Δευτέρα 15 Απριλίου 2013 Κυρτή Ανάλυση

Μάθημα 9

[**Υπενθύμιση:**

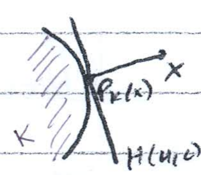
X χώρος Hilbert, $u \in X$, $\|u\|=1$, $c \in \mathbb{R}$ (Υπερεπίπεδο στον X)

$H(u,c)=\{x \in X : \langle x,u\rangle = c\}$, $X=(H(u,c)-x_0)\oplus\langle u\rangle$ $(x_0 \in H(u,c))$

• Αν K κυρτό + κλειστό, $x \notin K$.
Τότε $\exists H(u,c)$ τ.ω. x, K διαχωρίζονται αυστηρά

$$\sup_{y\in K}\langle y,u\rangle = c < \langle x,u\rangle$$

$$\left(u=\frac{x-P_K(x)}{\|x-P_K(x)\|} \right)$$



• Αν A, B κυρτά, A= συμπαγές + B= κλειστό, $A\cap B=\emptyset$. Τότε, τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά

• Αν A, B κυρτά + κλειστά, $A \cap B = \emptyset$. $\not\Rightarrow$ A, B διαχωρίζονται
(για X άπειρης διάστασης χώρο Hilbert $\rightarrow \ell^2$)

$\rightarrow$ Το κρίσιμο σημείο εντοπίζεται στο εξής:
Για το $K=A-B$ (κυρτό) και το $0 \notin A-B$, $0 \in bd(A-B)$
δεν υπήρχε $x \notin A-B$, $x \neq 0$ ώστε $P_K(x)=0$
(το $A-B$ από τη κατασκευή του ήταν πυκνό στο ℓ^2)]

Διαχωριστικά Θεωρήματα στον $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$

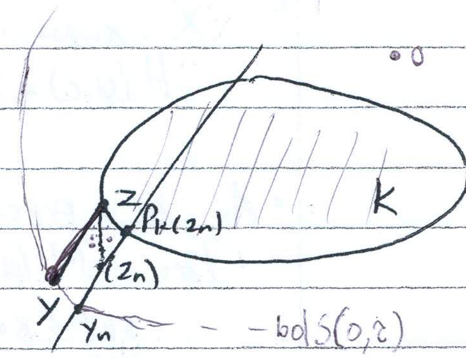
Το βασικό μας εργαλείο εδώ είναι ότι η $\bar{S}(0,1)$ είναι συμπαγής (Αυτό αποτελεί χαρακτηρισμό για τους χώρους πεπερασμένης διάστασης $\rightarrow$ Θεώρημα Riesz)

__Θεώρημα__

K = κυρτό + συμπαγές, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε $\varepsilon\sigma K \neq \emptyset$ και $K \subseteq S(0,r)$

Τότε $P_K : bd\, S(0,r) \longrightarrow bd\, K$ είναι επί, δηλ. $\forall z \in bd\, K \ \exists y : \|y\| = r$ ώστε $P_K(y) = z$

__Απόδειξη__



Έστω $z \in bd\, K \subseteq S(0,r)$

Άρα $\exists\, z_n \in S(0,r),\ z_n \notin K : z_n \to z$

Τότε $\underset{K}{P_K(z_n)} \to P_K(z) = z$ (P_K = συνεχής) (1)

Παίρνουμε τώρα την ευθεία $l_n = \{P_K(z_n) + t(z_n - P_K(z_n)), t \geq 0\}$

Έστω $y_n \in l_n \cap bd\, S(0,r)$. Τότε $P_K(y_n) = P_K(z_n)$ (2)

Ακόμα, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $bd\, S(0,r)$ που είναι συμπαγές (λόγω της πεπερασμένης διάστασης)

Άρα $\exists\, y_{k_n} \to y \in bd\, S(0,r)$

Από (1), (2) $P_K(y_{k_n}) \to z$ και $P_K(y_{k_n}) \to P_K(y)$

Άρα $P_K(y) = z$ και $\|y\| = r$ ($y \in bd\, S(0,r)$)

__Ορισμός:__ Έστω $K \subsetneq \mathbb{R}^d$, $x_0 \in K$. Το $H(u,c)$ __φέρων υπερεπίπεδο__ ή __υπερεπίπεδο στήριξης__ του K στο x_0 αν ισχύουν τα εξής

