Νικου Χρήστος ΑΜ: 1112201000163

Διαφόριση κατά Gateaux (1889–1914) και κατά Frechet (1878–1973)

Οι παρακάτω ορισμοί θα δοθούν στο γενικότερο πλαίσιο των διανυσματικών χώρων πάνω στο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένους με μια νόρμα, αλλά όλα τα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα θα αναφέρονται σε συναρτήσεις $f:(\mathbb{R}^d, \|.\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$.

Ορισμός 1 (Gateaux παράγωγος).

Έστω $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ διανυσματικοί χώροι με νόρμα και $f: X \longrightarrow Y$, $x_0, v \in X$ αν το

$$f'(x_0)(v) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} \quad \text{υπάρχει}$$

ως φραγμένη γραμμική απεικόνιση* (ως προς v) τότε η συνάρτηση $v \longmapsto f'(x_0)(v)$ καλείται η Gateaux παράγωγος της f στο x_0.

* Φραγμένη γραμμική απεικόνιση είναι μια συνάρτηση $T: X \longrightarrow Y$ (X, Y όπως στον Ορο 1) η οποία είναι γραμμική $\begin{pmatrix} T(x+y)=T(x)+T(y) \\ T(\lambda x)=\lambda T(x) \end{pmatrix}$ και για την οποία υπάρχει σταθερά $M>0$: $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$. (Βλέπε περισσότερα στο τέλος)

Παραδείγματα 1:

i) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τότε η f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Longleftrightarrow$ η f Gateaux παρ. στο x_0. (Ισχύει κάτι πιο ισχυρό f παρ $\Longleftrightarrow$ Frechet).

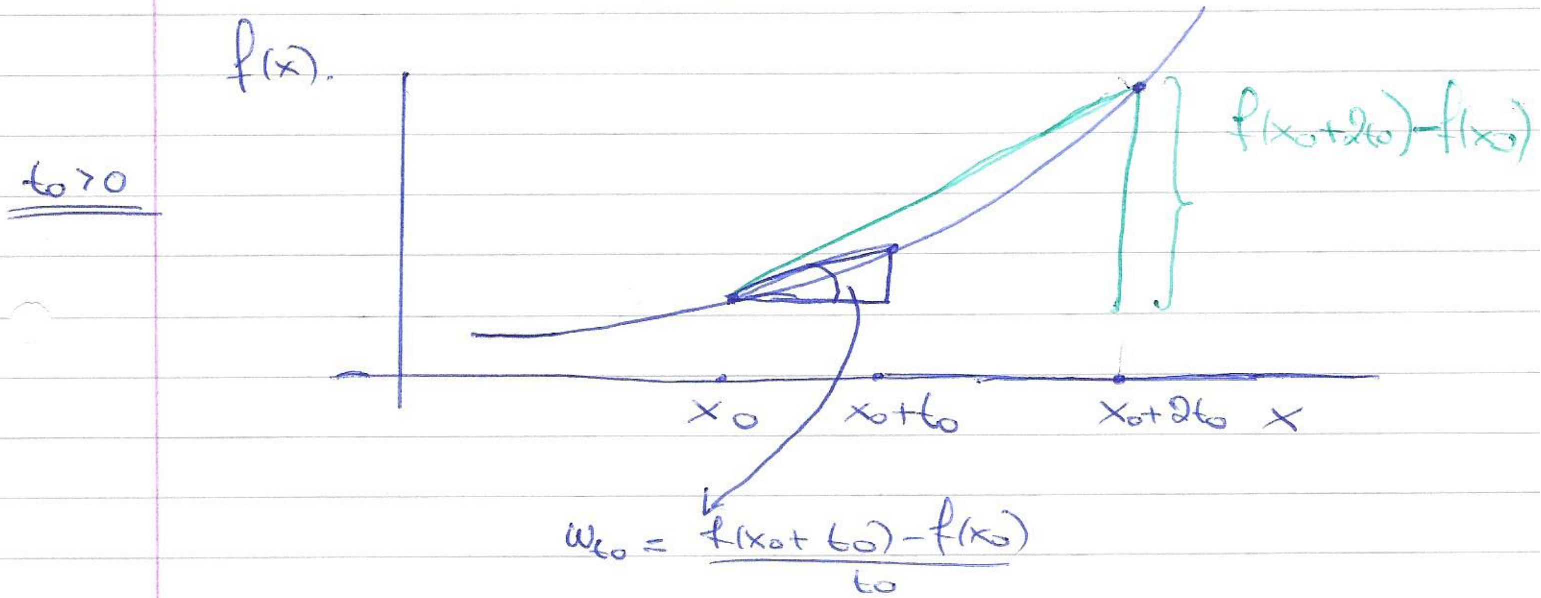
Απόδειξη: "$\Longleftarrow$" Υπάρχει το $f'(x_0)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$

$\forall v \in \mathbb{R}$, άρα για $v=1$ έχουμε το ζητούμενο.

