A_n + B_n + 2\varepsilon \hat{S}(0,1)$ και $A_n + B_n \subseteq A + B + 2\varepsilon \hat{S}(0,1)$
$\Rightarrow H(A_n + B_n, A + B) \leq 2\varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Άρα $A_n + B_n \xrightarrow{h} A + B$.

- Ισχυρισμός 1: Αν $A, B \in H(\mathbb{R}^d)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $h(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| \, h(A,B)$.
Προκύπτει απ' το ότι $h(A,B) = \max\{\max\limits_{a \in A} \min\limits_{b \in B} d(a,b), \max\limits_{b \in B} \min\limits_{a \in A} d(a,b)\}$

- Ισχυρισμός 2: Αν $A \in H(\mathbb{R}^d)$, $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda_n A \xrightarrow{h} \lambda A$

Απόδειξη. Αφού A συμπαγές $\Rightarrow \exists r > 0$ $A \subseteq S(0,r)$ και αφού $\lambda_n \to \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$ $r \cdot |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$, άρα
$\forall n \geq n_0$ $\lambda_n A = ((\lambda_n - \lambda) + \lambda) A \subseteq (\lambda_n - \lambda) \cdot A + \lambda A \subseteq (\lambda_n - \lambda) \cdot S(0,r) + \lambda \cdot A$
$\subseteq S(0, r|\lambda_n - \lambda|) + \lambda A \subseteq S(0,\varepsilon) + \lambda A$ και όμοια
$\lambda A \subseteq S(0,\varepsilon) + \lambda_n \cdot A$ άρα $h(\lambda_n A, \lambda A) \leq \varepsilon \Rightarrow \lambda_n A \xrightarrow{h} \lambda A$

- Ισχυρισμός 3. Αν $A_n \to A$, $\lambda_n \to \lambda$ τότε $\lambda_n A_n \xrightarrow{h} \lambda A$.

Απόδειξη: $h(\lambda_n A_n, \lambda A) \leq h(\lambda_n A_n, \lambda_n A) + h(\lambda_n A, \lambda A) =$
$= |\lambda_n| \cdot h(A_n, A) + h(\lambda_n A, \lambda A) \to 0$ αφού $\lambda_n A \to \lambda A$ (από Ισχ 2) $A_n \to A$ και λ_n φραγμένη. ∎

Παρατήρηση

Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και $\varepsilon > 0$ τότε $A + \varepsilon \cdot \hat{S}(0,1)$ κυρτό

Απόδειξη

Έστω $x, y \in A + \varepsilon \hat{S}(0,1)$ και $\lambda \in (0,1)$ οπότε $\exists a, b \in A$ με $d(x,a), d(y,b) \leq \varepsilon$.
Τότε $d(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda a + (1-\lambda)b) = \| \lambda x + (1-\lambda)y - [\lambda a + (1-\lambda)b] \| \leq$
$\leq \lambda \cdot \|x - a\| + (1-\lambda)\|y - b\| \leq \lambda \varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon$ και επειδή A κυρτό $\lambda a + (1-\lambda)b \in A$

Οπότε $\lambda x+(1-\lambda)y \in A+\varepsilon \hat{S}(0,1)$. ∎

2) α) Αν $A,B\in H(\mathbb{R}^d)$ τότε $h(\operatorname{con}A,\operatorname{con}B)\le h(A,B)$

b) Αν $A_n\in H(\mathbb{R}^d)$ κυρτά και $A_n \xrightarrow{h} A$ τότε A κυρτό.

Λύση

α) Έστω $\varepsilon=h(A,B)$ άρα $A\subseteq B+\varepsilon\hat{S}(0,1)$, $B\subseteq A+\varepsilon \hat{S}(0,1)$

Επειδή $A\subseteq \operatorname{con}A$ έπεται $A\subseteq \operatorname{con}B+\varepsilon\hat{S}(0,1)$, $B\subseteq \operatorname{con}A+\varepsilon\hat{S}(0,1)$ και άρα απ' την προηγούμενη παρατήρηση $\operatorname{con}A\subseteq \operatorname{con}B+\varepsilon\hat{S}(0,1)$, $\operatorname{con}B\subseteq\operatorname{con}A+\varepsilon\hat{S}(0,1)$

