Δευτέρα 22 Απριλίου 2013 Κυρτή Ανάλυση

Μάθημα 10

→ Σχέση θετικά ομογενούς κυρτής συνάρτησης με κυρτό σύνολο / Ημινόρμα - Νόρμα

→ Συνάρτηση Στάθμης, Συνάρτηση Στήριξης

→ Πολικό σύνολο / Πολύεδρο - Πολύτοπα

Ορισμοί: Έστω $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

(i) Η f καλείται θετικά ομογενής αν $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall \lambda \geq 0$ και $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $(f(0)=0)$

(ii) Η f υποπροσθετική $\Leftrightarrow$ $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

(Άσκηση (*)
f θετικά ομογενής + υποπροσθετική $\Leftrightarrow$ f θετικά ομογενής + κυρτή)

(iii) Αν $f \geq 0$, $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, θετικά ομογενής και είναι κυρτή τότε καλείται ημινόρμα
- Αν $M = \{x : f(x) = 0\}$ → διανυσματικός υπόχωρος

(iv) Αν f είναι ημινόρμα, $M = \{x: f(x)=0\}$, $\dim M = 0$ $(f^{-1}(\{0\}) = 0)$ τότε η f λέγεται νόρμα

π.χ.

ημινόρμες στον $\mathbb{R}^2$:

$f((x,y)) = 0$

$f((x,y)) = |x|$, $f((x,y)) = |x-y|$ ...

(*) $(\Rightarrow)$ $\lambda \in (0,1)$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq f((1-\lambda)x) + f(\lambda y) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$

$(\Leftarrow)$ $\frac{1}{2} f(x+y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) \Rightarrow f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

Άσκηση

Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ θετικά ομογενής + κυρτή. Τότε για κάθε $v_0\in\mathbb{R}^d$ $\exists\, x_0\in\mathbb{R}^d$: $f(v_0)=\langle x_0,v_0\rangle$ και $f(v)\geq\langle x_0,v\rangle$ $\forall v\in\mathbb{R}^d$

Λύση

Η f είναι κυρτή $\Rightarrow \partial f(v_0)\neq\emptyset$

Έστω λοιπόν $x_0\in\partial f(v_0)$

Τότε $f(v)\geq f(v_0)+\langle x_0,v-v_0\rangle : v\in\mathbb{R}^d \Rightarrow$

$\Rightarrow f(v)\geq \langle x_0,v\rangle+[f(v_0)-\langle x_0,v_0\rangle]$ (1)

Έστω $c=f(v_0)-\langle x_0,v_0\rangle$ (θέλουμε ν.δ.ο. $c=0$)

Έχουμε ότι:

$f(\lambda v_0)-\lambda\langle x_0,v_0\rangle=\lambda c\geq c$ (θέτουμε $v=\lambda v_0$ στην (1))

Άρα $(\lambda-1)c\geq 0$ $\forall\lambda\geq 0 \Rightarrow \underline{\underline{c=0}}$

Τι ορίζει μια $f=$ θετικά ομογενής + κυρτή ;;;

$K_f=\{x: f(x)\leq 1\}$

(i) $K_f=$ κυρτό ($f=$ κυρτή)

(ii) $K_f=$ κλειστό ($f=$ κυρτή, άρα συνεχής, $K_f=f^{-1}((-\infty,1])$)

(iii) $0\in$ εσK_f ($f(0)=0<1$)

(iv) εσ$K_f=\{x: f(x)<1\}$

(v) Έστω $x\in\mathbb{R}^d$ και $\lambda>0$: $\frac{x}{\lambda}\in K_f \Rightarrow f(\frac{x}{\lambda})\leq 1\Rightarrow f(x)\leq\lambda$

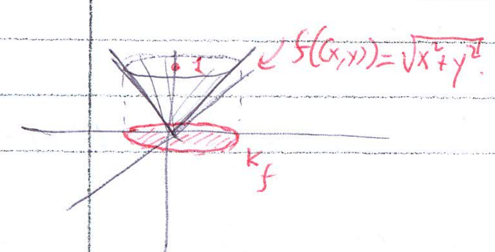
Άρα, $\forall x\in\mathbb{R}^d$ $\exists\,\lambda>0 : x\in\lambda K_f$