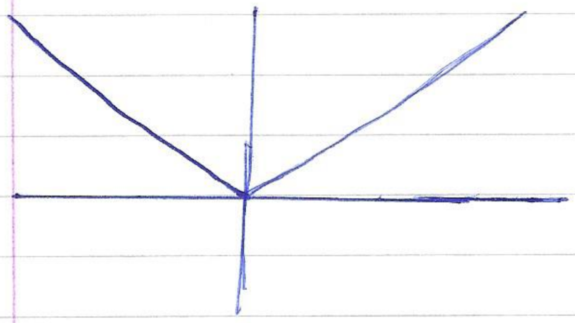
"$\Longrightarrow$" Έστω ότι $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

τότε $f'(x_0)(v) = v\cdot f'(x_0)$ $\forall v\in\mathbb{R}$ γραμμική ως προς v

και $|f'(x_0)(v)| \leq |v|\cdot \underbrace{|f'(x_0)|}_{M}$.



ii) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$.



Εδώ $f_+'(0)(1) = 1 \neq -1 = f_-'(0)(1)$ και επομένως όχι Gateaux παραγωγίσιμη στο 0.

<u>Γενικότερα:</u> Αν $f: X \to \mathbb{R}$ με $f(x)=\|x\|$ τότε

$f_+'(0)(v) = \|v\|$ και $f_-'(0)(v) = -\|v\|$.

iii) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

Τότε, αν $\vec{v} = (v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ έχουμε:

$$f'(\vec{0})(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^3} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}, (v_1,v_2)\neq(0,0)$$

η οποία δεν είναι γραμμική ως προς v και επομένως η f όχι Gateaux παραγωγίσιμη στο (0,0).

iv) Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)=(0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

Τότε, $f'(\vec{0})(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{v_1 v_2}{v_1^2+v_2^2}$ το οποίο υπάρχει μόνο στην περίπτωση που $\vec{v}=(v_1,0)$ ή $\vec{v}=(0,v_2)$ και η f προφανώς όχι Gateaux παραγωγίσιμη στο (0,0).

v) Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)=(0,0) \\ \frac{x^4 \cdot y}{x^6+y^3}, & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

Τότε, αν $\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$, τότε

$$f'(\vec{0})(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{t^5 v_1^4 \cdot v_2}{t^7\left(v_1^6 + \frac{v_2^3}{t^4}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^4 \cdot v_2}{t^2 \cdot v_1^6 + \frac{v_2^3}{t^2}} = 0$$

Επομένως η f είναι Gateaux παραγωγίσιμη στο (0,0) αλλά όχι συνεχής καθώς $f(x,x^2) = \frac{1}{2}$.

vi) Έστω $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Gateaux παραγωγίσιμη στο $\vec{x_0}$, τότε $f'(\vec{x_0})(\vec{v}) = \vec{\nabla} f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v}$ (η μορφή της $f'(\vec{x_0})(\vec{v})$).

<u>Απόδειξη</u>: Αφού η f Gateaux παρ. στο $\vec{x_0} \Rightarrow \exists$ οι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Έστω $\vec{v}=(v_1,v_2,\dots,v_d)$ τότε

$$f'(\vec{x_0})(\vec{v}) = f'(\vec{x_0})(\vec{e_1}v_1+\dots+\vec{e_d}v_d) = v_1 f'(\vec{x_0})(\vec{e_1})+\dots+v_d f'(\vec{x_0})(\vec{e_d})$$

$= \vec{\nabla} f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v}$, λόγω της γραμμικότητας της $f'(\vec{x_0})(\vec{v})$.

⇝ Οπότε για την μελέτη του προβλήματος

$$\max f'(\vec{x_0})(\vec{v})$$

υπ. περιορισμούς $\|\vec{v}\| \leq \|\vec{\nabla} f(\vec{x_0})\|$. μας αρκεί η συνάρτηση να είναι Gateaux παρ. στο $\vec{x_0}$ και επειδή

$f'(\vec{x_0})(\vec{v}) = \vec{\nabla} f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{\nabla} f(\vec{x_0})\| \cdot \cos(\nabla f(\vec{x_0}), \vec{v})$

