Δευτέρα 18 Φεβρουαρίου 2013 — Κυρτή Ανάλυση

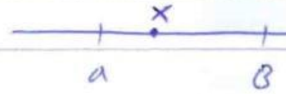
## Μάθημα 2

### Κυρτά σύνολα, κυρτές συναρτήσεις, Γενικά.

Εισαγωγή

$[\alpha,\beta]$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^d$ $(d\geq 1)$

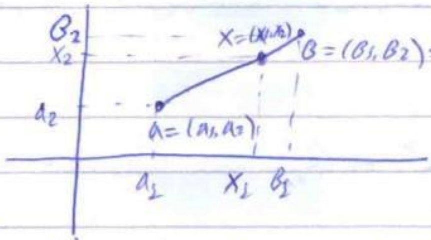
• $d=1$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τότε $[\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}: \alpha\leq x\leq\beta\}=\{x\in\mathbb{R}: x=\alpha+\lambda(\beta-\alpha),\ \lambda\in[0,1]\}=$




$=\{x\in\mathbb{R}: x=(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta,\ \lambda\in[0,1]\}$

• $d\geq 2$

Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^d$



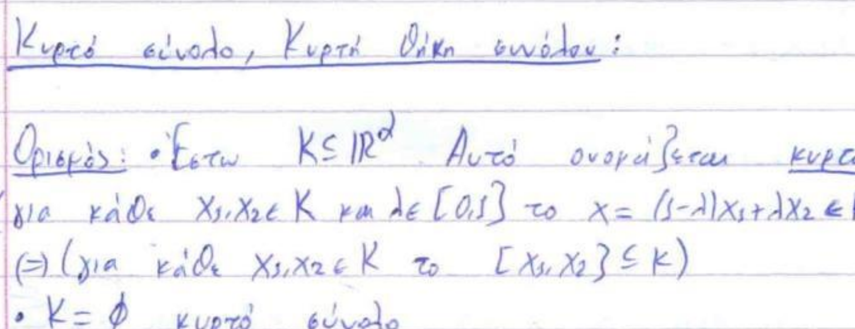

$[\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}^d: x=(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta,\ \lambda\in[0,1]\}=$
$=\{x\in\mathbb{R}^d: x=\alpha+\lambda(\beta-\alpha),\ \lambda\in[0,1]\}$

$x=\alpha+\lambda(\beta-\alpha)$, $\lambda=\dfrac{\|x-\alpha\|}{\|\beta-\alpha\|}$, $1-\lambda=\dfrac{\|\beta-x\|}{\|\beta-\alpha\|}$

### Κυρτό σύνολο, Κυρτή θήκη συνόλου:

Ορισμός: • Έστω $K\subseteq\mathbb{R}^d$. Αυτό ονομάζεται κυρτό σύνολο $\Leftrightarrow$ (για κάθε $x_1,x_2\in K$ και $\lambda\in[0,1]$ το $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\in K$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (για κάθε $x_1,x_2\in K$ το $[x_1,x_2]\subseteq K$)

• $K=\emptyset$ κυρτό σύνολο




Κυρτά Σύνολα

<u>ΜΗ</u> ΚΥΡΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

<u>Ασκήσεις</u>

①

i) Έστω $K_i$, $i\in I$ κυρτά σύνολα. Τότε η τομή $\bigcap_{i\in I} K_i$ είναι κυρτό σύνολο

ii) Αν $A,B$ κυρτά, τότε $A\cup B$ όχι αναγκαία κυρτό
(π.χ. $A=[0,1]$, $B=[3,4]$ στο $\mathbb{R}$)

iii) Αν $K_1\subseteq K_2\subseteq\dots\subseteq K_n\subseteq\dots$ αύξουσα ακολουθία κυρτών τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι κυρτό σύνολο

② Αν $K$ κυρτό, $x_0\in\mathbb{R}^d$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε $x_0+\lambda K$ κυρτό σύνολο

<u>Πρόταση</u>: Το $K\subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό αν και μόνο αν ($\forall x_1,\dots,x_n\in K$, $\lambda_i\geq 0$ με $\lambda_1+\dots+\lambda_n=1$, το $x=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n\in K$)

<u>Απόδειξη</u>:

($\Leftarrow$) Έστω $x_1,x_2\in K$ και έστω $[x_1,x_2]=\{x\in\mathbb{R}^d: x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\}$
$1-\lambda+\lambda=1 \Rightarrow$ για $\lambda_1=1-\lambda$, $\lambda_2=\lambda$ έχουμε ότι $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\in K$ $\forall\lambda\in[0,1]$
Άρα $K$ κυρτό

($\Rightarrow$) Έστω ότι $K$ κυρτό
Για $n=1$ ισχύει
<u>Επαγωγικό Βήμα</u>: Έστω ότι ισχύει για $n\geq 1$
Έστω τώρα $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in K$, $\lambda_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$ και $x=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i$
Αν $\lambda_{n+1}=1$, τότε $\lambda_1+\dots+\lambda_n=0 \Rightarrow x=x_{n+1}\in K$.
Έστω ότι $\lambda_{n+1}<1$.

