Δευτέρα 4 Μαρτίου 2013 Κυρτή Ανάλυση

Μάθημα 4

Υπενθύμιση:

$f: I \to \mathbb{R}$, $I =$ ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, f κυρτή. Αν $x_0 \in I$ τότε $\exists\, u \in \mathbb{R}: f(y) \geq f(x_0) + u(y - x_0),\ y \in I$

$$\partial f(x_0) = \{u \in \mathbb{R}: f(y) \geq f(x_0) + u(y-x_0),\ y \in I\} = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$$

Θα αποδείξουμε ανάλογη ιδιότητα για $f: C \to \mathbb{R}$, $C =$ ανοικτό $+$ κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $f: C \to \mathbb{R}$, $C =$ ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^d$, $f =$ κυρτή και $\Gamma \subseteq C$, Γ συμπαγές, τότε $\exists\, L = L(\Gamma): |f(x) - f(x')| \leq L\|x - x'\|$ για $x, x' \in \Gamma$

Λήμμα: Έστω $f: C \to \mathbb{R}$, $C =$ ανοικτό $+$ κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$, $0 \in C$, $f(0) = 0$. Έστω H_k υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$ με $1 \leq \dim H_k \leq d-1$. Υποθέτουμε ότι $\exists\, u_k \in H_k: f(x) \geq u_k \cdot x,\ x \in C \cap H_k$

Τότε $\exists\, w \in \mathbb{R}^d$, $H_{k+1} = \langle H_k, w\rangle$, $\dim H_{k+1} = k+1$ και $u_{k+1} = u_k + a w \in H_{k+1}$ ώστε $f(y) \geq u_{k+1} \cdot y,\ y \in C \cap H_{k+1}$

Απόδειξη:

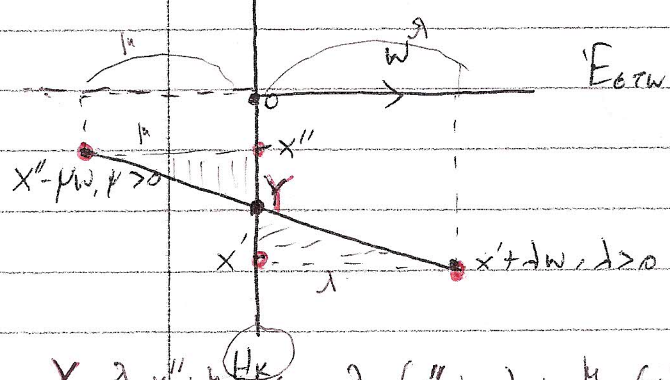
Έστω $h(z) = f(z) - u_k \cdot z$, $z \in C$

Η h είναι κυρτή, $h(0) = 0$, $h(x) \geq 0$ $x \in C \cap H_k$ (από υπόθεση)

$\dim H_k \leq d-1$, Τότε $\exists\, w \in H_k^{\perp}$, $\|w\| = 1$.

Θεωρούμε $H_{k+1} = \langle H_k, w \rangle$, $\dim H_{k+1} = k+1$

Έστω $x', x'' \in H_k \cap C$ και $\lambda, \mu > 0$ έτσι ώστε $x' + \lambda w,\ x'' - \mu w \in H_{k+1} \cap C$



$$Y = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} x'' + \frac{\mu}{\lambda+\mu} x' = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(x'' - \mu w) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(x' + \lambda w)$$

$C \cap H_K$

Παίρνουμε τώρα $0 \le h\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x'' + \frac{\mu}{\lambda+\mu}x'\right) = h\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(x''-\mu w) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(x'+\lambda w)\right)$

Όμως η h είναι κυρτή $\Rightarrow 0 \le h\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(x''-\mu w) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(x'+\lambda w)\right) \le$

