Μετρικη Hausdorff

Εισαγωγή

Εάν $< X, d >$ είναι μετρικός χώρος, ορίζουμε $\mathcal{H}(X)$ το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του X. Θα εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathcal{H}(X)$ με κατάλληλη μετρική h, ώστε ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ να γίνει πλήρης μετρικός χώρος άν ο $< X, d >$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και συμπαγής μετρικός χώρος αν ο $< X, d >$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Η μετρική Hausdorff

Έστω $< X, d >$ *μετρικός χώρος και* $A, B \in \mathcal{H}(X), x \in X$.

i. *Ορίζουμε* $d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\}$, *την απόσταση του* x *από το* B.

ii. *Ορίζουμε* $\tilde{d}(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$, *την απόσταση του* A *από το* B.

Επειδή τα σύνολα A, B είναι συμπαγή, υπάρχουν $y_o \in B$ ώστε $d(x, B) = d(x, y_o)$ και $x_1 \in A, y_1 \in B$ ώστε $\tilde{d}(A, B) = d(x_1, y_1)$.

Εάν $A, B \in \mathcal{H}(X)$ *ορίζουμε ως Hausdorff απόσταση μεταξύ των* A, B, *το*

$$h(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}.$$

Εάν $< X, d >$ είναι μετρικός χώρος, τότε ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Για την h ισχύει $h(A, B) \in \mathbb{R}$. (διότι τα A, B είναι συμπαγή).

i. $h(A, B) \geq 0, \quad A, B \in \mathcal{H}(X)$.(Προφανώς)

$$\begin{aligned} h(A, A) &= \max\{\tilde{d}(A, A), \tilde{d}(A, A)\} \\ &= \tilde{d}(A, A) \\ &= \max\{d(x, A) : x \in A\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Έστω $A \neq B$ και $\alpha \in A : \alpha \notin B$. Τότε

$$h(A, B) \geq d(\alpha, B) > 0.$$

Άρα $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

ii. $h(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} = h(B, A)$.

iii. $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$.

Για να δείξουμε την τριγωνική ιδιότητα θα αποδείξουμε πρώτα ότι :

$$\tilde{d}(A,B) \leq \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C,B).$$

Έστω $\alpha \in A$.

$$\begin{aligned} d(\alpha, B) &= \min\{d(\alpha,b) : b \in B\} \\ &\leq \min\{d(\alpha,c) + d(c,b) : b \in B\} \\ &= d(\alpha,c) + \min\{d(c,b) : b \in B\} \\ &= d(\alpha,c) + d(c,B), \quad \forall c \in C. \end{aligned}$$

Άρα $d(\alpha,B) \leq d(\alpha,C) + \tilde{d}(C,B)$ για κάθε $\alpha \in A$. Άρα

$$\tilde{d}(A,B) \leq \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C,B).$$

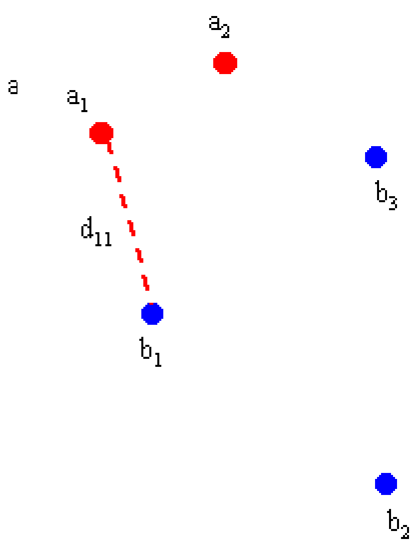
Όμοια

$$\tilde{d}(B,A) \leq \tilde{d}(B,C) + \tilde{d}(C,A).$$

Άρα

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\} \\ &\leq \max\{\tilde{d}(A,C), \tilde{d}(C,A)\} + \max\{\tilde{d}(C,B), \tilde{d}(B,C)\} \\ &= h(A,C) + h(C,B) \end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες i), ii), iii) έχουμε ότι ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι μετρικός χώρος.