Τότε, αφού $1-\lambda_{n+1}>0$ έχουμε:

$$x=(1-\lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}x_1+\ldots+\frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}x_n\right)+\lambda_{n+1}x_{n+1}.$$

Έστω $y=\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}x_1+\ldots+\frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}x_n$, $x_1,\ldots,x_n\in K$ και ακόμα

$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}=\frac{1}{1-\lambda_{n+1}}\,1-\lambda_{n+1}=1$. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση $y\in K$.

Τότε το $x$ γράφεται ως εξής:

$x=(1-\lambda_{n+1})y+\lambda_{n+1}x_{n+1}$ και αφού $y,x_{n+1}\in K$ και $K$ κυρτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του κυρτού συνόλου ότι $x\in K$.

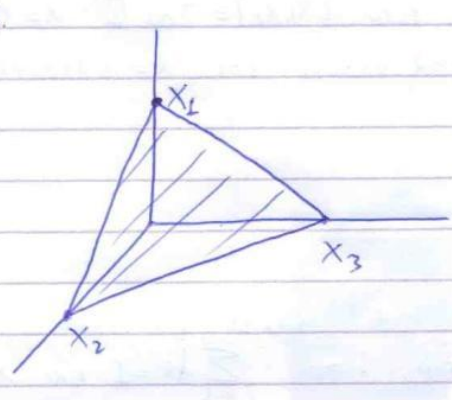
Κυρτός συνδυασμός σημείων:

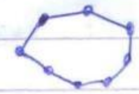
Έστω $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^d$. Το $x \in \mathbb{R}^d$ λέγεται κυρτός συνδυασμός των $x_1,\dots,x_n \iff (\exists\, \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, έτσι ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$

Κυρτή θήκη συνόλου:

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $A \neq \emptyset$. Το σύνολο $\mathrm{con}A = \bigcap \{K : A \subseteq K,\ K \text{ κυρτό}\}$ ονομάζεται κυρτή θήκη του $A$ και είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το $A$.

π.χ.



Ορισμός (Πολύτοπο)

$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Το $P = \mathrm{con}A$ καλείται πολύτοπο

Άσκηση

1) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{con}A \subseteq \mathrm{con}B$

2) $K$ κυρτό $\iff K = \mathrm{con}K$

Πρόταση: Έστω $A \neq \emptyset$, $\mathrm{con}A = \{x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ x_i \in A,\ \lambda_i \geq 0 \text{ με } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$

Απόδειξη

Έστω $B = \{x : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : x_i \in A,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$

$B$ κυρτό (προφανώς)

$A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{con}A \subseteq \mathrm{con}B = B$

Έστω τώρα ότι $K$ κυρτό και $A \subseteq K$

Έστω $x \in B$. Αν $x_1,\dots,x_n \in A$ και $\lambda_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ και $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, τότε $x \in K$ (από προηγούμενη πρόταση)

Άρα $B \subseteq K$ και άρα $B \subseteq con\,A$ αφού το $B$ είναι υποσύνολο ενός τυχαίου κυρτού που περιέχει το $A$. Άρα, τελικά $B = con\,A$

Άσκηση

1) $con\,(x_0 + \lambda A) = x_0 + \lambda\, con\,A \quad (x_0 \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R})$

2) Έστω $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$

Οι ρίζες της εξίσωσης $P'(z) = 0$ ανήκουν στην κυρτή θήκη των ριζών της εξίσωσης $P(z) = 0$ (Θεώρημα Gauss-Lucas)

Ασκήσεις

1) $\langle \mathbb{R}^d, \|\cdot\| \rangle$. $B(x_0, r) =$ κλειστή σφαίρα κέντρου $x_0$, ακτίνας $r > 0$

i) $B(x_0, r)$ κυρτό σύνολο

ii) $B(x_0, r) = x_0 + r B(0,1)$

iii) $B(0,1) = con\,(bd\,B)$

Λύση

(i) $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$, $\|x_i - x_0\| \leq r$, $i = 1, 2$

