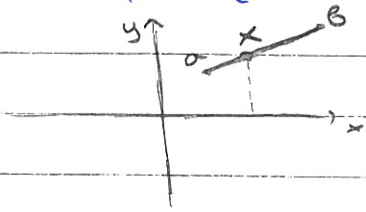
ΚΥΡΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κυρτό σύνολο - Κυρτές συναρτήσεις

Ορισμός: Έστω $a,b\in\mathbb{R}^d$, ορίζουμε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα a,b το $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}^d : x=(1-\lambda)a+\lambda b,\ \lambda\in[0,1]\}$.

πχ $d=1$ $\quad [a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$

$d\geq 2$

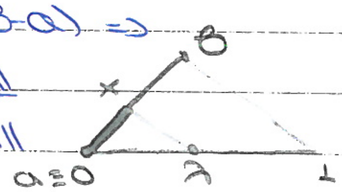


$x=(1-\lambda)a+\lambda b,\ \lambda\in(0,1)$

$x=a+\lambda(b-a) \iff$

$x-a=\lambda(b-a) \implies$

$\lambda=\dfrac{\|x-a\|}{\|b-a\|}$



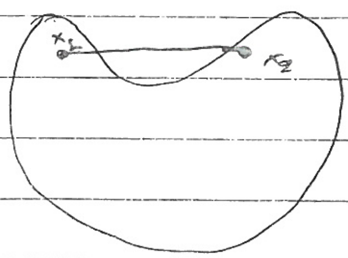
και $1-\lambda=\dfrac{\|b-x\|}{\|b-a\|}$

Τελευταία ισοδυναμία κέντρο βάρους

Ορισμός: Ένα $K\subseteq\mathbb{R}^d$ κυρτό αν και μόνο αν $x_1,x_2\in K$, $\lambda\in[0,1]$ τότε $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in K \iff$ $x_1,x_2\in K$ τότε $[x_1,x_2]\subseteq K \iff x_1,x_2\in K$, $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ $\lambda_1+\lambda_2=1$ τότε $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\in K$.

- Εάν $K=\emptyset$ ορίζουμε K κυρτό.

πχ Ευθείες, σημείο, κύκλος, τρίγωνα, τραπέζια, κύβοι, ελλειψοειδή $\rightsquigarrow$ κυρτά σύνολα



$\rightsquigarrow$ μη κυρτό σύνολο

Ασκήσεις 1:

(1) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$, I κυρτό $\Leftrightarrow$ I διάστημα
(I = διάστημα $\Leftrightarrow$ $\alpha, \beta \in I$ με $\alpha < \beta$ και $\alpha < x < \beta$ έχουμε $x \in I$).

(2)(i) $(K_i)_{i \in I}$ οικογένεια κυρτών συνόλων $\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} K_i$ είναι κυρτό

(ii) A, B κυρτά $\not\Rightarrow$ $A \cup B$ είναι κυρτό

(iii) Αν $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτά τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ κυρτό.

(3) Εάν K κυρτό $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x_0 + \lambda K$ κυρτό

Πρόταση: Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $K \neq \emptyset$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) K κυρτό

(ii) $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ έχουμε ότι $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in K$

Απόδειξη:

(ii) $\Rightarrow$ (i) Προφανές για $n=2$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Για $n=2$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n \geq 2$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $(n+1)$ σημεία του K.

$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$, $x_i \in K$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$

Αν $\lambda_{n+1} = 1$ $x = x_{n+1} \in K$.

Αν $\lambda_{n+1} < 1$ $x = (1 - \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$

$y = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n$, $x_i \in K$, $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} \geq 0$ και

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ Άρα από Ε.Υ. $y \in K$, και

$x = (1-\lambda_{n+1}) y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ και $x, y \in K$, $1-\lambda_{n+1}, \lambda_{n+1} \geq 0$

και $(1-\lambda_{n+1})+\lambda_{n+1}=1$ και K κυρτό άρα $x\in K$.

Κυρτός συνδυασμός - κυρτή θήκη

Ορισμός: Έστω $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}^d$, $x=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n$, $\lambda_i\geq 0$, $\lambda_1+\dots+\lambda_n=1$ το x ονομάζεται κυρτός συνδυασμός των $x_1,x_2,\dots,x_n$

Ορισμός: Έστω $A\neq\emptyset$ $A\subseteq\mathbb{R}^d$. Ορίζουμε $\mathrm{conv}A=\cap\{K: K\supseteq A,\ K=\text{κυρτό}\}$ την κυρτή θήκη του A και είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το A.

Ασκήσεις 2.

(1) Αν $A\subseteq B\Rightarrow \mathrm{conv}A\subseteq\mathrm{conv}B$

(2) K κυρτό $\Leftrightarrow K=\mathrm{conv}K$

Υπόδειξη: $B=\{\dots\}$ $\mathrm{conv}A\subseteq B$ + πρόταση.