η οποία είναι η hausdorff απόσταση H(A,B)

Ψευδοκώδικας για «ευθή» Hausdorff

- Hausdorff = 0
- Για κάθε σημείο a_i του A
  - Για κάθε σημείο b_j του B
  - $d_{ij} = d (a_i , b_j)$
  - Ελάχιστο = d_{11}
  - Εαν $d_{ij} < d_{11}$, τότε
    - Ελάχιστο = d_{ij}

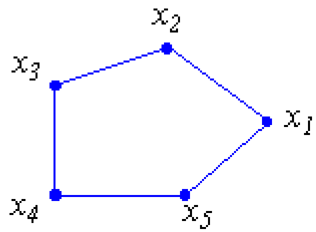
    Εαν Ελάχιστο > Hausdorff , τότε

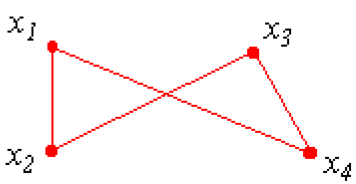
    Hausdorff = Ελάχιστο

Απόσταση Hausdorff μεταξύ δύο κυρτών πολυγώνων

Σύμβαση : τα πολύγωνα θα είναι απλά και δε θα τέμνονται ή θα περιέχεται το ένα στο άλλο

Απλό πολύγωνο : Κάθε πολύγωνο που οι ακμές του δε τέμνονται

Π.χ. Απλό 

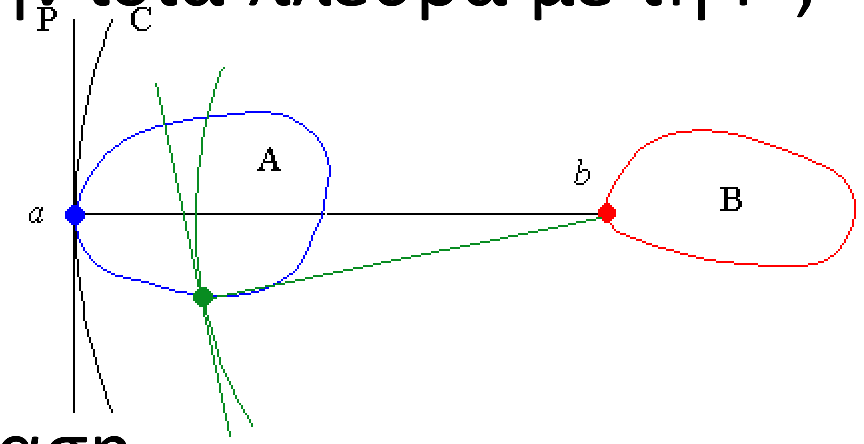
, όχι απλό 

Κυρτό Πολύγωνο : κάθε απλό πολύγωνο όπου το εσωτερικό του είναι κυρτό σύνολο .

(κάθε πολύγωνο με εσωτερικές γωνίες μικρότερες των 180^o)

(κάθε γραμμή που συνδέει οποιαδήποτε δύο σημεία παραμένει μέσα στο πολύγωνο)

- Λήμμα : Η κάθετη ευθεία (P) του ab στο σημείο α είναι μια εφαπτόμενη του κυρτού πολύγωνου A και το A βρίσκεται στην ίδια πλευρά με τη P , συναρτήση του B