$\le \frac{\lambda}{\lambda+\mu} h(x''-\mu w) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} h(x'+\lambda w)$. Άρα ($\lambda+\mu>0$) έχουμε ότι

$$\frac{h(x'+\lambda w)}{\lambda} \ge \frac{h(x''-\mu w)}{-\mu}$$

Επομένως $t = \inf\left\{\frac{h(x'+\lambda w)}{\lambda},\ x' \in H_K, \lambda>0 \text{ με } x' \in C, x'+\lambda w \in C\right\} \ge$

$\ge \sup\left\{\frac{h(x''-\mu w)}{-\mu},\ x'' \in H_K, \mu>0 \text{ με } x'' \in C, x''-\mu w \in C\right\} = s$

Έστω $a \in \mathbb{R}$, $s \le a \le t$

Τότε $h(x+tw) \ge at$, $x \in H_K \cap C$, $t \in \mathbb{R}$ με $x+tw \in C \cap H_{K+1}$

Αν $y \in H_{K+1}$, $y = x+tw$, $x \in H_K$, $t \in \mathbb{R}$ και έστω ακόμα

$u_{K+1} = u_K + aw \in H_{K+1}$

$f(y) = f(x+tw) = h(x+tw) + u_K\cdot(x+tw) \ge at + u_K\cdot(x+tw) =$

$= (u_K + aw)\cdot(x+tw) = u_{K+1}\cdot y$ $\quad (w \perp x \in H_K,\ w\cdot w = \|w\|^2 = 1)$

Θεώρημα (τύπου Hahn-Banach): Έστω $g: C \to \mathbb{R}$, C = αν. + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$

g = κυρτή, $x_0 \in C$. Τότε $\exists\, u_d \in \mathbb{R}^d : g(y) \ge g(x_0) + u_d\cdot(y-x_0)$, $y \in C$

Απόδειξη

Έστω $f(x) = g(x+x_0) - g(x_0)$, $x \in K = C - x_0$ = ανοιχτό και κυρτό

$f(0) = 0$

Έστω $H_1 = \{te_1 : t \in \mathbb{R}\}$ $(\cong \mathbb{R})$

$f|_{H_1 \cap K}$ = κυρτή, $H_1 \cap K$ = ανοιχτό στο H_1, κυρτό

Τότε $\exists\, a_1 \in \mathbb{R} : f(x) \ge (ae_1)\cdot(te_1)$, $x = te_1 \in H_1 \cap K$

Έστω τώρα $H_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$. Τότε, από το προηγούμενο λήμμα $\exists a_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(t_1 e_1 + t_2 e_2) \geq (a_1 e_1 + a_2 e_2) \cdot (t_1 e_1 + t_2 e_2) \quad (t_1 e_1 + t_2 e_2 \in H_2 \cap K)$$

Κάνοντας το ίδιο μέχρι να φτάσουμε στο d,

δηλ. $\exists u_d = a_1 e_1 + \dots + a_d e_d \in \mathbb{R}^d$:

$$f(y) \geq u_d \cdot y, \quad y \in K = C - x_0$$

Άρα $g(x) \geq g(x_0) + u_d \cdot (x - x_0), \ x \in C$

Ορισμός: Έστω $H = \{(x, c + u \cdot (x - x_0)) : x \in \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ σταθερό

Υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{d+1}$

Διέρχεται από το $(x_0, c) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, παράλληλο στο διανυσματικό χώρο $\{(x, u \cdot x), x \in \mathbb{R}^d\}$

- Η $f: A (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ έχει φέρον υπερεπίπεδο στο $x_0 \in A \iff$

$\iff \exists u \in \mathbb{R}^d$: $f(x) \geq f(x_0) + u \cdot (x - x_0), \ x \in A$

Πρόταση: Έστω $f: C \to \mathbb{R}$, $C =$ ανοιχτό + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε

f κυρτή $\iff$ έχει φέρον υπερεπίπεδο $\forall x_0 \in C$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ (Θεώρημα τύπου Hahn-Banach)

$(\Leftarrow)$ Παρόμοιο για $d=1$

Ορισμός: Εάν $f: C \to \mathbb{R}$ κυρτή, $C =$ ανοιχτό + κυρτό. Θεωρούμε το υποδιαφορικό της f στο x_0: $\partial f(x_0) = \{u \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq f(x_0) + u(x - x_0), x \in$