Έστω $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $\lambda \in [0,1]$

$$\|x - x_0\| = \|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - (1-\lambda)x_0 - \lambda x_0\| = (1-\lambda)\|x_1 - x_0\| + \lambda \|x_2 - x_0\| \leq$$
$$\leq (1-\lambda) r + \lambda r = r$$

Άρα $x \in B(x_0, r)$

(ii) Έπεται εύκολα για ένα χώρο με νόρμα (εδώ ο $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$)

(iii) $bd\,B \subseteq B \Rightarrow con(bd\,B) \subseteq con\,B = B$ (αφού $B$ κυρτό)

Έστω τώρα $x \in B$

Αν $\|x\| = 1 \Rightarrow x \in bd\,B$, $x \in con(bd\,B)$

Αν $x = 0$ τότε $0 = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2}(-y)$, $y \in bd\,B$ Άρα $x = 0 \in con(bd\,B)$

$\in bd\,B \subseteq con(bd\,B)$

Έστω τώρα $0 < \|x\| < 1$

Τότε $x = (1 - \|x\|)\underset{\overset{\downarrow}{\in\, con(bd\,B)}}{0} + \underset{\overset{\shortparallel}{\lambda}}{\|x\|}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in con\,(bd\,B)$

Άρα $B \subseteq con\,(bd\,B)$

Και έχουμε τελικά $B = con\,(bd\,B)$

2) $B_1(0,1)=\{x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d}|x_i|\le 1\}=\mathrm{co}\{\pm e_i,\ i=1,2,\dots,d\}$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $B_1(0,1)=\mathrm{co}\{\pm e_i,\ i=1,2,\dots,d\}$, όπου $(e_i)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^d$.

Πράγματι $\pm e_i\in B(0,1)\Rightarrow \mathrm{co}\{\pm e_i,\ i=1,\dots,d\}\subseteq B(0,1)$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, χρησιμοποιούμε το (1iii), δηλαδή, ότι $B_1(0,1)=\mathrm{co}(\mathrm{bd}B_1)$

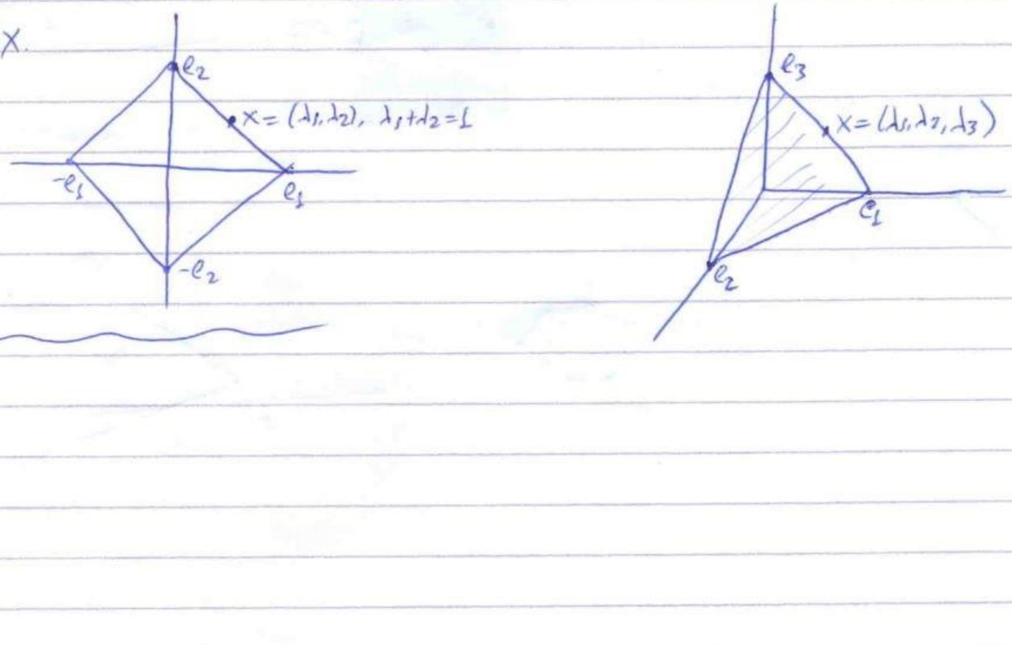
Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι αν $x\in\mathrm{co}(\mathrm{bd}B_1)$, τότε $x\in\mathrm{co}\{e_i, i=1..d\}$, δηλαδή ότι το $x$ γράφεται στη μορφή

$$x=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_de_d+\mu_1(-e_1)+\dots+\mu_d(-e_d),\ \lambda_i,\mu_i\ge 0 \text{ με } \sum_{i=1}^{d}\lambda_i+\sum_{i=1}^{d}\mu_i=1.$$