Άρα $h(\operatorname{con}A,\operatorname{con}B)\le\varepsilon=h(A,B)$.

b) Έστω A_n κυρτά $A_n\to A$. Τότε $A_n=\operatorname{con}A_n$ άρα

$h(A_n,\operatorname{con}A)=h(\operatorname{con}A_n,\operatorname{con}A)\overset{a)}{\le} h(A_n,A)\to 0$ οπότε $A_n\to\operatorname{con}A$

Από μοναδικότητα ορίου $A=\operatorname{con}A$ οπότε A κυρτό. ∎

Παρατήρηση

Έστω $H_c(X)=\{K\subseteq X,\ K$ συμπαγή και κυρτά$\}$.

Τότε ο χώρος $H_c(\mathbb{R}^d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος αφού απ' το 2b) είναι κλειστός (ως προς Hausdorff) υπόχωρος του πλήρους $H(\mathbb{R}^d)$

Ακόμη αν $K\subseteq\mathbb{R}^d$ συμπαγής τότε $H_c(K)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος ως κλειστός υπόχωρος του συμπαγούς (λόγω Blaschke) $H(K)$. ∎

Στον πλήρη μετρικό χώρο $Hc(\mathbb{R}^d)$ τα πολύτοπα είναι πυκνά.

3) Έστω $K\in Hc(\mathbb{R}^d)$, τότε $\forall \varepsilon>0\ \exists P$ πολύτοπο με $h(K,P)<\varepsilon$.

<u>Λύση</u>

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists x_1,\dots,x_n\in K$: $K\subseteq \hat{S}(x_1,\varepsilon)\cup\dots\cup\hat{S}(x_n,\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow K\subseteq\{x_1,\dots,x_n\}+\varepsilon\cdot\hat{S}(0,1)$. Αφού K κυρτό έπεται

$P=\mathrm{conv}\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq K\subseteq P+\varepsilon\ \hat{S}(0,1)\Rightarrow h(K,P)\leq\varepsilon$.

4) Υπάρχει κλειστός τύπος για την απόσταση 2 σφαιρών

$h(\hat{S}(x,R),\hat{S}(y,r))=\|x-y\|+|R-r|$, $x,y\in\mathbb{R}^d$.

<u>Λύση</u>

Έστω $R>r$ τότε

$\hat{S}(y,r)=\hat{S}(x,r)+y-x\subseteq\hat{S}(x,R)+\|y-x\|\cdot\hat{S}(0,1)\subseteq\hat{S}(x,R)+(|R-r|+\|x-y\|)\hat{S}(0,1)$

Ακόμη $\hat{S}(x,R)=\hat{S}(x,r)+\hat{S}(0,R-r)=\hat{S}(y,r)+x-y+|R-r|\cdot\hat{S}(0,1)\subseteq$

$\subseteq\hat{S}(y,r)+(\|x-y\|+|R-r|)\cdot\hat{S}(0,1)$

Οπότε $\varepsilon=h(\hat{S}(0,R),\hat{S}(0,r))\leq\|x-y\|+|R-r|$.

Θέτουμε $z\in S(x,R)$ με $\|x-y\|+R=\|z-y\|$.

$\hat{S}(x,R)\subseteq\hat{S}(y,r)+\varepsilon\ \hat{S}(0,1)$ οπότε $z\in\hat{S}(y,r)+\varepsilon\ \hat{S}(0,1)$

άρα $\|z-y\|\leq r+\varepsilon\Rightarrow\|x-y\|+R\leq r+\varepsilon\Rightarrow\|x-y\|+|R-r|\leq\varepsilon$

Άρα $\varepsilon=\|x-y\|+|R-r|$.

5) Μια ακολουθία σφαιρών αν συγκλίνει, συγκλίνει σε σφαίρα

<u>Λύση</u>

Έστω $x_n\in\mathbb{R}^d$, $r_n>0$: $\hat{S}(x_n,r_n)\xrightarrow{h}A$. Τότε η $\{\hat{S}(x_n,r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Hausdorff-φραγμένη άρα $\exists M>0$: $h(\hat{S}(x_n,r_n),\hat{S}(0,1))\leq M\ \forall n$.