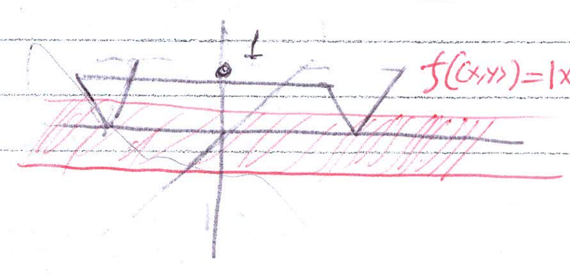
Αν έχουμε ακόμα $f\geq 0$, τότε $f(x)=\inf\{\lambda\geq 0: x\in\lambda K_f\}$

Αντίστροφα, έστω $K\neq\emptyset$, $K\subseteq\mathbb{R}^d$. Θέτουμε

$$g_K(x)=\inf\{\lambda>0: x\in\lambda K\}\in[0,+\infty]$$

Η g_K ονομάζεται συνάρτηση στάθμης ή συναρτησιοειδές Minkowski του K.





Πρόταση: Έστω $K=$ κυρτό + κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^d$, $0 \in \varepsilon\sigma K$.

(i) $g_K(x) \in [0,+\infty)$

(ii) g_K θετικά ορισμένη + κυρτή

(iii) $\varepsilon\sigma K = \{x : g_K(x) < 1\} \subseteq K = \{x : g_K(x) \leq 1\}$

(iv) Έστω $f \geq 0$, $f=$ θετικά ομογενής + κυρτή και $L = \{x : f(x) \leq 1\}$. Τότε $f = g_L$

Απόδειξη

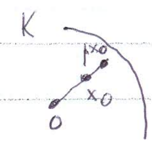
(i) Έστω $x \in \mathbb{R}^d$. Αν $x = 0 \Longrightarrow 0 \in 1 \cdot K$, $g_K(0) \leq 1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } x \neq 0 \\ 0 \in \varepsilon\sigma K,\ B(0,r) \subseteq K\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{xr}{\|x\|} \in B(0,r) \subseteq K \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x \in \frac{\|x\|}{r} K \Longrightarrow g_K(x) \leq \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{-1} < +\infty$$

(ii) Χρησιμοποιούμε το εξής: $(\lambda+\mu)K = \lambda K + \mu K$ για $\lambda, \mu \geq 0$ ($K=$κυρτό)
(αφήνεται ως άσκηση το (ii))

(iii) $\{x : g_K(x) < 1\} =$ ανοικτό $\subseteq \varepsilon\sigma K$



Έστω $x_0 \in \varepsilon\sigma K$. Τότε $\exists\, \mu > 1$ ώστε $\mu x_0 \in K$

Τότε, $x_0 \in \frac{1}{\mu} K$, $g_K(x_0) \leq \frac{1}{\mu} < 1$

$K \subseteq \{x : g_K(x) \leq 1\}$ (προφανώς)

Έστω $x_0 : g_K(x_0) \leq 1$ $\begin{cases} g_K(x_0) < 1 \Rightarrow x_0 \in \varepsilon\sigma K \subseteq K \\ g_K(x_0) = 1 \end{cases}$

$\exists\, \lambda_n \to 1 = g_K(x_0)$

$x \in \lambda_n K$, $x = \lambda_n x_n$, $x_n \in K$

Άρα, $\underset{\substack{\Uparrow \\ K}}{x_n} = \frac{x}{\lambda_n} \to x \in \overline{K} = K$

(iv) $L=\{x: f(x)\le 1\}$, $0\in \varepsilon\sigma L$, $L=$ κλειστό + κυρτό

Ορίζεται g_L

Αν $f(x)=0 \Rightarrow \lambda f(x)=0\ \forall\lambda>0 \Rightarrow f(\lambda x)=0 \Rightarrow \lambda x\in L : \lambda>0$,

$0\le g_L(\lambda x)\le 1\ \forall \lambda>0 \Rightarrow \lambda g_L(x)\le 1\ \forall\lambda>0 \Rightarrow g_L(x)=0$

Ανάλογα $g_L(x)=0\Rightarrow f(x)=0$

Έστω $f(x)>0$

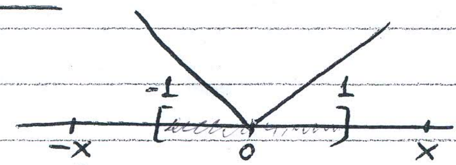
$f\left(\frac{x}{f(x)}\right)=1 \Rightarrow \frac{x}{f(x)}\in L$

$g_L\left(\frac{x}{f(x)}\right)\le 1 \Rightarrow g_L(x)\le f(x)$

Ανάλογα $f(x)\le g_L(x)$

Άρα $f\equiv g_L$

π.χ.