Πρόταση: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^d$, $A\neq\emptyset$. Τότε $\mathrm{conv}A=\{x\in\mathbb{R}^d: \exists x_1,\dots,x_n\in A,\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\geq 0\ \ \lambda_1+\dots+\lambda_n=1,\ x=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n\}$

Ασκήσεις 3:

(1) $\mathrm{conv}(x_0+\lambda A)=x_0+\lambda\,\mathrm{conv}A$, $A\subseteq\mathbb{R}^d$, $x_0\in\mathbb{R}^d$, $\lambda\in\mathbb{R}$

(2) $P(z)=a_nz^n+\dots+a_1z+a_0$, $a_i\in\mathbb{C}$, $a_n\neq 0$, $z\in\mathbb{C}$ Δ.ο. οι ρίζες της εξίσωσης $P'(z)=0$ ανήκουν στην κυρτή θήκη των ριζών της εξίσωσης $P(z)=0$ (Θεώρημα Gauss-Lucas)

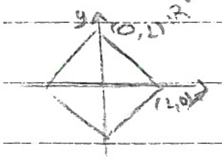
Ασκήσεις 4:

(1) $(\mathbb{R}^d,\|\cdot\|)$, $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^d: \|x-x_0\|\leq r\}$, $r>0$ Δ.ο.

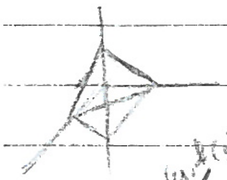
(i) $B(x_0,r)$ κυρτό.

(ii) $B(x_0,r)=x_0+rB(0,1)$

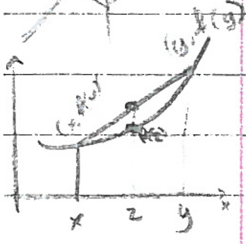
(iii) $B(0,1)=\mathrm{conv}(\mathrm{bd}B(0,1))$, $\mathrm{bd}B(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^d: \|x\|=1\}$.



(2) $B_1(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^d,\ x=(a_1,\dots,a_d) : \sum_{i=1}^{d}|a_i|\le 1\} = \mathrm{co}\{\pm\vec{e_i},\ i=1,\dots,d\}$.



Κυρτές Συναρτήσεις:



Ορισμός: Έστω $f:K\to\mathbb{R}$, $K\neq\emptyset$, K κυρτό $K\subseteq\mathbb{R}^d$. Η f καλείται κυρτή αν για κάθε $x,y\in K$, $\lambda\in[0,1]$
$f((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$

- Η f ονομάζεται κοίλη αν η $-f$ είναι κυρτή.

SOS
Πρόταση (Ανισότητα Jensen): Έστω $f:K\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Έστω $x_1,\dots,x_n\in K$, $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$. Τότε
$f(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\dots+\lambda_nf(x_n)$

Ασκήσεις 5:

(1)(i) Έστω $T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ γραμμική. Δ.ο. η T είναι κυρτή.

(ii) Αν $a\in\mathbb{R}$, $g(x)=a+T(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$ τότε η g είναι κυρτή.

(2) $f,g:K\to\mathbb{R}$ κυρτές Ν.δ.ο. $f+g$ κυρτή, λf κυρτή με $\lambda\ge 0$.

(3) $f:K\to\mathbb{R}$, $K\subseteq\mathbb{R}^d$ θεωρούμε το $\mathrm{epi}f=\{(x,t)\in K\times\mathbb{R} : t\ge f(x)\}$ ~ επιγράφημα. Δ.ο. f κυρτή $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}f$ κυρτό σύνολο.

(4) Έστω $(f_i)_{i\in I}$, $f_i:K\to\mathbb{R}$, $i\in I$ κυρτές, υποθέτουμε ότι $\{f_i(x) : i\in I\}$ είναι άνω φραγμένο $\forall x\in K$. Ν.δ.ο. $f(x)=\sup\{f_i(x) : i\in I\}$ είναι κυρτή.

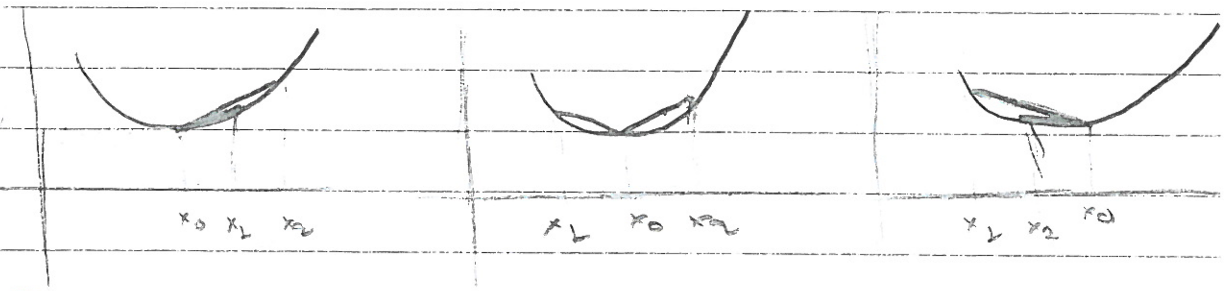
(5) Έστω $f:K\to\mathbb{R}$ κυρτή, $x_0\in K$ τοπικό ελάχιστο. Τότε το x_0 είναι ολικό ελάχιστο.

