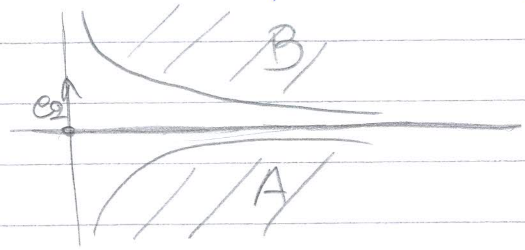
M-15

Σημείωση: Δείξαμε ότι αν $A,B \subseteq X =$ χ. Hilbert, κυρτά $A\cap B=\emptyset$ A συμπαγές, B κλειστό διαχωρίζονται αυστηρά. Ισχύει σε γενικότερους χώρους (Τοπικά κυρτούς τ.δ.χ. Θ. Hahn-Banach χρ: Αναλυτική μορφή H-B).

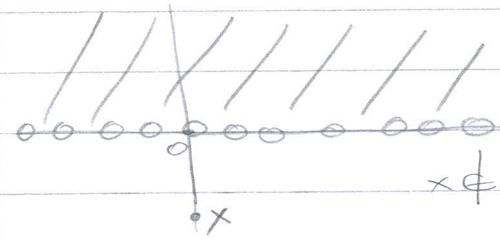
Ερώτημα: Εάν $A,B \subseteq X =$ χ.H. $A\cap B=\emptyset$ κυρτά κλειστά μήπως διαχωρίζονται με "ελαφρότερο" τρόπο;

$\exists u\in X,\ \|u\|=1 \quad \sup_{a\in A}\langle a,u\rangle \le \inf_{b\in B}\langle b,u\rangle$



Για $u=e_2$

$\sup_{a\in A}\langle a,u\rangle = 0 = \inf_{b\in B}\langle b,u\rangle$



$B-A=K$

$0\notin B-A$

$x\notin K$ και $0=p_K(x)$

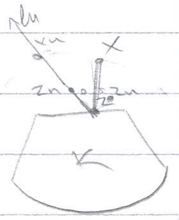
Αν ~~z~~ $z\in\partial K$, K κυρτό, $z\notin K$ εάν $\exists x: z=p_K(x)$ $x\notin \hat{K}$;

Αν $\dim X=+\infty$ δεν ισχύει ούτε αυτό

Υπερεπίπεδο Στήριξης (Φέρουσα) Διαχ. Θ. στον $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$

– Τι διαφοροποιεί / χαρακτηρίζει τον $\mathbb{R}^d$ από ένα χ. Hilbert X, $\dim X=+\infty$;

- $B(0,1)$ κλειστό + φραγμένο
  - στον $\mathbb{R}^d$ συμπαγές
  - στον X, $\dim X=+\infty$ δεν είναι συμπαγές.
- Αν K κυρτό
  - στον $\mathbb{R}^d$ $\mathrm{ri}K\neq\emptyset$
  - στον X $\dim X=+\infty$ μπορεί $K^\circ=\emptyset$



Θεώρημα: K κυρτό + συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^d$, $K^\circ \neq \emptyset$, $K \subseteq S(0,r)$. Τότε $p_K : bd\,S(0,r) \to bd\,K$ είναι επί.

Απόδειξη:

Έστω $z \in bd\,K$. Άρα $\exists\, z_n \notin K,\ z_n \in S(0,r) : z_n \to z$

p_K συνεχής $\Rightarrow p_K(z_n) \to p_K(z) \overset{z\in K}{=} z$

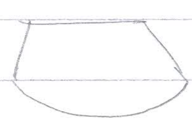
$l_n = \{p_K(z_n) + t(z_n - p_K(z_n))\ t \geq 0\}$

$\{x_n\} = l_n \cap bd\,S(0,r)$, $\|x_n\| = r$

$bd\,S(0,r) =$ συμπαγές στον $\mathbb{R}^d \Rightarrow \exists\, x_{k_n} \to x \in bd\,S(0,r)$

$p_K(x_n) = p_K(z_n) \to z$

$$\left.\begin{array}{l} p_K(x_{k_n}) \to z \\ p_K(x_{k_n}) \to p_K(x) \end{array}\right\} \text{ Άρα } \exists\, x \in bd\,S(0,r) : z = p_K(x)$$