Απόδειξη

α είναι το σημείο του A

με τη μεγαλύτερη απόσταση

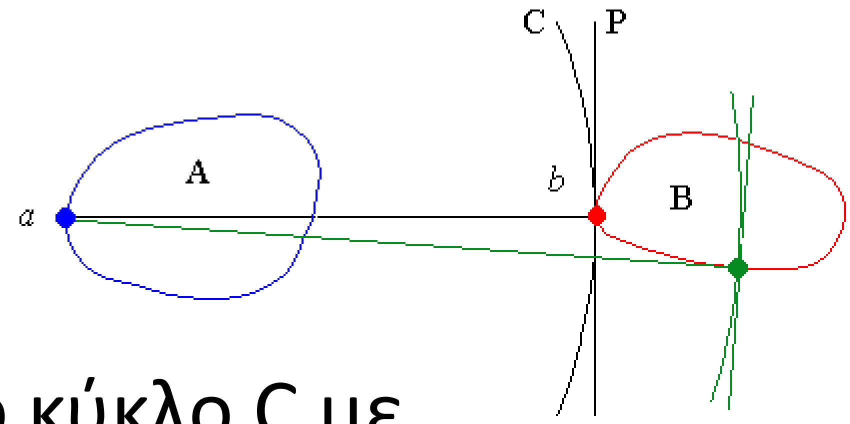
από το B . Έστω κύκλος C με κέντρο το b και

ακτίνα ab , θα περιέχει τελείως το A . Επειδή C

θα περιέχει όλα τα σημεία του A τότε η P είναι

εφαπτόμενη

- Λήμμα : η κάθετη ευθεία (P) του αb στο b είναι εφαπτόμενη του B και το σημείο α με το B είναι σε διαφορετικά ημιεπίπεδα συναρτήση του P .



Απόδειξη

Όμοια με πριν ,

χρησιμοποιώντας το κύκλο C με

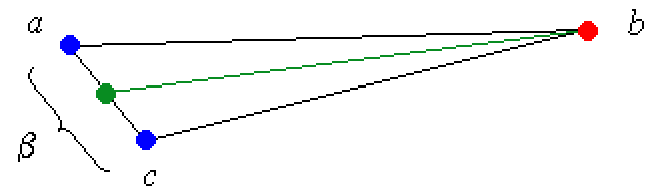
κέντρο το α και ακτίνα αb .

(και φυσικά το b έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το α)

- Λήμμα : Υπάρχει μια γωνία χ του Α τέτοια ώστε η απόσταση από τη χ στο Β να είναι ίση με τη H(A,B)

Απόδειξη

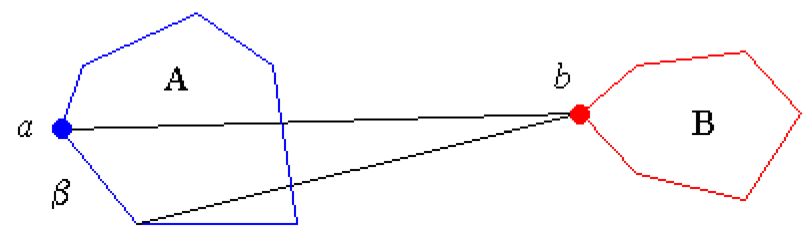
κάθε ευθεία από τη γωνία β



ενός τριγώνου abc , που ανήκει στην απέναντι

πλευρά β , είναι πάντα μικρότερη από τις ab ή ac ή και τις δύο .