Άρα απ' την 4) $\|x_n\|+|r_n-1|\leq M\Rightarrow\{x_n\},\{r_n\}$ φραγμένες

Άρα $\exists\, x_{k_n}\to x\in\mathbb{R}^d$, $r_{k_n}\to r\geq 0$

Τότε $h(\hat{S}(x_{k_n},r_{k_n}),\hat{S}(x,r))=\|x_{k_n}-x\|+|r_{k_n}-r|\to 0$ άρα $\hat{S}(x_{k_n},r_{k_n})\xrightarrow{h}\hat{S}(x,r)$

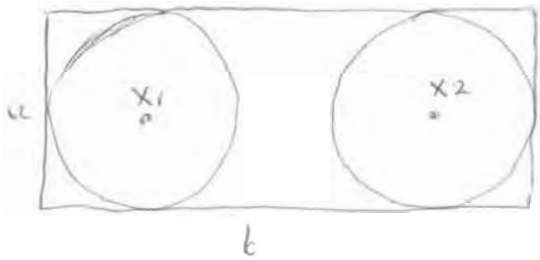
και $\hat{S}(x_{k_n},r_{k_n})\xrightarrow{h}A$. Οπότε $A=\hat{S}(x,r)$.

6) Έστω K κυρτό, συμπαγές και $K^\circ \neq \emptyset$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε το K περιέχει τουλάχιστον 1 σφαίρα μέγιστης διαμέτρου (ως προς το να περιέχεται στο K) και περιέχεται σε ακριβώς 1 σφαίρα ελάχιστης διαμέτρου (ως προς το να περιέχει το K).

Λύση

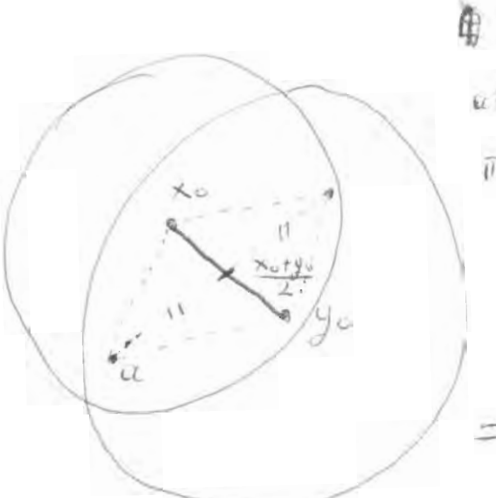
• Έστω $I=\{r>0: \exists x\in K: \hat{S}(x,r)\subseteq K\}\neq\emptyset$ αφού $K^\circ\neq\emptyset$, άνω φραγμένο αφού K συμπαγές άρα $\exists r_0=\sup I>0$. Άρα $\exists r_n\in I: r_n\to r_0$ άρα $\exists x_n\in K$ με $\hat{S}(x_n,r_n)\subseteq K$. Επειδή K συμπαγές $\exists x_{k_n}\to x_0\in K$ και απ' την 5) έπεται $\hat{S}(x_{k_n},r_{k_n})\xrightarrow{h}\hat{S}(x_0,r_0)$. Από Blaschke το $H(K)$ συμπαγές άρα κλειστό και αφού $\hat{S}(x_{k_n},r_{k_n})\in H(K)\Rightarrow \hat{S}(x_0,r_0)\in H(K)$ δηλαδή $\hat{S}(x_0,r_0)\subseteq K$. Απ' τον ορισμό του r_0 η διάμετρος είναι μέγιστη.

• Η σφαίρα αυτή δεν είναι απαραίτητα μοναδική, π.χ.



• Έστω $J=\{R>0: \exists x\in K: K\subseteq \hat{S}(x,R)\}\neq\emptyset$ αφού K φραγμένο και άρα $\exists R_0=\inf J$. Όπως πριν βρίσκουμε $K\subseteq \hat{S}(x_n,R_n)$ με $\hat{S}(x_n,R_n)\xrightarrow{h}\hat{S}(x_0,R_0)$. Έστω ότι $K\nsubseteq \hat{S}(x_0,R_0)$ άρα $\exists k\in K$ με $\varepsilon=d(\hat{S}(x_0,R_0),k)>0$ αλλά $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0$ $\hat{S}(x_n,R_n)\subseteq \hat{S}(x_0,R_0)+\frac{\varepsilon}{2}\hat{S}(0,1)$ και $K\subseteq\hat{S}(x_n,R_n)$. Άρα $K\subseteq \hat{S}(x_0,R_0)+\frac{\varepsilon}{2}\hat{S}(0,1)\Rightarrow k\in \hat{S}(x_0,R_0)+\frac{\varepsilon}{2}\hat{S}(0,1)\Rightarrow$ $\Rightarrow \varepsilon=d(k,\hat{S}(x_0,R_0))\leq\frac{\varepsilon}{2}$ άτοπο. Άρα $K\subseteq\hat{S}(x_0,R_0)$ και απ' τον ορισμό του R_0 δεν μπορούμε να πετύχουμε μικρότερη διάμετρο.