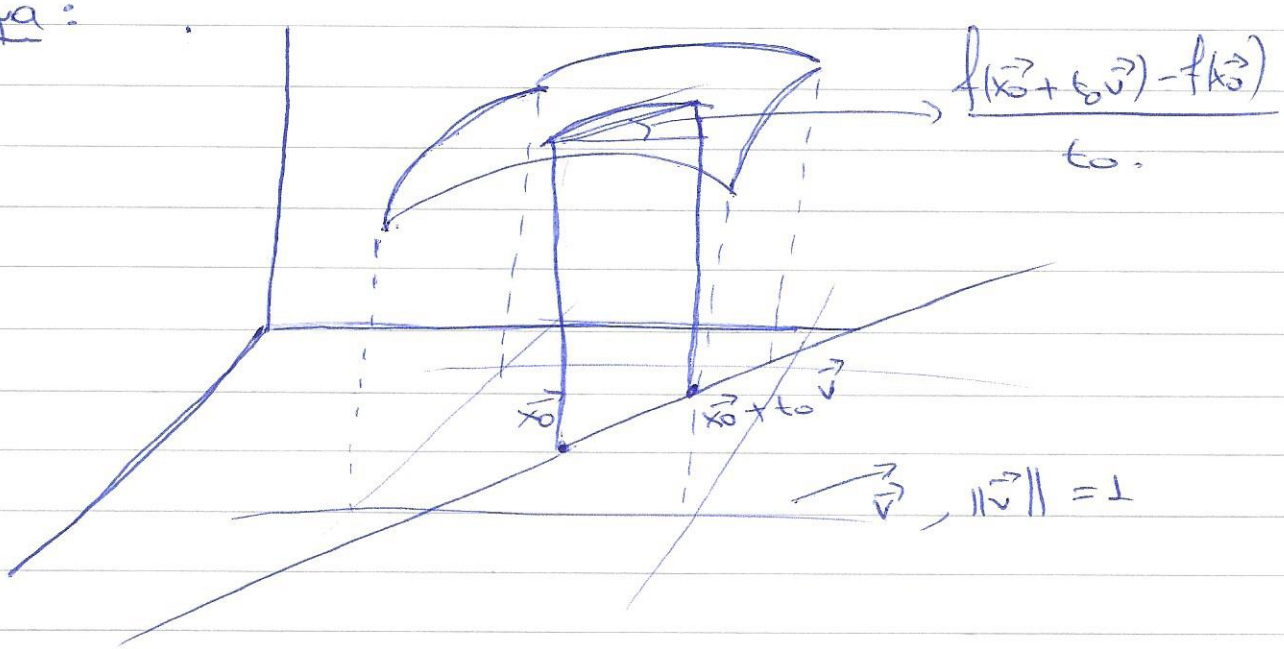
η $f'(\vec{x_0})(\vec{v})$ μεγιστοποιείται για $\vec{v} = \vec{\nabla} f(\vec{x_0})$ επομένως, ο μεγαλύτερος ρυθμός μεταβολής βρίσκεται προς την κατεύθυνση του $\vec{\nabla} f(\vec{x_0})$.

Υπενθύμιση : Έστω $f: X \to Y$, X, Y δ.χ με νόρμα και $x_0, v \in X$ με $\|v\|_X = 1$ αν το

$$D_v f(x_0)(v) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$ υπάρχει τότε

το $Df(x_0)(v)$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο x_0 στην κατεύθυνση v.

Σχήμα :



Παρατηρήσεις 1:

i) Προφανώς, Κατευθυνόμενες παράγωγοι σε κάθε $\vec{v}$ $\Rightarrow$ Ύπαρξη μερικών
$\not\Leftarrow$ (Παράδειγμα 1 (iv)).

ii) Gateaux παραγωγίσιμη στο x_0 $\Rightarrow$ Ύπαρξη κατευθυνόμενων
$\not\Leftarrow$ (Παράδειγμα 1 (iii)).

Οπότε, γενικά Gateaux $\Rightarrow$ κατευθυνόμενοι παράγωγοι $\forall \vec{v}$
$\Rightarrow$ Ύπαρξη μερικών παραγώγων.

iii) Gateaux παράγωγος $\not\Rightarrow$ Συνέχεια (Παράδειγμα 1 (v)).

Η παρατήρηση (iii) δείχνει ότι παρά την ισχύ που έχει ο ορισμός της Gateaux παραγώγου αποτυγχάνει να γενικεύσει την έννοια της παραγώγου που είχαμε για μια $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Έτσι, οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2 (Παράγωγος Frechet):
Έστω $f: X \to Y$ όπου X, Y δ. χώροι με νόρμα.
Έστω $x_0 \in X$, αν υπάρχει φραγμένη γραμμική απεικόνιση $f'(x_0): X \to Y$ τέτοια ώστε

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(h) \|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

τότε η συνάρτηση $h \longmapsto f'(x_0)(h)$ καλείται η Frechet παράγωγος της f στο x_0.

Παρατηρούμε ότι για $X=\mathbb{R}^d$, $Y=\mathbb{R}^n$ η Frechet παράγωγος της f στο x_0 είναι το (γνωστό από Απει II) διαφορικό της f στο x_0.

Μερικά αποτελέσματα:

1) Frechet παραγωγίσιμη στο $x_0 \Longrightarrow$ Gateaux παρ. στο x_0.

Απόδειξη: Έστω $v \in X$ και $\varepsilon > 0$, για το $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\|v\|_X} > 0$

$\exists\, \delta_1 > 0$: $\dfrac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} < \dfrac{\varepsilon}{\|v\|_X}$

όταν $0 < \|h\|_X < \delta_1$.