(6) Έστω $f:K\to\mathbb{R}$ κυρτή, K ανοιχτό και $f(x_0)\ge f(x)$ $\forall x\in K$. Δ.ο. $f(x)=f(x_0)$ $\forall x\in K$.

Κυρτή Συνάρτηση μιας Μεταβλητής

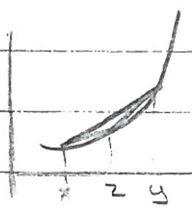
Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, I = διάστημα $\subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ορίζω $g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in I \setminus \{x_0\}$ Συνάρτηση κλίσης της f στο x_0

Η f είναι αύξουσα $\Leftrightarrow g_{x_0} \geq 0 \quad \forall x_0 \in I$



Κυρτή: Αν $x_1 < x_2$ και f κυρτή $\Rightarrow g_{x_0}(x_1) \leq g_{x_0}(x_2)$

SOS



Λήμμα των 3 χορδών: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, I = διάστημα $\subseteq \mathbb{R}$ και $x, y, z \in I$ με $x < z < y$ αν η f είναι κυρτή έχουμε: $\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$ και αντίστροφα.

Αντίστροφο → το ίδιο επίσης

Απόδειξη:

Αφού $x < z < y$: $\exists \lambda \in (0,1)$: $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ επειδή f κυρτή $\Rightarrow f(z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f(x)}{(1-\lambda)x + \lambda y - x} = \frac{\lambda(f(y) - f(x))}{\lambda(y - x)} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Ανάλογα η 2η ανισότητα

Θεώρημα: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, I = ανοικτό διάστημα $\subseteq \mathbb{R}$ f κυρτή συνάρτηση Τότε

-L συνεχής
...ο b ⇔ $\exists L>0$
$|g(x)-g(y)| \le$
$L|x-y|, x,y\in I$
L-συνεχής
⇒ g= συνεχής
$[0,1]\to\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt{x}$ συνεχής
... L-συνεχής

(i) η f είναι Lipschitz συνεχής στα συμπαγή υποδιαστήματα του I

(ii) η f είναι συνεχής στο I

Απόδειξη:

(i) Έστω $K\subseteq I$ κλειστό και φραγμένο, I ανοικτό.
Έστω $u<v<z<w$: $u,v,z,w \notin K$.
Έστω $x,y\in K$: $x<y$. Από λήμμα 3 χορδών έχουμε:
$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$$
Άρα
$$\frac{|f(y)-f(x)|}{y-x} \le \max\left\{\left|\frac{f(u)-f(v)}{u-v}\right|, \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\right\}$$
$= L \Leftrightarrow |f(y)-f(x)| \le L|y-x|$, $y,x\in K$.

(ii) Προφανές αφού τα μονοσύνολα είναι κλειστά και φραγμένα.

Ορισμός: Έστω $f: I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$. Η ευθεία $y=f(x_0)+\mu_{x_0}(x-x_0)$ καλείται στηρίζουσα ευθεία της f στο $x_0 \Leftrightarrow f(x)\ge f(x_0)+\mu_{x_0}(x-x_0)$.

Θεώρημα: Έστω $f: I\to\mathbb{R}$, I: ανοικτό διάστημα και f κυρτή. Έστω $x_0\in I$. Τότε $\exists \mu_{x_0}\in\mathbb{R}$: $f(x)\ge f(x_0)+\mu_{x_0}(x-x_0)$, $x\in I$ και αντίστροφα.

Απόδειξη:

ενική
...ρίζεται
...Stuber-
...μαθ...ωσης
(...-13)

[⇒] Έστω ότι η f είναι κυρτή. Χ.Β.Γ. υποθέτουμε ότι $x_0=0$, $I=\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.
Έχουμε ότι $\mathbb{R}=\{\lambda\in\mathbb{R}: \lambda>0\}\cup\{-\mu\in\mathbb{R}: \mu>0\}\cup\{0\}$
τότε για $\lambda,\mu>0 \Rightarrow 0=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(-\mu)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\lambda$
$$f(0)=0\le \frac{\lambda}{\lambda+\mu}f(-\mu)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}f(\lambda) \Rightarrow$$
$$\frac{f(\lambda)}{\lambda} \ge \frac{f(-\mu)}{-\mu}, \quad \lambda,\mu>0$$

Άρα $b = \inf\{\frac{f(\lambda)}{\lambda} : \lambda>0\} \geq \sup\{\frac{f(-\mu)}{-\mu}, \mu>0\} = a$

Έστω $a \le u \le b$, $f(t) \ge ut$, $t\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$
$f(t) \ge f(0)+u(t-0)$, $t\in\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $y = f(0)+u(t-0)$, $t\in\mathbb{R}$
η φέρουσα ευθεία.

[$\Leftarrow$] Έστω ότι η f έχει φέρουσα σε κάθε $x_0\in I$.
Θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή.