• Έστω άλλη σφαίρα $\hat{S}(y_0,R_1)$ με την ίδια ιδιότητα με την $\hat{S}(x_0,R_0)$. Τότε αναγκαστικά $R_0=R_1$. Έστω ότι $x_0\neq y_0$.



Έστω $a\in K$, επειδή ο $\mathbb{R}^d$ είναι Hilbert απ' τον κανόνα του παραλληλογράμμου (σχήμα) παίρνουμε:

$$\left\|2\cdot\left(a-\frac{x_0+y_0}{2}\right)\right\|^2+\|x_0-y_0\|^2 = 2\cdot\|a-x_0\|^2+2\|a-y_0\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|a-\frac{x_0+y_0}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|a-x_0\|^2+\frac{1}{2}\|a-y_0\|^2-\frac{1}{4}\|x_0-y_0\|^2.$$

Αλλά $K\subseteq \hat{S}(x_0,R_0), \hat{S}(y_0,R_0)$ οπότε $\|a-x_0\|, \|a-y_0\|\le R_0$.

Άρα $\left\|a-\frac{x_0+y_0}{2}\right\|^2 \le \frac{1}{2}R_0^2+\frac{1}{2}R_0^2-\frac{1}{4}\|x_0-y_0\|^2 = R_0^2-\frac{1}{4}\|x_0-y_0\|^2$

Άρα $a\in \hat{S}\left(\frac{x_0+y_0}{2}, \sqrt{R_0^2-\frac{1}{4}\|x_0-y_0\|^2}\right)$ οπότε $K\subseteq \hat{S}\left(\frac{x_0+y_0}{2}, \sqrt{R_0^2-\frac{1}{4}\|x_0-y_0\|^2}\right)$

Αλλά K κυρτό $\Rightarrow \frac{x_0+y_0}{2}\in K$ και $\sqrt{R_0^2-\frac{1}{4}\|x_0-y_0\|^2}\le R_0$ άτοπο απ' τον ορισμό του R_0. Οπότε $x_0=y_0$. Άρα η σφαίρα είναι μοναδική.

7) Αν $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$, $x\in\mathbb{R}^d$ τότε $h(A,B)=h(x+A,x+B)$.

Λύση

Άμεση απ' τον ορισμό της h

Υπενθύμιση

Αν $A\in H_c(\mathbb{R}^d)$ ορίζουμε $h_A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ με $h_A(u)=\max\limits_{x\in A}\langle u,x\rangle$.

Παρατήρηση

Αν $A,B\in H_c(\mathbb{R}^d)$ τότε $A\subseteq B \Leftrightarrow h_A(u)\le h_B(u)\ \forall \|u\|=1$.

Απόδειξη

$\Rightarrow$) $A\subseteq B$ άρα $\forall \|u\|=1$ $\sup\limits_{x\in A}\langle x,u\rangle \le \sup\limits_{x\in B}\langle x,u\rangle \Rightarrow h_A(u)\le h_B(u)$

$\Leftarrow$) Έστω ότι $A\not\subseteq B$ άρα $\exists a\in A$ με $a\notin B$. Τότε $\exists$ $P_B(a)\in B$, και $P_B(a)\neq a$

Θέτουμε $u=\frac{a-P_B(a)}{\|a-P_B(a)\|}$, $\|u\|=1$

Έστω $x \in B$, τότε $\langle u, x - P_B(a) \rangle = \langle \frac{a - P_B(a)}{\|a - P_B(a)\|}, x - P_B(a) \rangle =$
$= \frac{1}{\|a - P_B(a)\|} \cdot \langle a - P_B(a), x - P_B(a) \rangle \leq 0$.