Για $\delta = \dfrac{\delta_1}{\|v\|_X} > 0$ έχουμε ότι αν $0 < |t| < \delta$ τότε

$$\left\| \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - f'(x_0)(v) \right\|_Y < \varepsilon.$$

Άρα $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = f'(x_0)(v)$ οπότε η Gateaux παράγωγος συμπίπτει με τη Frechet και είναι εξ' ορισμού φραγμένη γραμμική απεικόνιση.

2) Η f Frechet παραγωγίσιμη στο $x_0 \Longrightarrow$ η f συνεχής στο x_0.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$:

$$\left| \frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)\|_Y}{\|h\|_X} - \frac{\|f'(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} \right| \leq \frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X}$$

$< \varepsilon$ όταν $0 < \|h\|_X < \delta_1$.

Οπότε, $\|f(x_0+h)-f(x_0)\|_Y < \varepsilon\|h\|_X + \|f'(x_0)(h)\|_Y$
$\leq \|h\|_X(\varepsilon+M)$
και το αποτέλεσμα έπεται.

Παρατηρήσεις 2:

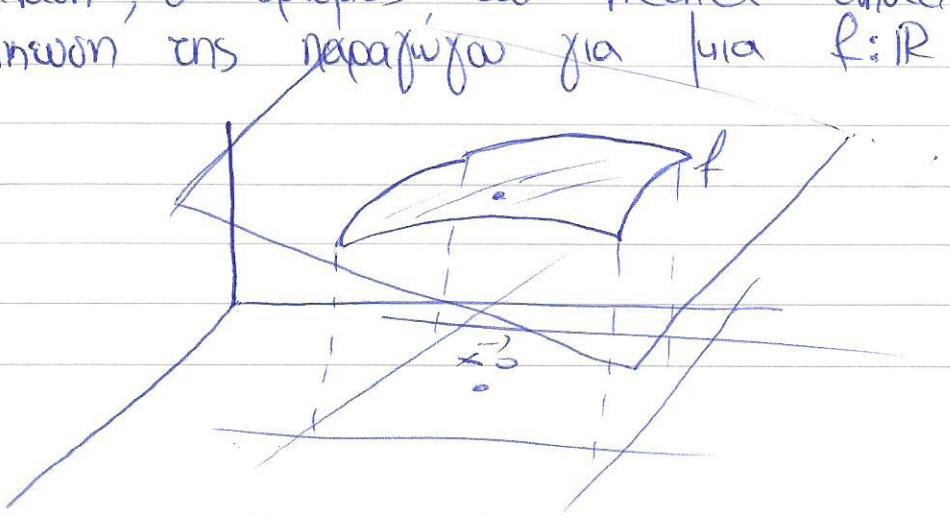
(i) Gateaux παραγωγίσιμη στο $x_0 \not\Rightarrow$ Frechet παραγωγίσιμη στο x_0 (Παράδειγμα 1 (v)).

Άρα γενικά,
Frechet $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Gateaux $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ κατευθυνόμενες παρ. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Μερικές παρ.

(ii) Έστω $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^d$ και η f Frechet παραγωγίσιμη στο $\vec{x_0}$. Τότε, αφού $f'(\vec{x_0})(\vec{h}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}$ (Παράδειγμα 1 (vi)). Επομένως,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(\vec{x_0}+\vec{h}) - f(\vec{x_0}) - \vec{\nabla} f(\vec{x_0})\cdot\vec{h}|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Και η συνάρτηση $f(\vec{x_0}) + \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}$ αποτελεί το γράφημα ενός υπερεπιπέδου στον $\mathbb{R}^{d+1}$ και είναι η καλύτερη "γραμμική" προσέγγιση της f κοντά στο $\vec{x_0}$. Δηλαδή, ο ορισμός του Frechet αποτελεί τη σωστή γενίκευση της παραγώγου για μια $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Ορισμός 3:

Έστω $f: X \to Y$ και $x_0, v \in X$. Ορίζουμε

$$f_+'(x_0)(v) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$$

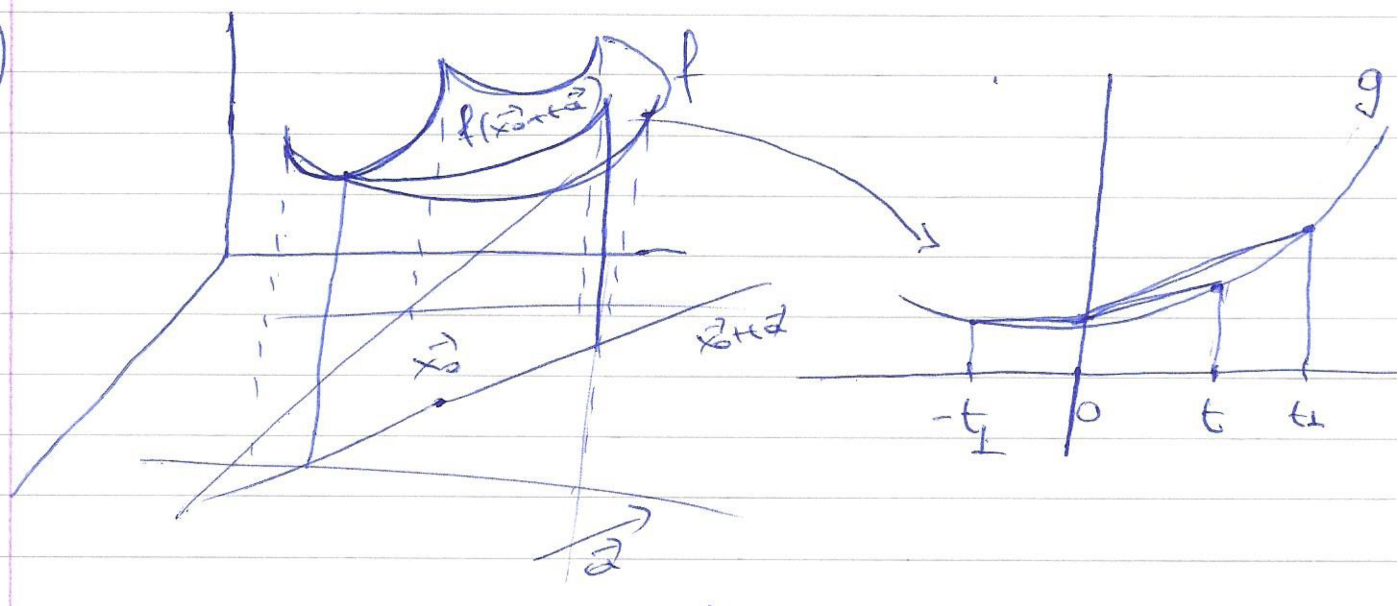
η δεξιά παράγωγος Gateaux (αντίστοιχα $f_-'(x_0)(v)$ η αριστερή).

Άσκηση: Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ κυρτή, $\vec{x_0}\in\mathbb{R}^d$, $\vec{a}\in\mathbb{R}^d$. Τότε:

i) Η $f_+'(\vec{x_0})(\vec{a})$ υπάρχει $\forall \vec{a}\in\mathbb{R}^d$

ii) Η $\vec{a} \longmapsto f_+'(\vec{x_0})(\vec{a})$ είναι θετικά ομογενής συνάρτηση και κυρτή. Υπάρχει $\vec{v_0}\in\mathbb{R}^d$: $f'(\vec{x_0})(\vec{a}) \geq \vec{v_0}\cdot\vec{a}$ $\forall \vec{a}\in\mathbb{R}^d$ και ισχύει $f_+'(\vec{x_0})(\vec{a}) \geq -f_+'(\vec{x_0})(-\vec{a})$.

i)



Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(t)=f(\vec{x_0}+t\vec{a})$ αν $t>0$, $t_1>t$ απ' το λήμμα των τριών χορδών έχουμε ότι

$$\frac{g(0)-g(-t_1)}{-t_1} \leq \frac{g(t)-g(0)}{t} \leq \frac{g(t_1)-g(0)}{t_1}.$$

Οπότε για $t\to 0^+$ έχουμε ότι $\lim_{t\to 0^+}\frac{g(t)-g(0)}{t} = f_+'(\vec{x_0})(\vec{a}) = \inf\left\{\frac{g(t)-g(0)}{t} : t>0\right\}$.

Θετική ομογένεια: Έστω $\lambda > 0$ και $t > 0$ τότε

$$\frac{f(\vec{x_0}+\lambda t\vec{a})-f(\vec{x_0})}{t} = \lambda\cdot\frac{f(\vec{x_0}+\lambda t\vec{a})-f(\vec{x_0})}{\lambda t}$$

$$\xrightarrow{t\to 0^+} \lambda\cdot f_+'(\vec{x_0})(\vec{a}).$$

οπότε $f_+'(\vec{x_0})(\lambda\vec{a}) = \lambda\cdot f_+'(\vec{x_0})(\vec{a})$

κυρτότητα: Έστω $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^d$ και $\lambda\in(0,1)$ τότε

$$t>0 \quad \frac{f(\vec{x_0}+t[(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}])-f(\vec{x_0})}{t} = \frac{f((1-\lambda)(\vec{x_0}+t\vec{a})+\lambda(\vec{x_0}+t\vec{b}))-f(\vec{x_0})}{t}$$

$$\overset{f \text{ κυρτή}}{\leq} \frac{(1-\lambda)f(\vec{x_0}+t\vec{a})+\lambda f(\vec{x_0}+t\vec{b})-f(\vec{x_0})}{t}$$

$$= (1-\lambda)\frac{f(\vec{x_0}+t\vec{a})-f(\vec{x_0})}{t} + \lambda\frac{f(\vec{x_0}+t\vec{b})-f(\vec{x_0})}{t}$$

για $t\to 0^+$ έχουμε ότι (τα παραπάνω όρια $\exists$)

$$f_+'(\vec{x_0})((1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}) \leq (1-\lambda)f_+'(x_0)(\vec{a})+\lambda\cdot f_+'(\vec{x_0})(\vec{b}).$$

άρα η $\vec{a}\longmapsto f_+'(\vec{x_0})(\vec{a})$ κυρτή.