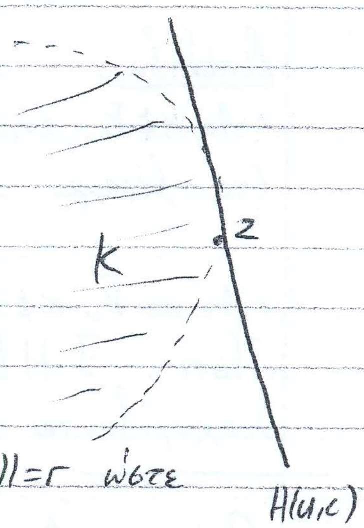
(i) $\langle x_0, u \rangle = c$

(ii) $\langle x, u \rangle \leq c$, $x \in K$

(iii) $K \not\subseteq H(u,c)$

Θεώρημα: Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό, $z \in rb\, K\ (= rb\, \bar{K})$. Τότε, υπάρχει φέρων υπερεπίπεδο του $\bar{K}$ στο z.

Απόδειξη



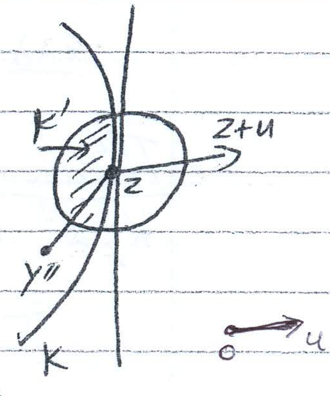
Επειδή $rb = rb\, \bar{K}$, $ri\, K = ri\, \bar{K} \neq \emptyset$
μπορούμε να υποθέσουμε K=κλειστό
και εσ$K \neq \emptyset$.

1η περίπτωση:
K= φραγμένο. Έστω $z \in bd\, K$
Έστω $S(0,r)$: $K \subseteq S(0,r)$. Τότε $\exists y: \|y\| = r$ ώστε
$z = P_K(y)$ $(y \neq z)$
Θέτουμε $u = \frac{y-z}{\|y-z\|}$, $c = \langle z, u \rangle$.

Τότε, από απόδειξη που έχουμε και για χώρους Hilbert γενικά το $H(u,c)$ είναι φέρων υπερεπίπεδο.
(Το πρόβλημα είναι η ύπαρξη του $y \in bd\, S(0,r)$ που το έχουμε εδώ λόγω της πεπερασμένης διάστασης)

2η περίπτωση
K τυχαίο κυρτό + κλειστό. Έστω $z \in bd\, K$.
Παίρνουμε $K' = K \cap \bar{S}(z,1)$ = συμπαγές + κυρτό
και $z \in bd\, K'$ (έπεται άμεσα)
Τότε υπάρχει $u \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}: \|u\| = 1$,

$$\langle y, u \rangle \le c, \quad y \in K'$$
$$\langle z, u \rangle = c$$



Παίρνουμε $y'' \in K$, $\|y'' - z\| > 1$ και τότε

$$y'' = z + \frac{y''-z}{\|y''-z\|}(1+t) \quad \text{για κάποιο } t > 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \langle y'', u \rangle = \langle \underbrace{z + \frac{y''-z}{\|y''-z\|}}_{\in K'}, u \rangle + \frac{t}{\|y''-z\|} \underbrace{\langle y''-z, u \rangle}_{\le 0} \le c$$

Πόρισμα (Διαχωρισμός κυρτού συνόλου και σημείου $x\notin K$)

$K=$ κυρτό, $K\subseteq\mathbb{R}^d$, $\dim K=d$. Έστω $x\notin K$. Τότε τα K, x διαχωρίζονται γνήσια

Απόδειξη:

• Αν $x\notin \bar{K}=$ κυρτό + κλειστό, τότε τα $x,\bar{K}$ διαχωρίζονται αυστηρά (το ξέρουμε και για χώρους Hilbert)

• Αν $x\in\bar{K}$, $x\notin K \Rightarrow x\in \mathrm{bd}K$

Τότε $\exists H(u,c)$ φέρων του $\bar{K}$ στο x. Άρα, τα $x,\bar{K}$ διαχωρίζονται γνήσια