Πόρισμα: Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim K = d$, K κυρτό + συμπαγές τότε $\lambda_d(bd\,K) = 0$

Απόδειξη:

$K \subseteq \Pi = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d)$

$\lambda_d(bd\,\Pi) = 0$

$p_K : bd\,\Pi \to bd\,K$ επί $\Rightarrow p_K(bd\,\Pi) = bd\,K$

και p_K Lip-συν $\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|$ $x, y \in \mathbb{R}^d$

$0 \leq \lambda_d(bd\,K) = \lambda_d(p_K(bd\,\Pi)) \leq \lambda_d(bd\,\Pi) = 0.$

Ορισμός (Υπερεπίπεδο Στήριξης): $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $H(u,c)$ υπ. στήριξης στο $a_0 \in A \Leftrightarrow$

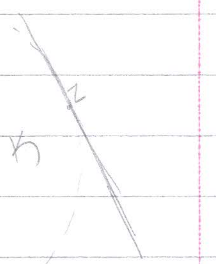
(i) $\langle a_0, u \rangle = c$

(ii) $\langle a, u \rangle \leq c$, $a \in A$

(iii) $A \not\subseteq H(u,c)$

30/ **Θεώρημα:** K = κυρτό, $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim K \leq d$, $z \in bd\,K$. Τότε $\exists\, H(u,c)$ υπερ. στήριξης του K στο z.

Απόδειξη:



$ri\,K \neq \emptyset$

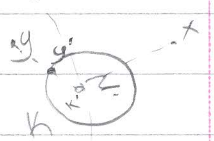
$ri\,\bar{K} = ri\,K$, $rbK = rb\bar{K}$ (ασκ. IV)

ΧΒΓ $\dim K = d$ $z \in rbK$, K = κλειστό

$K' = K \cap B(z,1)$ – κυρτό + συμπαγές

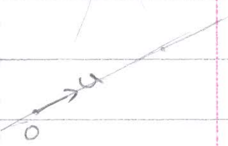
$K' \subseteq S(0,r)$ $\exists x \in bd\,S(0,r)$ ώστε $z = p_{K'}(x)$.

$u = \frac{x-z}{\|x-z\|}$, $c = \langle z,u \rangle$.



$\langle y',u \rangle \le c$, $y' \in K'$

Ισχυρισμός 1: $p_{K'}(x) = p_K(x) = z$



Έστω $y \in K$: $\|y-z\| > 1$, $y \notin K'$

$y' = z + \frac{y-z}{\|y-z\|} \in K$

$0 \ge \langle y'-z, x-z \rangle = \langle \frac{y-z}{\|y-z\|}, x-z \rangle = \frac{1}{\|y-z\|} \langle y-z, x-z \rangle$

Άρα $\langle y-z, x-z \rangle$ $\forall y \in K$, $z = p_K(x)$

$\langle y,u \rangle = \langle y-z,u \rangle + \langle z,u \rangle \le \langle z,u \rangle + 0 = c$

Ορισμός: $A,B \subseteq \mathbb{R}^d$, $A,B \neq \emptyset$ διαχωρίζονται γνήσια $\iff$ $\exists u \in \mathbb{R}^d$, $\|u\|=1$, $c \in \mathbb{R}$

$\sup_{a \in A} \langle a,u \rangle \le c \le \inf \langle b,u \rangle$ ή αντίθετα

και $A \not\subseteq H(u,c)$ ή $B \not\subseteq H(u,c)$

Θεωρήματα:

(i) K κυρτό , $\dim K = v$, $x \notin K$ τότε $\{x\}, K$ διαχ. γνήσια.

(ii) A, B κυρτά , $riA \cap riB = \emptyset$ τότε A,B διαχ. γνήσια.

Απόδειξη:

(i) $x \notin K$ < $x \notin \bar{K}$ = κυρτό + κλ. $\{x\}, K$ διαχ. αυστηρά
$x \in K$, $x \in bdK$: $\exists \|u\|=1$, $c \in \mathbb{R}$

$\sup_{y \in K} \langle y,u \rangle \le c < \langle x,u \rangle$, $K, \{x\}$ διαχ. γν.

(ii) Αναλογο (Θ. Αυσ. Διαχ).