$\rightarrow \partial f(x_0) \neq \emptyset$, κυρτό + κλειστό

$\rightarrow \partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ για $d=1$

Διαφόριση Κυρτής συνάρτησης πολλών μεταβλητών:

Έχουμε δείξει ότι αν $f: I \to \mathbb{R}$, $I =$ ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}$, $f =$ κυρτή, τότε $\{x \in I:$ δεν υπάρχει παρ. στο $x\} = \{x \in I: f'_-(x) < f'_+(x)\} =$ αριθμήσιμο σύνολο

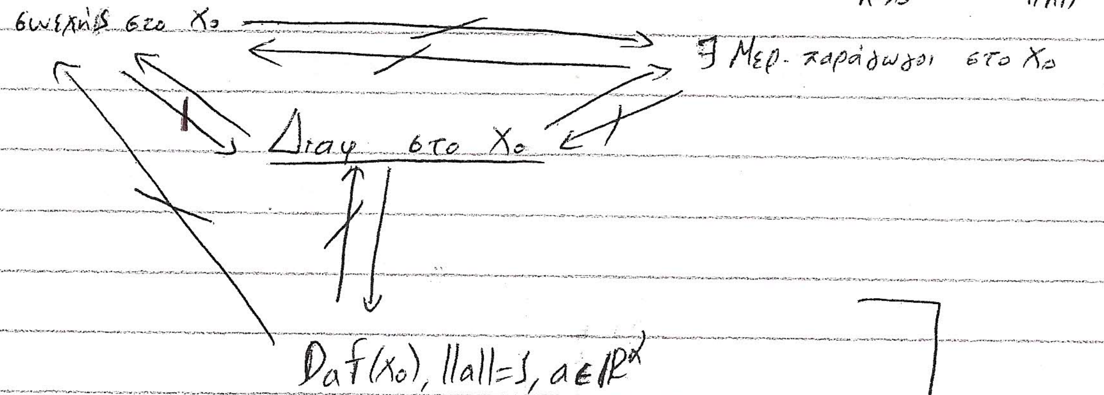
[**Υπενθύμιση:**

Έστω $g: A \to \mathbb{R}$, $A =$ ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^d$, $x_0 \in A$

Ορίζαμε

$\to$ $g_{x_i}(x_0) = \dfrac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(x_0 + t e_i) - g(x_0)}{t}$ (αν υπάρχει)

$\to$ Θα λέμε g διαφορίσιμη στο $x_0 \iff \exists u_{x_0} \in \mathbb{R}^d: 0 = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x_0+h) - g(x_0) - u_{x_0} \cdot h}{\|h\|}$



]

Θεώρημα: Έστω $f: C \to \mathbb{R}$, κυρτή, $C =$ ανοιχτό + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$, $x_0 \in C$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \iff \exists \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, d$

Απόδειξη:

($\Longrightarrow$) Από Απειροστικό Λογισμό 3

($\Longleftarrow$) $\nabla f(x_0) = \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} e_1 + \dots + \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_d} e_d$, για $x_0 \in C =$ ανοιχτό + κυρτό

(Συνέχεια απόδειξης στην επόμενη σελίδα)

$x_0 \in C =$ ανοιχτό $\Rightarrow \exists\, B(x_0,\varepsilon) \subseteq C$

$h' \in B(0,\varepsilon)$, $\varphi(h') = f(x_0+h') - f(x_0) - \nabla f(x_0)\cdot h'$

Τότε, $0 \neq h' = h_1' e_1 + \dots + h_d' e_d$, $\varphi(h_i' e_i) = f(x_0 + h_i' e_i) - f(x_0) - \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\cdot h_i'$

Αν $h_i' \neq 0$, $\lim\limits_{h_i \to 0} \frac{\varphi(h_i' e_i)}{h_i} = 0$

Αν $h_i' = 0$, $\frac{\varphi(h_i' e_i)}{h_i'} \equiv 0$

$h \in B(0,\frac{\varepsilon}{d})$, $h \neq 0$, $dh \in B(0,\varepsilon)$, φ κυρτή στο $B(0,\varepsilon)$