Άρα εαν ένα σημείο χ της

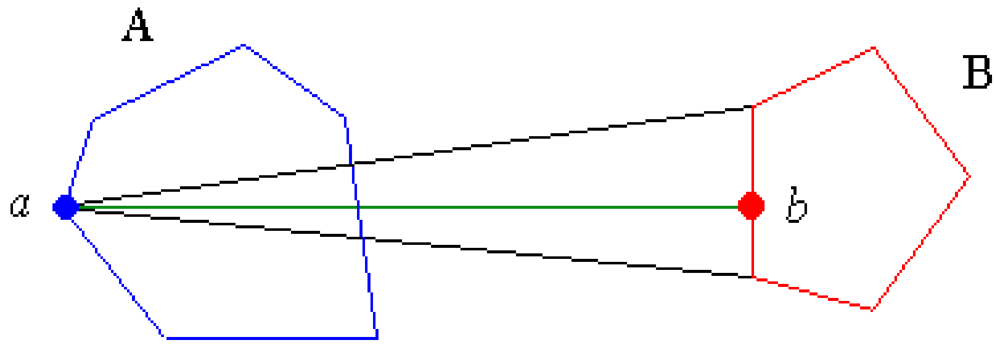


Β , είναι αυτό με τη μεγαλύτερη απόσταση από

το Α τότε το χ πρέπει να είναι «τέλος» του β και

άρα γωνία του Α

- Παρατήρηση : το προηγούμενο λήμμα , ισχύει μόνο για το α , όπου α το σημείο του A με τη μεγαλύτερη απόσταση από το b .

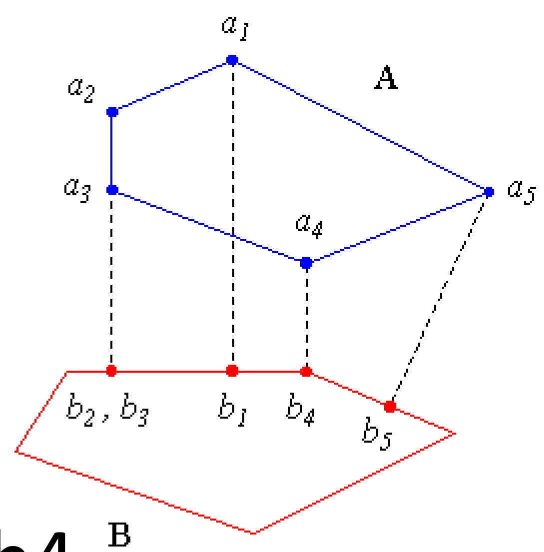


όπως φένεται στο παραπάνω σχήμα , το σημείο β του πολυγώνου B με τη μεγαλύτερη απόσταση από το A μπορεί να μην είναι γωνία .

- Λήμμα : Έστω b_i το σημείο με τη μυκρότερη απόσταση από κάποια γωνία $α_i$ του πολυγώνου A και μ είναι η κατεύθυνση από το b_i στο b_{i+1} τότε για ένα πλήρες «πέρασμα» από τις όλες τις γωνίες του A , απαιτούνται μ αλλαγές τις κατεύθυνσης με μ όχι μεγαλύτερο του 2 .

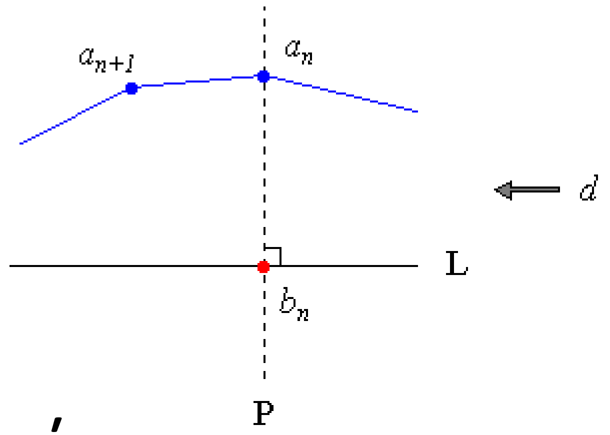
Παράδειγμα

Όπως φένεται στην εικόνα για να μετακινηθούμε από το b1 στο b2 πάμε ανάποδα από τους δείκτες του ρολογιού , ενώ από το b3 στο b4



πάμε όπως οι δείκτες του ρολογιού . Επειδή δεν είχαμε καμία κίνηση από το b2 στο b3 το b3 θα το λέμε στάσιμο σημείο.