Θεώρημα: Αν A,B κυρτά με $\mathrm{ri}A\cap \mathrm{ri}B=\emptyset$. Τότε, τα A,B διαχωρίζονται γνήσια

Απόδειξη

$\mathrm{ri}\bar{A}=\mathrm{ri}A$, $\mathrm{ri}\bar{B}=\mathrm{ri}B$

$K=\mathrm{ri}A-\mathrm{ri}B\rightarrow$ κυρτό, $0\notin K$ ($\mathrm{ri}A\cap\mathrm{ri}B=\emptyset$)

Άρα το $0,K$ διαχωρίζονται γνήσια $\Rightarrow \mathrm{ri}A,\mathrm{ri}B$ διαχ. γνήσια

$\Rightarrow \exists u,\ \|u\|=1, c\in\mathbb{R}: \langle x,u\rangle\le c\le\langle y,u\rangle,\ x\in\mathrm{ri}A,\ y\in\mathrm{ri}B$

Άρα, $\langle x,u\rangle\le c\le\langle y,u\rangle$ $x\in\underset{\bar{A}}{\overset{}{\overline{\mathrm{ri}A}}}$, $y\in\underset{\bar{B}}{\overline{\mathrm{ri}B}}$

(με $\overline{\mathrm{ri}A}=\bar{A}$, $\overline{\mathrm{ri}B}=\bar{B}$)

δηλ τα $\bar{A},\bar{B}$ διαχωρίζονται γνήσια

Πόρισμα

$K\subsetneq\mathbb{R}^d$ κυρτό + κλειστό. Τότε $K=\bigcap\{H^+(u,c) : H(u,c)$ φέρων του $K\}$

Ακραία σημεία – Θεώρημα Minkowski

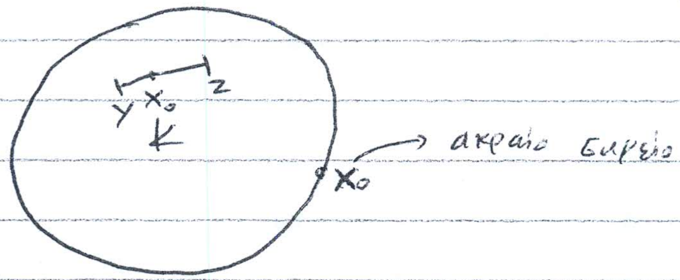
Ορισμός: Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $x_0 \in K$. (~~Το x_0 είναι ακραίο σημείο του~~ [illegible]) Το x_0 ονομάζεται ακραίο σημείο του K (συμβολισμός: $x_0 \in \text{ext}\, K$) $\Leftrightarrow$ αν υπάρχουν $y, z \in K$ και $\lambda \in (0,1)$ ώστε $x_0 = (1-\lambda)y + \lambda z$ τότε $y = z = x_0$

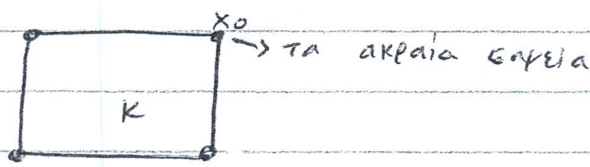
$\Leftrightarrow$ δεν υπάρχει $[y,z] \subseteq K$ ώστε $x_0 \in (y,z)$

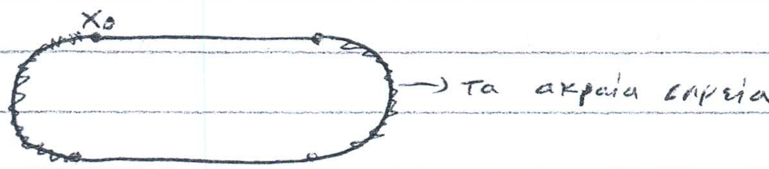
Παραδείγματα

Προφανώς $\text{ext}\, K \subseteq \text{bd}\, K$

K = κυρτό.







Ασκήσεις

1) Έστω K = κυρτό + συμπαγές, $\dim K = 2$. Τότε το $\text{ext}\, K$ (το σύνολο των ακραίων σημείων) είναι κλειστό

2) Να κατασκευαστεί K = συμπαγές + κυρτό, $\dim K = 3$ και το $\text{ext}\, K$ να μην είναι κλειστό.