Έστω π.χ. $x=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_de_d$, $\lambda_i\ge 0$ και $\sum_{i=1}^{d}\lambda_i=\|x\|_1=1$

Ανάλογα εξετάζουμε τις άλλες περιπτώσεις για το $x$.

π.χ.



## Κυρτές συναρτήσεις

**Ορισμός:** Έστω $f: K \to \mathbb{R}$, όπου $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό. Η $f$ ονομάζεται κυρτή συνάρτηση $\iff \forall x, y \in K, \lambda \in [0,1]$ έχουμε $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f($

**Πρόταση (Ανισότητα Jensen):** $f: K \to \mathbb{R}$ κυρτή, $x_1, \dots, x_n \in K$, $\lambda_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ τότε $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$

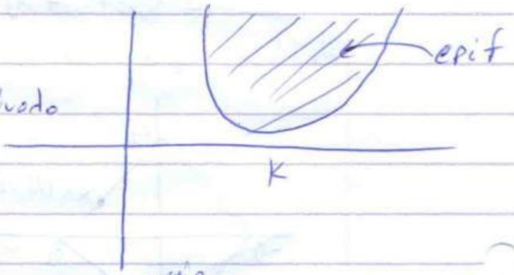
• Η $g$ κοίλη $\iff -g$ είναι κυρτή

**Άσκηση**

(1) $f, g: K \to \mathbb{R}$ κυρτές $\Rightarrow f+g, \lambda f$ με $\lambda \geq 0$ είναι κυρτές

(2) $f: K \to \mathbb{R}$, $K$ κυρτό, $\text{epi} f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : x \in K \text{ και } t \geq f(x)\}$
(επίγραμμα της συνάρτησης $f$)

Τότε, $f$ κυρτή $\iff$ $\text{epi} f$ είναι κυρτό σύνολο




(3) $f: K \to \mathbb{R}$ κυρτή και το $x_0$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Τότε, το $x_0$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου

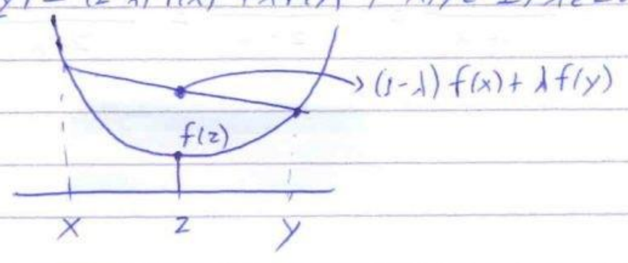
### ① Κυρτή συνάρτηση μιας μεταβλητής

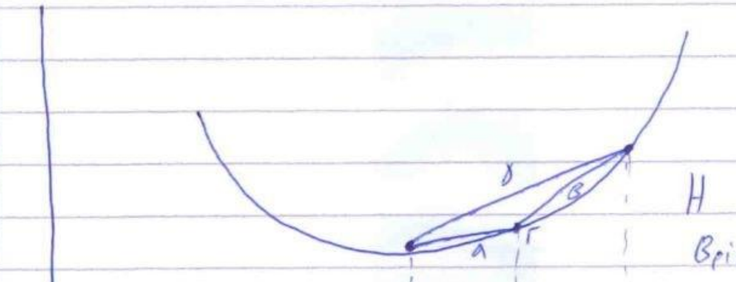
$f: I \to \mathbb{R}$, $I =$ διάστημα του $\mathbb{R}$

Ορίζουμε $g_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in I \setminus \{x_0\} \to$ συνάρτηση κλίσης

$f$ αύξουσα $\iff g_{x_0} \geq 0$, $\forall x_0 \in I$

<u>Παρατήρηση:</u> Για μια κυρτή συνάρτηση ξέρουμε ότι ισχύει:
$f(\underbrace{(1-\lambda)x+\lambda y}_{z}) \le (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$, $x,y\in I$, $\lambda\in[0,1]$




Η κορυφή Γ πρέπει να βρίσκεται πάντα κάτω από τη πλευρά γ.