Ύπαρξη του $\vec{v_0}\in\mathbb{R}^d$: Αφού η $f_+'(\vec{x_0})(\vec{a})$ κυρτή τότε έχει φέρον υπερεπίπεδο στο $\vec{0}$, άρα υπάρχει $\vec{v_0}\in\mathbb{R}^d$: $f_+'(\vec{x_0})(\vec{a}) \geq \vec{v_0}\cdot\vec{a}$ $\forall\vec{a}\in\mathbb{R}^d$.

Επίσης έχουμε ότι $0 = f_+'(\vec{x_0})(\vec{0}) = f_+'(\vec{x_0})(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}))$

$$\leq \frac{1}{2}\cdot f_+'(\vec{x_0})(\vec{a})+\frac{1}{2}f_+'(\vec{x_0})(-\vec{a}) \Rightarrow f_+'(\vec{x_0})(\vec{a}) \geq -f_+'(\vec{x_0})(-\vec{a}).$$

(iii) Περιγραφή του υποδιαφορικού : $\partial f(\vec{x_0}) = \{u\in\mathbb{R}^d : f(\vec{y}) \geq f(\vec{x_0}) + \vec{u}\cdot(\vec{y}-\vec{x_0})\ \forall \vec{y}\in\mathbb{R}^d\}$.

Στο ερώτημα (ii) είδαμε ότι το σύνολο
$B=\{u\in\mathbb{R}^d : f_+'(\vec{x_0})(\vec{a}) \geq \vec{a}\cdot\vec{u}\ \forall \vec{a}\in\mathbb{R}^d\}$ είναι μη κενό
ισχύει ότι $\partial f(x_0) = B$ και ότι το $\partial f(x_0)$ κυρτό + συμπαγές.

Το $\partial f(x_0)$ κυρτό : Έστω $\vec{u_1},\vec{u_2}\in\partial f(\vec{x_0})$ και $\lambda\in(0,1)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (1-\lambda) f(\vec{y}) &\geq (1-\lambda) f(\vec{x_0}) + (1-\lambda)\vec{u_1}\cdot(\vec{y}-\vec{x_0}) \\ \lambda f(\vec{y}) &\geq \lambda f(\vec{x_0}) + \lambda\vec{u_2}\cdot(\vec{y}-\vec{x_0}) \end{aligned} \quad (+)$$

$$\Rightarrow f(\vec{y}) \geq f(\vec{x_0}) + ((1-\lambda)\vec{u_1} - \lambda\vec{u_2})\cdot(\vec{y}-\vec{x_0})\quad \forall\vec{y}\in\mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\vec{u_1} + \lambda\vec{u_2} \in \partial f(x_0).$$

Το $\partial f(x_0)$ συμπαγές : ($\Longleftrightarrow$ κλειστό + φραγμένο στο $\mathbb{R}^d$).

Κλειστό : Έστω $(\vec{u_n})_{n\geq 1}\in\partial f(x_0)$ με $\vec{u_n}\longrightarrow\vec{u}\in\mathbb{R}^d$

$\vec{u_n} = (u_n(1), u_n(2), \dots, u_n(d))$, $\vec{u} = (u(1), u(2), \dots, u(d))$

$$f(\vec{y}) \geq f(\vec{x_0}) + \vec{u_n}\cdot(\vec{y}-\vec{x_0})\quad \forall\vec{y}\in\mathbb{R}^d \quad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\vec{u_n} = \vec{u} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n(i) = u(i)\quad \forall i=1,2,\dots d$$

άρα $\lim_n \vec{u_n}\cdot(\vec{y}-\vec{x_0}) = \lim_n \sum_{i=1}^{d} u_n(i)\cdot(y(i)-x_0(i))$

$$= \sum_{i=1}^{d} u(i)(y(i)-x_0(i)) = \vec{u}\cdot(\vec{y}-\vec{x_0}).$$

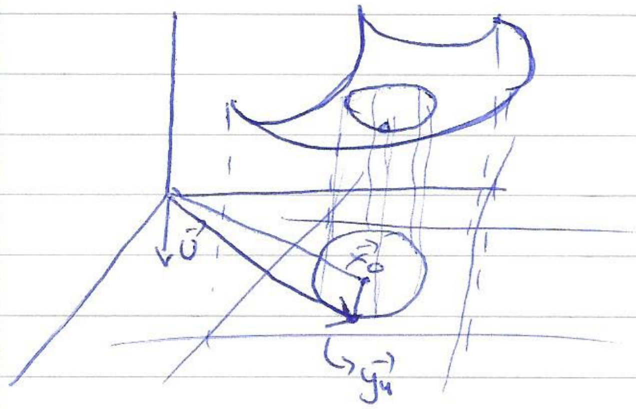
Άρα για $n\to\infty$ στην (1) έχαμε ότι $f(\vec{y})\geq f(\vec{x_0}) + \vec{u}\cdot(\vec{y}-\vec{x_0})$
$\forall\vec{y}\in\mathbb{R}^d \Rightarrow \vec{u}\in\partial f(x_0)$ άρα το $\partial f(x_0)$ κλειστό.