$h = h_1 e_1 + \dots + h_d e_d$

$$\varphi(h) = \varphi\left(\frac{dh}{d}\right) = \varphi\left(\frac{(dh_1)e_1 + (dh_2)e_2 + \dots + (dh_d)e_d}{d}\right) \leq$$

$$\begin{pmatrix}\text{αφού } \varphi \\ \text{κυρτή}\end{pmatrix} \leq \frac{\varphi(dh_1 e_1)\, h_1}{dh_1} + \dots + \frac{\varphi(dh_d e_d)}{dh_d}\, h_d \overset{C-S}{\leq} \|h\| \left[\left|\frac{\varphi(dh_1 e_1)}{dh_1}\right| + \dots + \left|\frac{\varphi(dh_d e_d)}{dh_d}\right|\right] =$$

$$= \|h\|\, \Phi(dh)$$

και $\Phi(dh) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ (λόγω της ύπαρξης των μερικών παραγώγων)

Από την άλλη μεριά

$$0 = \varphi(0) = \varphi\left(\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}(-h)\right) \leq \tfrac{1}{2}\varphi(h) + \tfrac{1}{2}\varphi(-h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varphi(-h) \leq \varphi(h)$$

Άρα τελικά $-\|h\|\,\Phi(-dh) \leq \varphi(h) \leq \|h\|\,\Phi(dh) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overbrace{-\Phi(-dh)}^{h\to 0:\ \to 0} \leq \frac{\varphi(h)}{\|h\|} \leq \overbrace{\Phi(dh)}^{h\to 0:\ \to 0}$$

$$\frac{\varphi(h)}{\|h\|} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)\cdot h}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Άρα ∃ το διαφορικό της f στο x_0.

Πόρισμα:
$f: C \to \mathbb{R}$, κυρτή, $C=$ ανοιχτό + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$, $x_0 \in C$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \Leftrightarrow \partial f(x_0) =$ μονοσύνολο
(Ουσιαστικά $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$)

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση (βλ. Μαθ. 5)

Θεώρημα: Έστω $f: C \to \mathbb{R}$, κυρτή, $C=$ ανοιχτό + κυρτό. Τότε η f είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο C

Απόδειξη:
Η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1,\dots,d\}$: να μην υπάρχει η $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \Leftrightarrow \exists i \in \{1,\dots,d\}: f_{x_i}^-(x_0) < f_{x_i}^+(x_0)$

Άρα, αν $A = \{x \in C : \text{η } f \text{ δεν είναι διαφ. στο } x\} =$

$$= \bigcup_{i=1}^{d} \{x \in C : f_{x_i}^-(x) < f_{x_i}^+(x)\}$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι το $\{x \in C : f_{x_i}^-(x) < f_{x_i}^+(x)\}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και έχει μηδενικό μέτρο

Έστω $x_0 \in C$, $\exists r > 0: B(x_0, r) \subseteq C$
Έστω $C_n^- = \{x \in C : x - \frac{r}{n} e_1 \in C\} = \underbrace{C \cap (C + \frac{r}{n} e_1)}_{\neq \emptyset} =$ αν. + κυρτό

Έστω $g_n(x) = \dfrac{f(x - \frac{r}{n} e_1) - f(x)}{-\frac{r}{n}}$, $x \in C_n^-$, είναι συνεχής στο C_n^- ($f=$ κυρτή)

$C_n^+ = C \cap (C + \frac{r}{n} e_1)$

και ομοίως
$h_n(x) = \dfrac{f(x + \frac{r}{n} e_1) - f(x)}{r/n}$, $x \in C_n^+$, συνεχής στο C_n^+

(Συνέχεια Απόδειξης)

Παρατηρούμε ότι $C_1^- \subseteq C_2^- \subseteq \dots$ και $C_1^+ \subseteq C_2^+ \subseteq \dots$ } και $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^- = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^+$

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ και $C_{n_0}^-$ με $x \in C_{n_0}^-$. $(g_n(x))_{n \geq n_0}$

Τότε $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f_{x_1}^-(x)$ Άρα $f_{x_1}^-\big|_{C_{n_0}^-}$ είναι μετρήσιμη

συνάρτηση ως κατά σημείο όριο συνεχών συναρτήσεων.