$K=[-1,1]$

κυρτό + κλειστό, $0\in\varepsilon\sigma K$, $x>0$

$g_K(x)=\inf\{\lambda>0: x\in[-\lambda,\lambda]=\lambda K\} = |x|$

Έχουμε μία αντιστοιχία:

$f\ge 0$, f Θ.Ο. + κυρτή $\xleftrightarrow{1-1}$ $K=\{x: f(x)\le 1\}$ κυρτό + κλειστό + $0\in\varepsilon\sigma K$

Πόρισμα: $K=$ κλειστό + κυρτό + $0\in \varepsilon\sigma K$.

(i) g_K ημινόρμα $\Leftrightarrow K=-K$ (K συμμετρικό)

(ii) g_K νόρμα $\Leftrightarrow K=-K$, $K=$ φραγμένο

Απόδειξη

(i) αφήνεται ως άσκηση (χρησιμοποιούμε $g_K(-x)=g_{-K}(x)$)

(ii)

($\Leftarrow$) Έστω ότι $g_K(x_0)=0$. Τότε, έχουμε $g_K(\lambda x_0)=\lambda g_K(x_0)=0$

$\Rightarrow \lambda x_0\in K : \lambda>0$ / $K=$ φραγμένο $\Rightarrow x_0=0$ (προφανώς)

Συνέχεια απόδειξης πορίσματος

($\Longrightarrow$)

Έστω ότι $g_K(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=0$ (g_K νόρμα)

Έστω ότι K δεν είναι φραγμένο. Άρα $\exists a_n \in K$ έτσι ώστε $\|a_n\| \longrightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{\|a_n\|} \longrightarrow 0$

Αν $\lambda>0 \Longrightarrow \frac{\lambda}{\|a_n\|} \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\|a_n\|}<1$ για $n \geq n_0$ (για ένα n_0)

$\Rightarrow (1-\frac{\lambda}{\|a_n\|})\overset{\in K}{0}+\frac{\lambda}{\|a_n\|}\overset{\in K}{a_n} \in K \;\; \forall n \geq n_0$, $\frac{\lambda}{\|a_n\|}a_n \in K$ $n \geq n_0$.

$\left(\frac{a_n}{\|a_n\|}\right)_n$ φραγμένη. Μπορούμε να υποθέσουμε $\frac{a_n}{\|a_n\|} \xrightarrow[n]{} a$, $\|a\|=1$

(αλλιώς παίρνουμε υπακολουθίες)

$\Longrightarrow \underbrace{\lambda \frac{a_n}{\|a_n\|}}_{\substack{\cap \\ K \; \forall n \geq n_0}} \xrightarrow[n]{} \lambda a \Rightarrow \lambda a \in K \;\; \forall \lambda>0$

Άρα $g_K(\lambda a)=\lambda g_K(a) \leq 1 \;\; \forall \lambda>0$ (αφού $\lambda a \in K$)

$\Rightarrow g_K(a)=0 \Rightarrow a=0$ και $\|a\|=1$

ΑΤΟΠΟ, διότι

είχαμε υποθέσει ότι η g_K είναι νόρμα

Άρα αν K κυρτό + συμπαγές + $0 \in \varepsilon\sigma K$, $K=-K \Rightarrow g_K=$ νόρμα

(Από ένα κυρτό + συμπαγές $\overset{+0\in \varepsilon\sigma K,\, K=-K}{}$ σύνολο ορίζουμε μια νόρμα)