Άρα $\forall x \in B$ $\langle u, x \rangle \leq \langle u, P_B(a) \rangle$ και $P_B(a) \in B$ οπότε

$\langle u, P_B(a) \rangle = \max\limits_{x \in B} \langle u, x \rangle = h_B(u) \geqslant h_A(u) \geqslant \langle u, a \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle u, a - P_B(a) \rangle \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{\|a - P_B(a)\|} \cdot \|a - P_B(a)\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|a - P_B(a)\| = 0$
$\Rightarrow a = P_B(a)$ άτοπο. Οπότε $A \subseteq B$.

Υπενθύμιση

Αν $A, B \in H_c(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \geqslant 0$ τότε $h_{A+B}(u) = h_A(u) + h_B(u)$, $h_{\lambda A}(u) = \lambda h_A(u)$

8) Έστω $A, B \in H_c(\mathbb{R}^d)$ τότε $h(A,B) = \max\limits_{\|u\|=1} \{ |h_A(u) - h_B(u)| \}$

Λύση

Έστω $a = h(A,B) \geqslant 0$. Τότε $A \subseteq B + a\,\hat{S}(0,1)$. Έστω $\|u\| = 1$ τότε
$h_A(u) \leq h_{B + a \cdot \hat{S}(0,1)}(u) = h_B(u) + a \cdot h_{\hat{S}(0,1)}(u) = h_B(u) + a \cdot 1 = h_B(u) + a$
Συμμετρικά $h_B(u) \leq h_A(u) + a$. Άρα $\max\limits_{\|u\|=1} \{ |h_B(u) - h_A(u)| \} = b \leq a$.
Έστω $\|u\| = 1$ άρα $|h_B(u) - h_A(u)| \leq b \Rightarrow h_A(u) \leq b + h_B(u) \Rightarrow$
$\Rightarrow h_A(u) \leq b \cdot h_{\hat{S}(0,1)}(u) + h_B(u) = h_{B + b \cdot \hat{S}(0,1)}(u)$. Άρα $A \subseteq B + b\,\hat{S}(0,1)$.
Συμμετρικά $B \subseteq A + b\,\hat{S}(0,1)$. Άρα $a \leq b$. Άρα $a = b$.

9) Αν $A, B, C \in H_c(\mathbb{R}^d)$ και $A + C \subseteq B + C$ τότε $A \subseteq B$

Λύση

Έστω $u \in \mathbb{R}^d$, $\|u\| = 1$ $A + C \subseteq B + C \Rightarrow h_{A+C}(u) \leq h_{B+C}(u) \Rightarrow$
$\Rightarrow h_A(u) + h_C(u) \leq h_B(u) + h_C(u) \Rightarrow h_A(u) \leq h_B(u)$ $\forall \|u\| = 1 \Rightarrow A \subseteq B$

10) Αν $A, B \in Hc(\mathbb{R}^d)$ τότε για $\varepsilon > 0$ $h(A,B) = h(A+\varepsilon\hat{S}(0,1), B+\varepsilon\hat{S}(0,1))$

[Αν τα "φουσκώσουμε" κατά την ίδια ποσότητα, διατηρούν την απόσταση]

Λύση

Έστω $\gamma = h(A,B)$, $\delta = h(A+\varepsilon\hat{S}(0,1), B+\varepsilon\hat{S}(0,1))$

Τότε $A \subseteq \gamma\hat{S}(0,1)+B \Rightarrow A+\varepsilon\hat{S}(0,1) \subseteq B+\varepsilon\hat{S}(0,1)+\gamma\hat{S}(0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta \leq \gamma$

Ακόμη $A+\varepsilon\hat{S}(0,1) \subseteq B+\varepsilon\hat{S}(0,1)+\delta\hat{S}(0,1)$ και

A, $B+\delta\hat{S}(0,1)$, $\varepsilon\hat{S}(0,1)$ κυρτά. Άρα από την 9) $A \subseteq \delta\hat{S}(0,1)+B$.

Οπότε $\gamma \leq \delta$. Άρα $\gamma = \delta$.