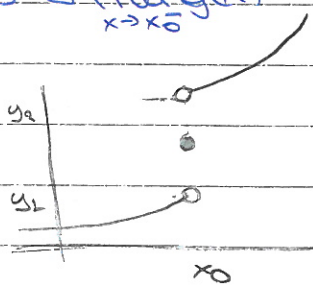
Έστω $y\in I$ τυχαίο, $x\in I$ $\exists u_x\in\mathbb{R}$: $f(y)\ge f(x)+u_x(y-x)$ $\forall x\in I$ Άρα $f(y)=\max\{\underbrace{f(x)+u_x(y-x)}_{\text{κυρτές}}, x\in I\}$ Άρα

από ασκήσεις 5:4 η f είναι κυρτή

Άσκηση (Περιοχές Συζευκτικώς): Έστω $g: I\to\mathbb{R}$ αύξουσα
I = ανοικτό διάστημα, $x_0\in I$ $\Rightarrow$ $\exists \lim_{x\to x_0^-} g(x) \le \lim_{x\to x_0^+} g(x)$

$\lim_{x\to x_0^-} g(x) = \sup\{g(x), x<x_0\}$

$\lim_{x\to x_0^+} g(x) = \inf\{g(x), x>x_0\}$



$\exists q\in\mathbb{Q}\cap[y_1,y_2]$ Συνεπώς μια αύξουσα συνάρτηση μπορεί να έχει αριθμήσιμες το πλήθος ασυνέχειες.

Θεώρημα: Έστω $f: I\to\mathbb{R}$, I-ανοικτό διάστημα κυρτή.

ισχύει και το αντίστροφο $\to$ (i) Υπάρχει η f'_-, f'_+ στο I, και για $x,y\in I$ με $x<y$ $f'_-(x)\le f'_+(x)\le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'_-(y)\le f'_+(y)$

Άρα οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο I

(ii) Η f'_- είναι αριστερά συνεχής στο I
Η f'_+ είναι δεξιά συνεχής στο I

(iii) $x_0 \in I$ $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow$ η f'_- είναι συνεχής στο x_0

(iv) $\exists A \subseteq I$ αριθμήσιμο τ.ω. η f είναι παραγωγίσιμη στο $I \setminus A$ και η παράγωγος στο $I \setminus A$ είναι συνεχής.

Απόδειξη:

(i) Έστω $x, y \in I$: $x < y$ και $w < x < z < y$ τότε από λήμμα 3 χορδών έχουμε:

$$\underbrace{\frac{f(w)-f(x)}{w-x}}_{\substack{\text{αύξουσα} \\ \text{ως προς } w}} \leq \underbrace{\frac{f(z)-f(x)}{z-x}}_{\substack{\text{αύξουσα} \\ \text{ως προς } z}} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

(ii) f'_- είναι συνεχής από αριστερά

Χρησιμοποιούμε την:

Άσκηση 2 (Θεριζόντες Ζυγιστικούς): $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

αν n = σταθερό g_n αύξουσα συνάρτηση

αν x = σταθερό $(g_n(x))_n$ αύξουσα ακολουθία

Τότε η g είναι συνεχής από τα αριστερά σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ ■

Έστω ότι $I = \mathbb{R}$ και $x \in I$ $g_n(x) = \dfrac{f(x - 1/n) - f(x)}{(x - 1/n) - x}$

Για n σταθερό (3-χορδών) $g_n \uparrow$, g_n συνεχής στο I (αφού f κυρτή σε ανοικτό $\Rightarrow$ f συνεχής)

Για x σταθερό: $(g_n(x))_n \uparrow$ ακολουθία, και $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'_-(x)$ άρα η f'_- είναι συνεχής από αριστερά.

(iii) [<=] Έστω ότι η f'_- συνεχής στο $x_0 \in I$

$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(y)$ $x_0 < y$

$\underset{y \to x_0^+}{\downarrow}$ $f'_-(x_0)$

Αρα $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

[$\Rightarrow$] Εστω οτι f'_- δεν ειναι συνεχης απο δεξια στο x_0.

f' αυξ. $f'_-(x_0) < \lim_{x\to x_0^+} f'_-(x) \le \lim_{x\to x_0^+} f'_+(x) \overset{(iii)}{=} f'_+(x_0)$

Αρα $\nexists f'(x_0)$ Ατοπο.

(iv) f'_- αυξουσα $\Rightarrow \exists A \subseteq I$: A αριθμησιμο : $f'_-|_{I\setminus A}$ συνεχης $\overset{(iii)}{\Leftrightarrow} \exists f'(x)\ \forall x\in I\setminus A$.

Τοτε $f'(x)=f'_-(x)$, $x\in I\setminus A$ και f' συνεχης στο $I\setminus A$

Αρα $\exists f'(x)$, $x\in I\setminus A$ και ειναι συνεχης

Πορισμα 1: Εστω $f: I\to\mathbb{R}$, I = ανοικτο διαστημα κυρτη και παραγωγισιμη. Τοτε η f C^1 (f' = συνεχης

Πορισμα 2: Εστω $f: I\to\mathbb{R}$, I ανοικτο διαστημα

(i) Εστω f παραγωγισιμη. f κυρτη $\Leftrightarrow f'$ αυξουσα

(ii) Εστω οτι f δυο φορες παραγωγισιμη

f κυρτη $\Leftrightarrow f''\geq 0$.