3) Αν K = κυρτό + συμπαγές, τότε $\text{ext}\, K$ είναι G_δ – σύνολο ($\text{ext} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subseteq K$, ανοιχτά στο K)

Ασκήσεις (προς λύση)

1) K κυρτό

$x_0 \in ext\, K \Leftrightarrow K \setminus \{x_0\}$ είναι κυρτό

Λύση

$(\Rightarrow)$

Έστω $y, z \in K \setminus \{x_0\}$ $(y \neq z)$

Τότε, επειδή $x_0 \in ext\, K \Rightarrow x_0 \notin [y,z]$

Όμως $[y,z] \subseteq K$ (K = κυρτό)

$\Rightarrow [y,z] \subseteq K \setminus \{x_0\}$

Άρα $K \setminus \{x_0\}$ είναι κυρτό

$(\Leftarrow)$

Έστω ότι $K \setminus \{x_0\}$ = κυρτό.

Θεωρούμε $y, z \in K \setminus \{x_0\}$ = κυρτό $\Rightarrow [y,z] \subseteq K \setminus \{x_0\}$

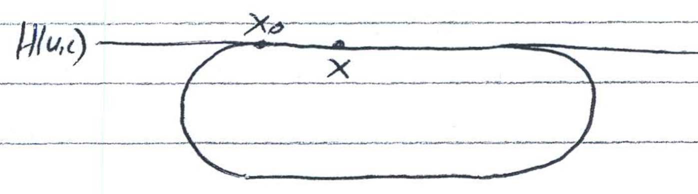
$\Rightarrow \nexists\, y, z \in K,\ y \neq z$ ώστε $x_0 \in [y,z]$

Άρα $x_0 \in ext\, K$

---

2) K = κυρτό + κλειστό και έστω $x \in bd\, K$. Θεωρούμε ακόμα $F = H(u,c) \cap K$, $H(u,c)$ = φέρων υπερεπίπεδο του K στο x. Τότε $ext\, F \subseteq ext\, K$

Λύση



Αν $ext\, F = \emptyset$ ισχύει

Έστω $x_0 \in ext\, F$, $\langle x_0, u \rangle = c$

Τότε $F = \{x : \langle x, u \rangle = c\} \cap K$

Έστω $\lambda \in (0,1)$: $x_0 = (1-\lambda) y_1 + \lambda y_2$, $y_1, y_2 \in K$

$c = \langle x_0, u \rangle = (1-\lambda)\langle y_1, u \rangle + \lambda \langle y_2, u \rangle \leq (1-\lambda)c + \lambda c = c$

Άρα $\langle y_1, u \rangle = c = \langle y_2, u \rangle \Rightarrow y_1, y_2 \in F$

Άρα $x_0 = (1-\lambda) y_1 + \lambda y_2 \in ext\, F$ με $y_1, y_2 \in F$

$\Rightarrow y_1 = y_2 = x_0 \Rightarrow x_0 \in ext\, K$

Θεώρημα Minkowski

Έστω K κυρτό + συμπαγές. Τότε $K = con(ext\,K)$. Επιπλέον, εάν $A \subseteq K$ και $K = con\,A$ τότε $ext\,K \subseteq A$.
(το σύνολο $ext\,K$ είναι το μικρότερο σύνολο που η κυρτή του θήκη παράγει το K)

Απόδειξη

Προφανώς $con(ext\,K) \subseteq K =$ κυρτό $(ext\,K \subseteq K)$
Θα γίνει επαγωγή όταν $\dim K = d$.
Εάν $d=0$, $K=\{x_0\}$, $\{x_0\} = ext\,K \to$ ισχύει

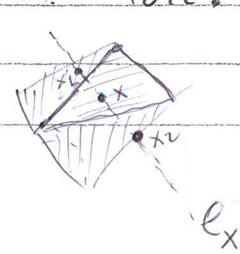
- $d=1$: $K =$ κυρτό + συμπαγές $\to K = [a,b]$ για $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{b}$
  $ext\,K = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, $K = con(\{\vec{a}, \vec{b}\}) \to$ ισχύει
- Έστω ότι ισχύει $K' = con(ext\,K')$ για κάθε K' = κυρτό + συμπαγές και $\dim K \leq d$ με $d \geq 1$