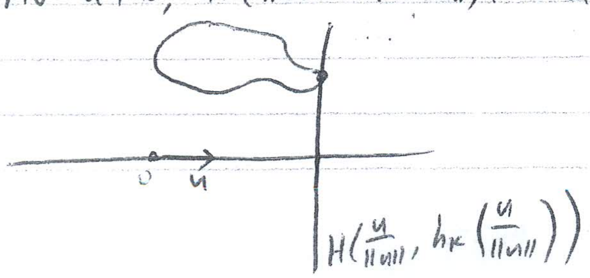
Συνάρτηση Στήριξης

Έστω $K=$ κυρτό + συμπαγές, $\varepsilon\sigma K \neq \emptyset$. Έστω ακόμα $u \in \mathbb{R}^d$

Ορίζουμε $h_K(u)=\max\{\langle u,x\rangle : x \in K\}$

$h_K(0)=0$ (προφανώς)

Αν $u \neq 0$, $H\left(\frac{u}{\|u\|}, h_K\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right)$ είναι φέρων υπερεπίπεδο



Πρόταση: Έστω K = κυρτό + συμπαγές ($+\; \varepsilon\sigma K \neq \phi$)

(i) h_K θετικά ομογενής + κυρτή ($\langle \cdot, x\rangle$ θετ. ομ. + προσθετική)

(ii) $K = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u\rangle \leq h_K(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^d\}$

(iii) f = θετικά ομογενής + κυρτή, τότε το $L = \{x : \langle x, u\rangle \leq f(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^d\} \neq \phi$, κυρτό + συμπαγές, $h_L = f$

Απόδειξη

(i) Είναι εύκολο από ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

(ii)

$K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u\rangle \leq h_K(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^d\} \rightarrow$ άμεσο

Έστω $x_0 : \langle x_0, u\rangle \leq h_K(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^d$ και $x_0 \notin K$.

Τότε $\exists u_0 \neq 0 : \langle a, u_0\rangle \leq c\ \forall a \in K$

$\langle x_0, u_0\rangle > c \geq h_K(u_0) = \langle a_0, u_0\rangle$ (για κάποιο $a_0 \in K$)

$\geq \langle x_0, u_0\rangle$ Άτοπο

(iii) Το L = κυρτό + κλειστό (άμεσο)

Έστω τώρα $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \in L$, $-f(e_i) \leq -\langle x, -e_i\rangle = x_i = \langle x, e_i\rangle \leq f(e_i)$

Άρα το L = φραγμένο

Μένει τώρα ν.δ.ο. $L \neq \phi$

Έστω $u_0 \in \mathbb{R}^d$. $\exists x_0 \in \mathbb{R}^d : f(u_0) = \langle x_0, u_0\rangle$, $f(u) \geq \langle x_0, u\rangle\ \forall u \in \mathbb{R}^d$

$\Rightarrow x_0 \in L$ (από Άσκηση, σχ. 2) (*)

$h_L(u) = \max\{\langle x, u\rangle : x \in L\} \leq f(u)$, $u \in \mathbb{R}^d \Rightarrow h_L \leq f$.

Έστω ότι $\exists v_0 : h_L(v_0) < f(v_0)$

$\exists^{(*)} x_0 \in L : f(v_0) = \langle x_0, v_0\rangle > h_L(v_0) = \max\{\langle x, v_0\rangle : x \in L\} \geq$

$\langle x_0, v_0\rangle$ Άτοπο

Πόρισμα K, L κυρτά + συμπαγή + ($\varepsilon\sigma K \neq \phi$). Τότε $K = L \Leftrightarrow h_K = h_L$

Απόδ.: ($\Leftarrow$) $K \overset{(ii)}{=} \{x : \langle x, u\rangle \leq \underset{h_K(u)}{h_L(u)}\ u \in \mathbb{R}^d\} \overset{(ii)}{=} L$

$\rightarrow h_K =$ θ. ομ. + κυρτή, $K = \{x : \langle x, u\rangle \leq h_K(u), u \in \mathbb{R}^d\}$ συμπαγές + κυρτό

Αν $0 \in K$, $h_K(u) \geq 0$

Αν $f \geq 0$, $f =$ θετ. ομ. + κυρτή τότε $L = \{x : f(x) \leq 1\}$, $g_L = f$
κυρτό+κλειστό+($0\in$εσK). Ορίζεται η g_L.

Ορίζουμε $\boxed{K^0 = \{u : h_K(u) \leq 1\},\ g_{K^0} = h_K}$ και το ονομάζουμε

<u>πολικό σύνολο</u> του K

$K^0 = \{u : \langle u, x\rangle \leq 1\ \forall x \in K\}$. Όμως αυτός ο ορισμός δεν χρειάζεται την κυρτότητα του K.