Ορισμος: Θεωρουμε $f: I\to\mathbb{R}$ κυρτη, $x_0\in I$ = ανοικτο διαστημα. $\partial f(x_0)=\{u\in\mathbb{R} : f(x)\geq f(x_0)+u(x-x_0), x\in I\}\neq\emptyset$ το υποδιαφορικο της f στο x_0.

Ασκησεις 6:

(1) Εστω $f: I\to\mathbb{R}$ $x_0\in I$ = ανοικτο διαστημα, f κυρτη

Δ.ο. $\partial f(x_0)=[f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ και x_0 σημειο ολικου ελαχιστου $\Leftrightarrow 0\in\partial f(x_0)$

(2) f κυρτη τοτε $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \partial f(x_0)$ μονοσυνολο

$\exists f'(x_0)$ τοτε x_0 ολ. ελ. $\Leftrightarrow f'(x_0)=0$.

Ασκήσεις 7:

(1) Να υπολογιστεί το $\partial f(x_0)$ και το σ.τ.π.ελ. των

(i) $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R},\ x_0=0$

(ii) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\in(-\infty,-1] \\ 1 & x\in[-1,2] \\ \frac{1}{2}\cdot x & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

Ασκήσεις 8:

(1) $\lambda_i>0$ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, $x_1,\dots x_n>0$ Δ.ο.

$x_1^{\lambda_1}\cdot x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}\le \lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n$

Ιδιαιτέρως $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\le \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$, $(\lambda_i=1/n)$

(2) $x,y\ge 0$, $p,q>1$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ Δ.ο.

$xy\le \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ [Young]

(3)(i) $x_i,y_i\ge 0$, $p,q>1$: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$x_1y_1+\dots+x_dy_d\le (x_1^p+\dots+x_d^p)^{1/p}(y_1^q+\dots+y_d^q)^{1/q}$

[Hölder] Για $p=q=2 \Rightarrow$ C-S

(ii) Έστω $x=(x_1,\dots,x_d)$, $y=(y_1,\dots,y_d)\in\mathbb{R}^d$,

$+\infty\ge p\ge 1$ $\|x\|_p=\begin{cases}\sum_{i=1}^{d}|x_i| & p=1\\ \left(\sum_{i=1}^{d}|x_i|^p\right)^{1/p}, & 1<p<+\infty\\ \max\{|x_i|,\ i=1\dots d\}, & p=+\infty\end{cases}$

Δείξτε ότι είναι νόρμες.

Να ζωγραφιστούν οι $B_p(0,1)$ στον $\mathbb{R}^2$

Τι συμβαίνει με την $d_p(x,y)=\|x-y\|_p$ για

$0<p<1$ $d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{d}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$

(4) Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή και παραγωγίσιμη και $f'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$. Έστω $\xi\in(a,b)$:

$f(\xi)=0$ Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_n$:
$x_1 \in (\xi, b)$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Δ.Ο. $(x_n)_n$ φθίνουσα κάτω φραγμένη από το ξ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ (Μέθοδος Newton)

(5) $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, $x>0$ Δ.Ο.

(i) $\Gamma(1)=1$

(ii) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $x>0$

(iii) $\log\Gamma$ είναι κυρτή συνάρτηση

Αντιστρόφως: Θεωρούμε $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με τις (i), (ii), (iii) τότε $g=\Gamma$ (Artin 1940)

Υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^{d+1}$, $d\geq 1$

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^{d+1}$ με την κανονική βάση $\{e_i\}_{i=1}^{d+1}$ και X διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{d+1}$ με $\dim X=d$ $\exists\, \vec{a}=(a_1,\dots,a_d,a_{d+1})\in\mathbb{R}^{d+1}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$: $X=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^{d+1}: 0=\vec{a}\cdot\vec{x}=a_1x_1+\dots+a_{d+1}x_{d+1}\} = T^{-1}(\{0\})$ $T(\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{x}$, $T:\mathbb{R}^{d+1}\to\mathbb{R}$ γραμμική, $T\neq 0 \Rightarrow X=$ πυρήνας

Ειδική Περίπτωση $a_{d+1}\neq 0$, $X=\{(x_1,\dots,x_{d+1}): x_{d+1}=u_1x_1+\dots+u_dx_d,\ u_i=-a_i/a_{d+1}\}$ Άρα $X=$ γράφημα της $q:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$: $q(x_1,\dots,x_d)=u_1x_1+\dots+u_dx_d$ γραμμική, $x_{d+1}=u_1x_1+\dots+u_dx_d$ παριστάνει εξίσωση.

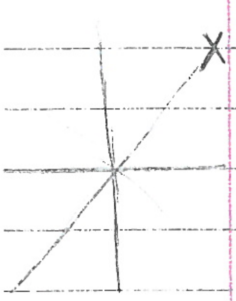
Υπερεπίπεδο: Έστω $\vec{w}_0=(w_1,\dots,w_{d+1})$ και X διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{d+1}$ με $\dim X=d$ τότε ο $H=\vec{w}_0+X$ καλείται υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{d+1}$ που διέρχεται από το $\vec{w}_0$ και είναι παράλληλο με τον X.