Ομοίως, η $f_{x_1}^+\big|_{C_{n_0}^+}$ είναι μετρήσιμη

Τότε (γνωστό από Θεωρία Μέτρου) οι $f_{x_1}^-, f_{x_1}^+$ είναι μετρήσιμες σε όλο το C (διότι $C = \bigcup_n C_n^- = \bigcup_n C_n^+$)

Άρα $A_1 = \{x \in C : f_{x_1}^-(x) < f_{x_1}^+(x)\}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και

$\mu(A_1) = \int_{\pi_1(C)} \mu(A_1 \cap \{y + te_1 : t \in \mathbb{R}\})\, dy = 0$ γιατί το σύνολο αυτό περιέχει όλα τα σημεία μιας ευθείας στα οποία η f δεν έχει παράγωγο, και άρα είναι αριθμήσιμο (το ξέρουμε για το $\mathbb{R}$)

Άρα $\mu(A) = 0$ ($A = \bigcup_{i=1}^{d} A_i$ → είχε οριστεί νωρίτερα)

Θεώρημα: Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή + διαφορίσιμη, C = ανοιχτό + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε, η f είναι κλάσης C^1 / βλ. Μαθ. 5.

Θεώρημα (Alexandrov): Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή, C = ανοιχτό + κυρτό. Τότε, η f είναι C^2 σχεδόν παντού στο C.

(Αποδ.: βλ. βιβλιογραφία)

Ασκήσεις

(1) Έστω $\{(x_i, y_i) : i=1,\ldots,N\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $N \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι η $f(a,b) = \sum_{i=1}^{N} ((ax_i + b) - y_i)^2$ έχει σημείο ολικού ελαχίστου

(Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων)

(2) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$, K = κυρτό + συμπαγές. Ορίζουμε

$$\mathcal{D} = \{ h = f - g \text{ όπου } f, g : K \to \mathbb{R} \text{ κυρτές + συνεχείς} \}$$

Τότε $\overline{\mathcal{D}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(K)$ $(= \{\varphi : K \to \mathbb{R} : \varphi \text{ συνεχής}\}, \|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : x \in K\})$

(Χρήση του προσεγγιστικού Θεωρήματος Weierstrass)

(3) $f : C \to \mathbb{R}$, C = κυρτό, f - συνεχής με

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y), \quad x, y \in C$$

Να δειχθεί ότι η f είναι κυρτή

(4) $f : C \to \mathbb{R}$, f = διαφορ. C = ανοιχτό + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε

$$f \text{ κυρτή} \Leftrightarrow (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq 0, \quad x, y \in C$$

(Χρήση Θεωρήματος ~~εν~~ Μέσης Τιμής)

(5) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ κυρτή, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $f'(x_0, a) =: \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$, για $a \in \mathbb{R}^d$

Να δειχθεί ότι:

(i) $f'(x_0, a) = D_a^+ f(x_0)$, $\|a\| = 1$

(ii) $f'(x_0, \cdot)$ είναι θετικά ομογενής ($P(\lambda x) = \lambda P(x)$ $\forall \lambda \geq 0$), κυρτή και $\exists\, v_0 \in \mathbb{R}^d$: $f'(x_0, a) \geq v_0 \cdot a$, $a \in \mathbb{R}^d$

(iii) $\partial f(x_0) = \{ u \in \mathbb{R}^d : f'(x_0, a) \geq u \cdot a, a \in \mathbb{R}^d \}$

Ιδιαιτέρως, για $d = 1$, $\partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ και να δειχθεί ότι $\partial f(x_0)$ κλειστό + συμπαγές