$\rightarrow$ Άρα $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$, $A \neq \emptyset$, ορίζουμε $A^0 = \{u : \langle u, x\rangle \leq 1\ \forall x \in A\}$

$A^0 =$ κυρτό + κλειστό + $0 \in$ εσA^0 (αφού τις ιδιότητες του εσ. γιν. $\langle 0, x\rangle = 0\ \forall x \in A$)

π.χ. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = \{0\} \Rightarrow A^0 = \mathbb{R}$

Αν $A = \{-1, +1\} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow A^0 = \{x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x(-1) \leq 1\} =$
$= [-1, +1]$

Αλλιώς, γράφουμε $A^0 = \bigcap_{x \in A} \underbrace{\{u : \langle x, u\rangle \leq 1\}}_{\text{ημίχωρος, για } u \neq 0}$

<u>Πρόταση:</u>

(i) Αν $A \subseteq B \Rightarrow A^0 \supseteq B^0$

(ii) $(\lambda A)^0 = \frac{1}{\lambda} A^0$, $\lambda > 0$

(iii) $(A \cup B)^0 = A^0 \cap B^0$

<u>Απόδειξη</u>

αφήνεται ως άσκηση

Πρόταση: Ισχύει ότι $A=A^\circ \Leftrightarrow A=B_2(0,1)$ ($B_2(0,1)$ – Ευκλ. κλειστή μοναδιαία σφαίρα)

Απόδειξη

$B_2^\circ(0,1)=B_2(0,1)$

Έστω $x\in B_2(0,1) \Rightarrow \langle x,y\rangle \overset{C-S}{\le} 1 \quad \forall y\in B_2(0,1) \Rightarrow x\in B_2^\circ(0,1)$

Έστω τώρα $x\in B_2^\circ(0,1)$

Αν $x=0 \Rightarrow x\in B_2(0,1)$

Αν $x\neq 0 \Rightarrow \langle x, \frac{x}{\|x\|}\rangle \le 1$

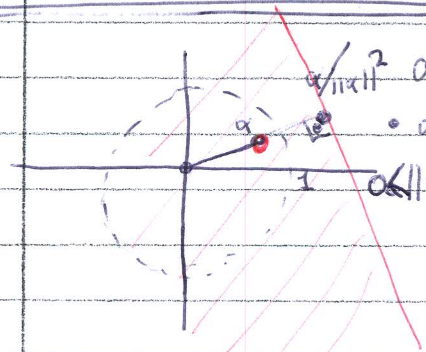
αφού $x\in B_2^\circ(0,1)$, $\frac{x}{\|x\|}\in B_2(0,1)$

$\Rightarrow \|x\|\le 1 \Rightarrow x\in B_2(0,1)$

($\Leftarrow$) Έστω $x\in A=A^\circ \Rightarrow \langle x,x\rangle \le 1 \Rightarrow x\in B_2(0,1)$

$\Rightarrow A^\circ = A\subseteq B_2(0,1)$

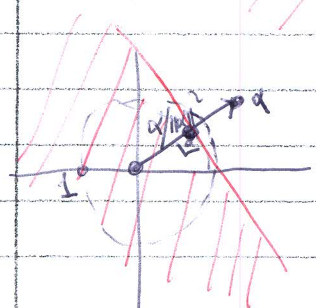
$\Rightarrow B_2^\circ(0,1)=B_2(0,1)\subseteq A^\circ = A$



$\alpha\in\mathbb{R}^2$, $A=\{\alpha\}$

- $\alpha=0 \Rightarrow A^\circ=\mathbb{R}^2$
- $0<\|\alpha\|<1$, $A^\circ=\{x\in\mathbb{R}^2 : \langle x,\alpha\rangle\le 1\}$

  A° = κλειστός ημίχωρος, $\frac{\alpha}{\|\alpha\|^2}\in bd A^\circ$



- $\|\alpha\|>1$, A° = κλ. ημίχωρος $\frac{\alpha}{\|\alpha\|^2}\in bd A^\circ$
- $\|\alpha\|=1$, $\alpha\in bd A^\circ$