$H=(w_1,\dots,w_{d+1})+\{(x_1',\dots,x_{d+1}'): a_1x_1'+\dots+a_{d+1}x_{d+1}'=0\}=$

$\{(x_1,\dots,x_{d+1}) : a_1(x_1-w_1)+\dots+a_{d+1}(x_{d+1}-w_{d+1})=0\} =$
$T^{-1}(\{c\})$, $c=a_1w_1+\dots+a_{d+1}w_{d+1}$

Ειδική Περίπτωση: $a_{d+1}\neq 0$

$x_{d+1} = w_{d+1} + u_1(x_1-w_1)+\dots+u_d(x_d-w_d)$ καρτεσιανή εξίσωση. Γράφημα της $h(\vec{x})=w_{d+1}+\vec{u}\cdot(\vec{x}-\vec{w})$



Παράδειγμα: Στον $\mathbb{R}^2$ $(d=1)$ ο $X=\{(x,y): a_1x+a_2y=0\}$: $(a_1,a_2)\neq(0,0)$ ευθεία.

Αν $a_2\neq 0$ $y=(-a_1/a_2)\cdot x$

Φέρον Υπερεπίπεδο:

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, A ανοικτό $\subseteq\mathbb{R}^d$, $x_0\in A$. Εάν $\exists\, u_{x_0}\in\mathbb{R}^d$: $f(x)\geq f(x_0)+u_{x_0}(x-x_0)$, $x\in A$ τότε το υπερεπίπεδο H με καρτεσιανή εξίσωση $y=f(x_0)+u_{x_0}(x-x_0)$ καλείται φέρον υπερεπίπεδο της f στο x_0.

Για $d=1$ $H\sim$ φέρουσα ευθεία

$\partial f(x_0)=\{u\in\mathbb{R}^d : f(x)\geq f(x_0)+u\cdot(x-x_0),\ x\in A\}$ καλείται υποδιαφορικό στο x_0.

Θεώρημα (τύπου H-B): Έστω $f: K\to\mathbb{R}$, K ανοικτό και κυρτό. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) η f είναι κυρτή

(ii) Για $x_0\in K$ $\exists\, u_{x_0}\in\mathbb{R}^d$ $f(x)\geq f(x_0)+u_{x_0}(x-x_0)$ $x\in K$

Απόδειξη:

Ενικά (ii) $\Rightarrow$ (i) Παρόμοια $d=1$

εφαρμογή (i) $\Rightarrow$ (ii) Ειδική περίπτωση: $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ $x_0=0$, $g(0)=0$

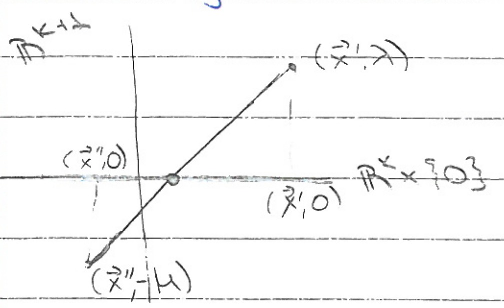
Schauber g κυρτή. Δ.Ο. $\exists\, u_d\in\mathbb{R}^d$: $g(x)\geq u_d\cdot x$, $x\in\mathbb{R}$

Για $d=1$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $d=k$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για κ+1.

Έστω $g:\mathbb{R}^{k+1}\to\mathbb{R}$ κυρτή, $g(0)=0$



$g|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}$ είναι κυρτή

Άρα $\exists\,(\vec{u}_k,0)\in\mathbb{R}^k\times\{0\}$:

$g(\vec{x},0)\geq(\vec{u}_k,0)\cdot(\vec{x},0)=\vec{u}_k\cdot\vec{x}$, $(\vec{x},0)\in\mathbb{R}^k\times\{0\}$

$\mathbb{R}^{k+1}=\{(\vec{x},\lambda)\in\mathbb{R}^{k+1}:\lambda>0\}\cup\{(\vec{x},-\mu)\in\mathbb{R}^{k+1}:\mu>0\}\cup(\mathbb{R}^k\times\{0\})$

Έστω $(\vec{x}',\lambda),(\vec{x}'',-\mu)$, $\lambda,\mu>0$, $\vec{x}',\vec{x}''\in\mathbb{R}^k$