Παρατηρώντας τις πλευρές α, β, γ συμπεραίνουμε ότι
$f$ κυρτή $\Leftrightarrow \vartheta_x \nearrow$ $\forall x\in I$. Αυτό προκύπτει άμεσα από το επόμενο λήμμα:

<u>Λήμμα (των τριών χορδών)</u> Αν $f: I\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, τότε
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \quad \forall x,y,z\in I \text{ με } x<y<z.$$

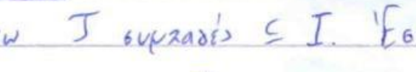
Αυτόματα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση της κλίσης $\vartheta_x$ είναι αύξουσα

<u>Απόδειξη:</u>
Έχουμε $x<y<z$. Άρα $y=(1-\lambda)x+\lambda z$ για κάποιο $\lambda\in(0,1)$. Τότε
$f(y)\le(1-\lambda)f(x)+\lambda f(z)$ (αφού $f$-κυρτή). Παίρνουμε τώρα
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{[(1-\lambda)f(x)+\lambda f(z)]-f(x)}{y-x} = \frac{\lambda(f(z)-f(x))}{\lambda(z-x)} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$
$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \ge \frac{f(z)-[(1-\lambda)f(x)+\lambda f(z)]}{z-y} = \frac{\cancel{(1-\lambda)}(f(z)-f(x))}{\cancel{(1-\lambda)}(z-x)} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, $I=$ ανοικτό διάστημα, $f$ κυρτή συνάρτηση. Τότε, η $f$ είναι Lipschitz συνεχής στα συμπαγή υποσύνολα του $I$. Επομένως, η $f$ είναι συνεχής στο $I$

[ <u>Υπενθύμιση</u>: $g: A \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής $\iff \exists\, M>0,\ |g(x)-g(y)| \le M\|x-y\|$ για $x,y \in A$
Αν $g:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\not\Rightarrow$ Lipschitz συνεχής
π.χ. $g(x)=\sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ ]

<u>Απόδειξη</u>
Έστω $J$ συμπαγές $\subseteq I$. Έστω ακόμα $x,y \in J$.




Επειδή $I$ ανοικτό υπάρχουν $u,v,w,z \in I$ με $u,v,w,z \notin J$ και ακόμα $u<v$, $w<z$.
Τότε από το Λήμμα των 3 χορδών έχουμε ότι

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$$

Τότε, είναι άμεσο ότι

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \le \max\left\{\left|\frac{f(u)-f(v)}{u-v}\right|, \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\right\}$$

Έστω $L=L(J)=\max\left\{\left|\frac{f(u)-f(v)}{u-v}\right|, \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\right\}$

Τότε

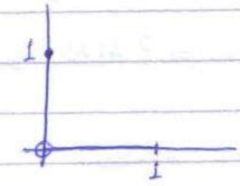
$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \le L \Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le L \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x,y \in I.$$

Άρα $f$ Lipschitz συνεχής στα συμπαγή υποσύνολα του $I$.

<u>Σημείωση</u>: $f: [\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ κυρτή $\not\Rightarrow$ $f$ συνεχής

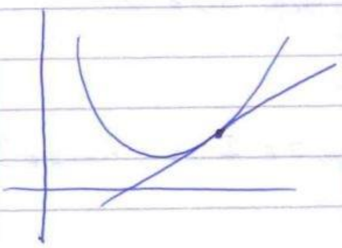
π.χ.

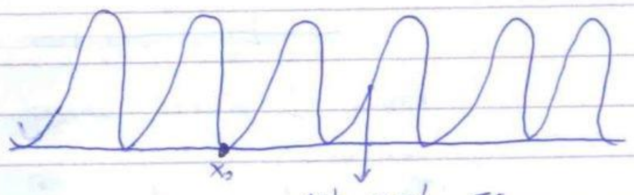
Έστω $f: [0,1) \to \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$




Η $f$ είναι κυρτή αλλά ασυνεχής στο $x_0 = 0$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$. Η ευθεία $y = f(x_0) + u_{x_0}(x - x_0)$ είναι <u>φέρουσα ευθεία</u> της $f$ στο $x_0 \iff f(x) \geq f(x_0) + u_{x_0}(x - x_0),\ x \in I$






από αυτό το σημείο δεν υπάρχει φέρουσα, δεν υπάρχει δηλαδή ευθεία που να περνάει από αυτό και το γράφημα της συνάρτησης να βρίσκεται όλο "από πάνω" της.