Φραγμένο: Θα δείξω ότι $\exists\ M>0 : \|\vec{u}\| \leq M \ \forall \vec{u} \in \partial f(x_0)$.

Έστω $\vec{u} \in \partial f(x_0)$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ και $\delta>0$ αφού $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ κυρτή $\Rightarrow f$ συνεχής άρα $\exists\ M(\delta)>0 : |f(\vec{x})| \leq M$ $\forall \vec{x} \in \hat{B}(\vec{x_0}, \delta)$.

Αφού $\vec{u} \in \partial f(\vec{x_0})$, τότε $f(\vec{y}) \geq f(\vec{x_0}) + \vec{u} \cdot (\vec{y} - \vec{x_0})\ \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^d$.

Θέτω $\vec{y_u} = \vec{x_0} + \delta \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ τότε $\vec{y_u} \in \hat{B}(\vec{x_0}, \delta)$



Άρα, $f(\vec{y_u}) \geq f(\vec{x_0}) + \delta \dfrac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|}$

$\Rightarrow f(\vec{y_u}) \geq f(\vec{x_0}) + \delta \|\vec{u}\|$

Οπότε, $2M(\delta) \geq |f(\vec{y_u})| + |f(\vec{x_0})| \geq |f(\vec{y_u}) - f(\vec{x_0})| \geq f(\vec{y_u}) - f(\vec{x_0})$ $\geq \delta \|\vec{u}\|$

Άρα, $\|\vec{u}\| \leq \dfrac{2M(\delta)}{\delta}$ οπότε το $\partial f(x_0)$ φραγμένο.

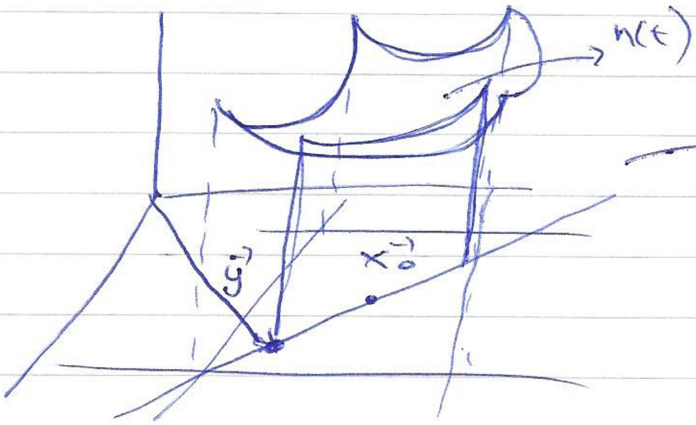
$\boxed{B = \partial f(x_0)}$.

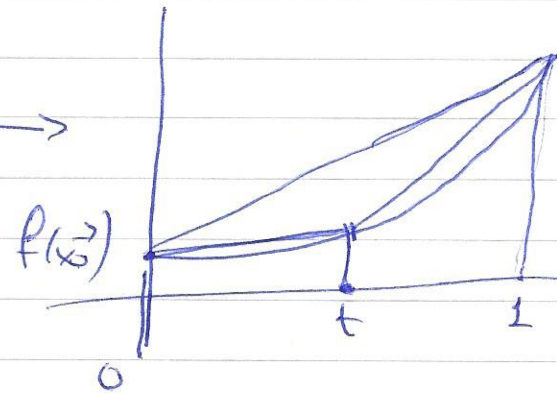
$\partial f(x_0) \subseteq B$: Έστω $\vec{u} \in \partial f(x_0) \Rightarrow f(\vec{y}) \geq f(\vec{x_0}) + \vec{u}(\vec{y} - \vec{x_0})$
$\vec{y_a} = \vec{x_0} + t\vec{a}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$, $t>0$
τότε
$$\frac{f(\vec{x_0} + t\vec{a}) - f(\vec{x_0})}{t} \geq \vec{u} \cdot \vec{a}$$ οπότε για $t \to 0^+$

έχουμε ότι $f_+'(\vec{x_0})(\vec{a}) \geq \vec{u} \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{u} \in B$.

$B \subseteq \partial f(x_0)$: Έστω $\vec{u} \in B$ τότε $f_+'(\vec{x_0})(\vec{a}) \geq \vec{a} \cdot \vec{u}$ $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^d$.

Έστω $\vec{y} \in \mathbb{R}^d$, Θέτω $h(t) = f(\vec{x_0} + t \cdot (\vec{y} - \vec{x_0}))$
$h : [0,1] \to \mathbb{R}$, h κυρτή.