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\vec{x}'',-\mu)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\vec{x}',\lambda)=\left(\frac{\lambda\vec{x}''+\mu\vec{x}'}{\lambda+\mu},0\right)\in\mathbb{R}^k\times\{0\}$$

$$\frac{\lambda\vec{u}_k\cdot\vec{x}''+\mu\vec{u}_k\cdot\vec{x}'}{\lambda+\mu}\leq g\left(\frac{\lambda\vec{x}''+\mu\vec{x}'}{\lambda+\mu},0\right)=g\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\vec{x}'',-\mu)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\vec{x}',\lambda)\right)$$

$$\leq\frac{\lambda}{\lambda+\mu}g(\vec{x}'',-\mu)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}g(\vec{x}',\lambda)\iff$$

$$\mu g(\vec{x}',\lambda)-\mu\vec{u}_k\cdot\vec{x}'\geq\lambda\vec{u}_k\cdot\vec{x}''-\lambda g(\vec{x}'',-\mu)\overset{\lambda\mu>0}{\iff}$$

$$\frac{g(\vec{x}',\lambda)-\vec{u}_k\cdot\vec{x}'}{\lambda}\geq\frac{g(\vec{x}'',-\mu)-\vec{u}_k\cdot\vec{x}''}{-\mu}\quad\forall\,\vec{x}',\vec{x}''\in\mathbb{R}^k,\ \lambda,\mu>0$$

$$b=\inf\left\{\frac{g(\vec{x}',\lambda)-\vec{u}_k\cdot\vec{x}'}{\lambda},\ \vec{x}'\in\mathbb{R}^k,\lambda>0\right\}\geq\sup\left\{\frac{g(\vec{x}'',-\mu)-\vec{u}_k\cdot\vec{x}''}{-\mu},\ \vec{x}''\in\mathbb{R}^k,\mu>0\right\}=a$$

Έστω $t_0\in[a,b]$ Τότε $g(\vec{x},t)-\vec{u}_k\cdot\vec{x}\geq t_0 t$ $\forall(\vec{x},t)\in\mathbb{R}^{k+1}$ Άρα $g(\vec{x},t)\geq(\vec{u}_k,t_0)\cdot(\vec{x},t)$

Γενικότερα: Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}^d$ κυρτή

$g(x)=f(\vec{x}+\vec{x}_0)-f(\vec{x}_0)$ κυρτή και $g(0)=0$

Άρα $\exists\,u_d\in\mathbb{R}^d$: $g(x)\geq\vec{u}_d\cdot\vec{x}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$ $\Rightarrow$

$f(\vec{x}+\vec{x}_0)-f(\vec{x}_0)\geq\vec{u}_d\cdot\vec{x}\iff f(\vec{x}+\vec{x}_0)\geq\vec{u}_d\cdot\vec{x}+f(\vec{x}_0)$

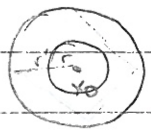
$\overset{\vec{x}=\vec{y}-\vec{x}_0}{\Longrightarrow}f(\vec{y})\geq f(\vec{x}_0)+\vec{u}_d(\vec{y}-\vec{x}_0)$, $y\in\mathbb{R}^d$

Θεώρημα: Έστω $f: K \to \mathbb{R}$, K ανοικτό + κυρτό, f κυρτή.
Τότε:

(i) η f είναι συνεχής

(ii) η f είναι Lip-συνεχής στα συμπαγή υποσύνολα του K

Απόδειξη:

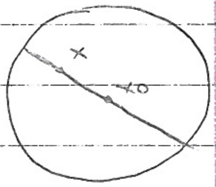


(i) Έστω $x_0 \in K$ - ανοικτό $\exists B(x_0, r') \subseteq K$

$B_1(x_0, r') \subseteq B(x_0, r') \Rightarrow \exists B(x_0, r) \subseteq B_1(x_0, r')$

$x \in B(x_0, r) \subseteq B_1(x_0, r') = \mathrm{conv}\{y_i : i = 1, \dots, 2d\}$

$x = \sum_{i=1}^{2d} \lambda_i y_i$, $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{2d} \lambda_i = 1$



Άρα $f(x) \leq \sum_{i=1}^{2d} \lambda_i f(y_i) \leq \max\{f(y_i) : i = 1, \dots, 2d\} = L$
$= L(x_0)$

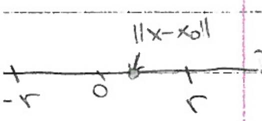
Άρα $\exists L : f(x) \leq L$, $x \in B(x_0, r)$

Έστω $x \in B(x_0, r) \therefore 0 \leq \|x - x_0\| \leq r$ Άρα

$B(x_0, r) \ni x_0 + t \dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$, $t \in [-r, r]$

$$g(t) = f\left(x_0 + t \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right), \quad t \in [-r, r], \; g: \text{κυρτή}$$

Από Θ. 3 χορδών έχουμε:



$$\frac{g(-r) - g(0)}{-r} \leq \frac{g(\|x - x_0\|) - g(0)}{\|x - x_0\|} \leq \frac{g(r) - g(0)}{r}$$

$$\frac{f(x_0) - g(-r)}{r} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} \leq \frac{g(r) - f(x_0)}{r}$$

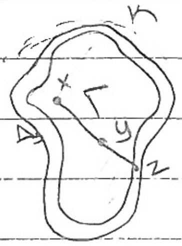
όμως $g(t) \leq L$, $t \in [-r, r]$

$$\frac{f(x_0) - L}{r} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} \leq \frac{L - f(x_0)}{r} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} \right| \leq \frac{L - f(x_0)}{r} \Leftrightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \left(\frac{L - f(x_0)}{r}\right) \|x - x_0\|$$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0 (και είναι τοπικά Lip - συνεχής στο x_0)