Παρατήρηση

Στην άσκηση 8) δείξαμε πως για να αποδειχθεί ότι $A_n \xrightarrow{h} A$ ισοδύναμα αρκεί να αποδειχθεί πως $h_{A_n} \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} h_A$ στο $bd(S(0,1))$

Θεώρημα

Έστω $V_d : Hc(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$ η συνάρτηση του όγκου. Η V_d είναι συνεχής ως προς την Hausdorff ($K_n \xrightarrow{h} K \Rightarrow V_d(K_n) \to V_d(K)$).

Απόδειξη

Επειδή η Hausdorff και η V_d είναι αναλλοίωτες ως προς τις μετατοπίσεις και $ri(K) \neq \emptyset$ μπορούμε να υποθέσουμε πως $0 \in ri(K)$

1η Περίπτωση: $K^o \neq \emptyset$ άρα $\dim K = d$ και $V_d(K) > 0$ και με κατάλληλη μετατόπιση $0 \in K^o$. Έστω $\hat{S}(0,r) \subseteq K$ και $\varepsilon > 0$, $(r > 0)$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $K_n \subseteq K + \hat{S}(0,r)\cdot\frac{\varepsilon}{r} \subseteq K + \frac{\varepsilon}{r}\cdot K \overset{K \text{ κυρτό}}{=} (\frac{\varepsilon}{r}+1)\cdot K$

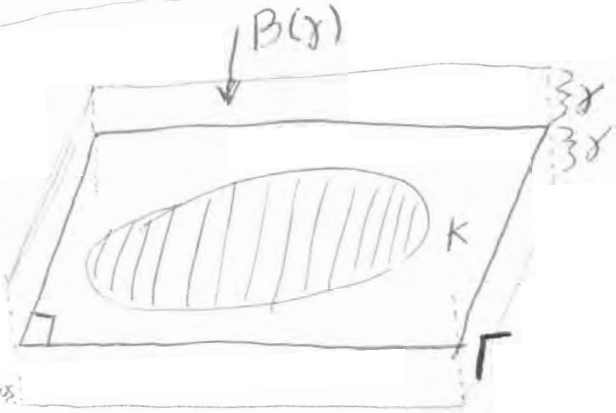
Ακόμη $(1-\frac{\varepsilon}{r})\cdot K + \frac{\varepsilon}{r} K = K \subseteq K_n + \frac{\varepsilon}{r}\cdot\hat{S}(0,r) \subseteq K_n + \frac{\varepsilon}{r}\cdot K$.

Από Άσκηση 9 $(1-\frac{\varepsilon}{r})\cdot K \subseteq K_n \subseteq (1+\frac{\varepsilon}{r})\cdot K$.

Άρα $V_d((1-\frac{\varepsilon}{r})K) \leq V_d(K_n) \leq V_d((1+\frac{\varepsilon}{r})K) \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-\frac{\varepsilon}{r})^d \cdot V_d(K) \leq V_d(K_n) \leq (1+\frac{\varepsilon}{r})^d \cdot V_d(K)$. $\forall n \geq n_0$.

Άρα $\lim_{n\to\infty} V_d(K_n) = V_d(K)$.



<u>2η Περίπτωση</u> $K^\circ = \emptyset \Rightarrow V_d(K) = 0$.

Τότε $\dim \mathrm{Aff}\, K \leq d-1$.

Έστω $K \subseteq H$ όπου H $(d-1)$-διάστατος υπόχωρος

και έστω Γ ορθογώνιο ώστε $K + B_H(0,1) \subseteq \Gamma$ (όπου $B_H(0,1)$ ο περιορισμός της $\hat{S}(0,1)$ στον H)

Έστω $\varepsilon > 0$, θέτουμε $0 < \gamma < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2 \cdot V_{d-1}(\Gamma)}\right\}$

και έστω $B(\gamma) = \{x + t \cdot u : x \in \Gamma, \|t\| \leq \gamma\}$ όπου $u \perp H$, $\|u\| = 1$

Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $K_n \subseteq K + \gamma \cdot \hat{S}(0,1)$. Όμως $K + \gamma \hat{S}(0,1) \subseteq B(\gamma)$

Έτσι $\forall n \geq n_0$ $K_n \subseteq B(\gamma)$ οπότε $V_d(K_n) \leq V_d(B(\gamma)) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_d(K_n) \leq 2 \cdot \gamma \cdot V_{d-1}(\Gamma) < \varepsilon$.

Άρα $\lim_{n\to\infty} V_d(K_n) = 0 = V(K)$.