Έστω K = κυρτό + συμπαγές με $\dim K = d+1$
Έστω $x \in K$. Τότε $x \in bd\,K$ ή $x \in$ εσ$\,K$

Αν $x \in bd\,K$ $\exists\, H(u,c)$ φέρων υπερεπίπεδο του K στο x.
$\emptyset \neq F = \underbrace{K}_{\text{συμπ.}} \cap \underbrace{H(u,c)}_{\text{κλ.}}$ = συμπαγές + κυρτό, $\dim F \leq d$

Άρα $F = con(ext\,F)$ (από επαγωγική υπόθεση)
Τότε $x \in F = con(ext\,F) \subseteq con(ext\,K)$ (από προηγούμενη άσκηση)
$\implies x \in con(ext\,K)$

Αν $x \in$ εσ K
Θεωρούμε
l_x τυχαία ευθεία που περνά από το x. Τότε
$K \cap l_x = [x_1, x_2]$, $x_1 \neq x_2$ και $x_1, x_2 \in bd\,K$. Τότε:
$x_1 \in bd\,K \implies x_1 \in con(ext\,K)$
$x_2 \in bd\,K \implies x_2 \in con(ext\,K)$



Έστω $A \subseteq K$, $K = \operatorname{con} A$.
Αν $\exists\, x_0 \in \operatorname{ext} K$, $x_0 \notin A$
τότε $A \subseteq K \setminus \{x_0\}$.
$x_0 \in \operatorname{ext} K \Rightarrow K \setminus \{x_0\} =$ κυρτό (6ελ. 6)
Άρα, $K = \operatorname{con} A \subseteq K \setminus \{x_0\}$. Άτοπο.
Άρα $\operatorname{ext} K \subseteq A$.

Τότε $x \in [x_1, x_2] \subseteq \operatorname{con}(\operatorname{ext} K)$
Και έχουμε το ζητούμενο

Σημείωση: Αν $X =$ τοπικά κυρτός Hausdorff (π.χ. $X =$ χώρος με νόρμα) και $K =$ κυρτό + συμπαγές, τότε $K = \overline{\operatorname{con}}(\operatorname{ext} K)$
(Θ. Krein-Milman)

Η δυσκολία της απόδειξης είναι στο να αποδείξουμε ότι $\operatorname{ext} K \neq \emptyset$. Για αυτό χρειαζόμαστε το Λήμμα του Zorn (Στη πεπερασμένη διάσταση με τη βοήθεια της επαγωγής περνάμε από τη μια διάσταση στην άλλη. Σε τυχαίο χώρο με νόρμα χρειαζόμαστε Λήμμα Zorn)

Στο αντιπαράδειγμα που είχαμε δώσει για το ότι αν $B =$ συμπαγές ~~κλειστό~~ $\not\Rightarrow \operatorname{con} B$ κλειστό (για τον ℓ_2) ~~φαίνεται~~ η αναγκαιότητα της θήκης ~~στο~~ $\operatorname{con}(\operatorname{ext} K)$

Θεώρημα: Έστω $f: K \to \mathbb{R}$, $K =$ κυρτό + συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$, $f =$ κυρτή
Τότε $\exists\, x_0 \in \operatorname{ext} K$: $f(x_0) = \max\limits_{x \in K} f(x)$

Ιδιαιτέρως, εάν η $g(x) = \langle x, u \rangle$ $(u \neq 0)$ είναι γραμμική τότε
$\exists\, x_0, y_0 \in \operatorname{ext} K$: $g(x_0) \le g(x) \le g(y_0)$, $x \in K$.

Απόδειξη
$f =$ συνεχής, $K =$ συμπαγές $\Rightarrow \exists\, x' \in K$: $f(x') = \max\limits_{x \in K} f(x) = M$
$x' \in K = \operatorname{con}(\operatorname{ext} K)$
Άρα $x' = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$, $\lambda_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $x_i \in \operatorname{ext} K$

Τότε $M = f(x') \le \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_k f(x_k) \le (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) M = M$
Άρα $(\lambda_i > 0)$ $M = f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_k)$.

Ασκήσεις

1. Έστω K κυρτό + συμπαγές, $\dim K = d$. Τότε, για $x \in K$ $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in \operatorname{ext} K : 1 \leq \nu \leq d+1$ και $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$, $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$