(ii) Έστω K ανοικτό και κυρτό, $\Gamma \subseteq K$, Γ συμπαγές

Από άσκηση πραγματικής ανάλυσης $\exists \rho > 0$:

$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x,\Gamma) \leq \rho\} \subseteq K$ $\Delta =$ συμπαγές.

f συνεχής, $\Delta =$ συμπαγές $\Rightarrow \exists M = M(\Gamma)$:

$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Delta$

Έστω $x, y \in \Gamma : x \neq y$ και $z = y + \rho \dfrac{y-x}{\|y-x\|} \in \Delta$

Τότε $y = (1-\lambda)x + \lambda z$, $\lambda = \dfrac{\|x-y\|}{\rho + \|x-y\|} \in (0,1)$

$f(y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(z)$

$f(y) - f(x) \leq \lambda (f(z) - f(x)) \leq \lambda 2M = 2M \dfrac{\|x-y\|}{\rho + \|x-y\|} \leq$

$(2M/\rho)\|x-y\|$

$|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{2M}{\rho} \|x-y\|$, $x, y \in \Gamma$, $M(\Gamma), \rho(\Gamma)$

Διαφορισιμότητα κυρτής συνάρτησης

Έστω $f : A (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A =$ ανοικτό

$\dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{x}_0 + t e_i) - f(\vec{x}_0)}{t}$ ~ μερική παράγωγος στο $\vec{x}_0$

$\|\vec{a}\| = 1$ $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{x}_0 + t\vec{a}) - f(\vec{x}_0)}{t}$ ~ κατευθυνόμεν

Η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^d$:

$\lim\limits_{\vec{h} \to \vec{0}} \dfrac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \vec{u} \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

$df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \vec{u} \cdot \vec{h}$ διαφορικό της f στο $\vec{x}_0$

Συνεχής στο $\vec{x}_0$ $\not\Leftrightarrow$ Μερικώς παρ. στο $\vec{x}_0$

$\Leftarrow \ \not\Rightarrow$ f διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$ $\Rightarrow \ \not\Leftarrow$

$\Downarrow \ \not\Uparrow$

παράγωγος κατά κατεύθυνση στο $\vec{x}_0$

Εαν $\exists\ \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$, $\vec{x}\in B(\vec{x}_0,\varepsilon)\subseteq A$, $i=1,\dots,d$ και

είναι συνεχείς στο $\vec{x}_0 \implies \exists\ df(\vec{x}_0)$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το αντίστροφο δεν ισχύει

Θεώρημα: Έστω $f: K\to\mathbb{R}$, K = κυρτό + ανοικτό, f κυρτή, $x_0\in K\ (\subseteq\mathbb{R}^d)$ Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι διαφορίσιμη στο x_0

(ii) $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $i=1,\dots,d$.

Απόδειξη:

(i) $\implies$ (ii) Απει III

(ii) $\implies$ (i) Έστω $h=h_1\vec{e}_1+\dots+h_d\vec{e}_d\in B(0,r)$

και $x_0\in K$ = ανοικτό $\exists\ B(x_0,r)\subseteq K$

$\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-\nabla f(x_0)\cdot h \sim$ κυρτή στο $B(0,r)$

$\varphi(h_ie_i)=f(x_0+h_ie_i)-f(x_0)-\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}h_i$

$\lim\limits_{h_i\to 0}\dfrac{\varphi(h_ie_i)}{h_i}=0$, $i=1,\dots,d$

$h\in B(0,r/d)$, $dh\in B(0,r)$

$h=h_1e_1+\dots+h_de_d$

$\varphi(h)=\varphi\left(\dfrac{dh}{d}\right)=\varphi\left(\dfrac{(dh_1)e_1+\dots+(dh_d)e_d}{d}\right)\overset{\varphi\text{ κυρτή}}{\leq}$

$\dfrac{1}{d}\big(\varphi(dh_1e_1)+\dots+\varphi(dh_de_d)\big)=\dfrac{\varphi(dh_1e_1)\cdot h_1}{dh_1}+\dots$

$+\dfrac{\varphi(dh_de_d)h_d}{dh_d}\leq \|h\|\left[\left|\dfrac{\varphi(dh_1e_1)}{dh_1}\right|+\dots+\left|\dfrac{\varphi(dh_de_d)}{dh_d}\right|\right]$

$=\|h\|\cdot F(h) \implies$

$\dfrac{\varphi(h)}{\|h\|}\leq F(h)\xrightarrow{\vec{h}\to\vec{0}} 0$

$$0 = \varphi(0) = \varphi\left(\frac{h}{2} + \frac{-h}{2}\right) \le \frac{1}{2}\varphi(h) + \frac{1}{2}\varphi(-h) \Rightarrow$$

$$\varphi(h) \ge -\varphi(-h) \ge -\|h\| F(-h)$$

Άρα $$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-F(-h)} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{\varphi(h)}{\|h\|}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{F(h)}$$

Άρα η f είναι διαφορίσιμη.