απ' το Λήμμα των τριών χορδών $(t > 0,\ t \in (0,1))$

$$\frac{g(1) - g(0)}{1} \geq \frac{g(t) - g(0)}{t}, \quad t \to 0^+$$

$\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{g(t) - g(0)}{t}$ $\exists$ από (i) και είναι ίσο με $f_+'(\vec{x_0})(\vec{y} - \vec{x_0})$

Άρα, $g(1) - g(0) \geq f_+'(\vec{x_0})(\vec{y} - \vec{x_0}) \geq \vec{u} \cdot (\vec{y} - \vec{x_0})$

όμως $g(1) = f(\vec{y})$, $g(0) = f(\vec{x_0})$ οπότε
$f(\vec{y}) \geq f(\vec{x_0}) + \vec{u} \cdot (\vec{y} - \vec{x_0})$ $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \vec{u} \in \partial f(\vec{x_0})$.

Άρα $\partial f(x_0) = B$.

Φραγμένες Γραμμικές Απεικονίσεις:

Υπενθύμιση: Έστω $T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ τότε η T γραμμική απεικόνιση $\iff \exists \vec{a} \in \mathbb{R}^d : T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d$.

"$\Leftarrow$" προφανής
"$\Rightarrow$" Θέταμε $a_i = T(e_i)$.

Επομένως για γραμμικές απεικονίσεις $T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|T(\vec{x})| = |\vec{a} \cdot \vec{x}| \leq \underbrace{\|\vec{a}\|}_{M} \cdot \|\vec{x}\|$ είναι και φραγμένες, οπότε στον Gateaux-Frechet η υπόθεση ότι οι γραμμικές απεικονίσεις είναι και φραγμένες είναι περιττή. Αυτή η υπόθεση έχει νόημα σε χώρους άπειρης διάστασης και μας εξασφαλίζει την συνέχεια της γραμμικής απεικόνισης.

Γενικά, μεταξύ δύο δ.χώρων X, Y με νόρμα ισχύουν τα εξής:

Θεώρημα 1:
Έστω X, Y όπως παραπάνω και $T: X \to Y$ γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) η T φραγμένη στην $\hat{B}_{\|\cdot\|_X}(0,\delta)$ για κάποιο $\delta > 0$
(ii) η T συνεχής στο 0
(iii) η T συνεχής στον X
(iv) η T ομ. συνεχής στον X
(v) $\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X$ και $M > 0$.

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (v)

Έστω $\|T(x)\|_Y \leq M$, $\forall x \in \hat{B}_{\|\cdot\|_X}(0,\delta)$. Έστω $x \neq 0$ τότε $\dfrac{\|\delta x\|_X}{\|x\|_X} = \delta \Rightarrow \dfrac{\delta x}{\|x\|_X} \in \hat{B}(0,\delta)$

άρα $\left\| T\left(\dfrac{\delta x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \dfrac{\delta}{\|x\|_X}\|T(x)\|_Y \leq M \Rightarrow \|T(x)\|_Y \leq \dfrac{M}{\delta}\|x\|_X$ και έπεται το ζητούμενο

Οι συνεπαγωγές (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) είναι άμεσες.

Το επόμενο Θεώρημα χαρακτηρίζει τους πεπερασμένα παραγόμενους δ. χώρους με νόρμα μέσω των γραμμικών απεικονίσεων.

Θεώρημα 2 :
Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος $\Longleftrightarrow$ κάθε γραμμική απεικόνιση $T: X \to Y$ είναι συνεχής.

Το παραπάνω Θεώρημα μας λέει ότι σε κάθε χώρο με νόρμα άπειρης διάστασης υπάρχει μια τουλάχιστον γραμμική απεικόνιση που δεν είναι συνεχής.

Ένα παράδειγμα : Έστω X ο χώρος όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Η συνάρτηση $T: X \to \mathbb{R}$ με $T(f) = f'(0)$.

είναι γραμμική αλλά δεν είναι συνεχής.

αν πάρουμε $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 \cdot x)}{n}$ τότε

$\|f_n - 0\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{n\to\infty} 0 \in X$

αλλά $T(f_n) = \dfrac{n^2 \cdot \cos(n^2 \cdot 0)}{n} = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Επομένως η υπόθεση ότι $\|T(x)\|_Y \le M\|x\|_X$ όπως ορισμούς 1-2 (Gateaux-Frechet) μας εξασφαλίζει ότι η T θα είναι και συνεχής.

Τέλος!

Βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε:

1) Άρθρο: Richard A. Tapia, "A unified approach to Mathematical optimization and Lagrange multiplier theory for scientists and engineers."

2) Βιβλίο: B. V. Limaye: Functional Analysis, Wiley, 1981, pp. 41-50.

3) Βιβλίο: Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 1997, "Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση".

4) Σημειώσεις από το προπτυχιακό μάθημα Απειροστικός Λογισμός III.