Ας υποθέσουμε ότι μετακινούμαστε προς μια Κατεύθυνση d , πάνω σε μια τεθλασμένη γραμμή , από το σημείο $α_n$ στο $α_{n+1}$. Εαν από υπόθεση έχουμε ότι το b_n είναι το σημείο με τη μικρότερη απόσταση από το $α_n$ τότε το b_{n+1} μπορεί να είναι μόνο κάτω από τη γραμμή L (από προηγούμενο λήμμα)



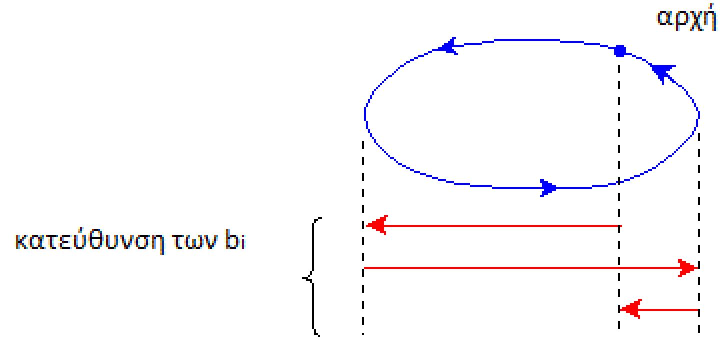
Όμως δε μπορεί να είναι δεξία της ευθείας P (κάθε σημείο σε εκείνη την περιοχή είναι πιο μακριά από το α_{n+1} συναρτήση του b_n .

Εαν δεν υπάρχει κανένα σημείο του B αριστερά του P , τότε το b_{n+1} μπορεί να είναι μόνο σε σημείο πάνω στο b_n . Στο δικό μας παράδειγμα δε μπορεί όμως , διότι κάθε σημείο πάνω στην ευθεία P και κάτω του L είναι επίσης πιο μακριά από το α_{n+1} συναρτήση του b_n .

Άρα το b_{n+1} είναι απαραίτητα κάτω από το L και αριστερά της ευθείας P (δηλαδή $\leftarrow$ d)

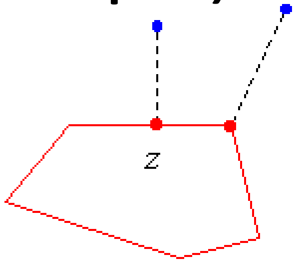
Απόδειξη

Όταν μετακινούμαστε σε ένα κυρτό πολύγωνο είναι σα να είμαστε σε δύο τεθλασμένες με διαφορετικές κατευθύνσεις . Επειδή τα b_i θα μετακινούνται στίς ίδιες κατευθύνσεις με τα a_i ή δε θα μετακινούνται καθόλου , για αυτό δε μπορεί η κατεύθυνση να αλλάξει περισσότερες από δύο φορές .



Ο Αλγόριθμος του atallah

Σημαντικό ρόλο διαδραματίζει το γεγονός ότι το σημείο με τη μικρότερη απόσταση από το ένα πολύγωνο στο άλλο , θα είναι ή γωνία ή «ύψος» z μιας κάθετης ευθείας κάποιας ακμής.



Αλγόριθμος Atallah για υπολογισμό h(A, B) :

1. Από $a_{1,}$ βρες σημείο b_1 με τη μικρότερη απόσταση και υπολόγισε $d_1 = d (a_1, b_1)$

   2. $h(A, B) = d_1$

   3. για κάθε γωνία a_i του πολυγώνου A,

      3.1 Εαν a_{i+1} είναι αριστερά του $a_i b_i$

      βρες b_{i+1}, ψάχνωντας το B με κατεύθυνση αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού χρησιμοποιώντας CheckForClosePoint από b_i

      Εαν a_{i+1} είναι δεξιά του $a_i b_i$

      βρες b_{i+1}, ψάχνωντας το B με κατεύθυνση τους δείκτες του ρολογιού χρησιμοποιώντας CheckForClosePoint από b_i

      Εαν a_{i+1} είναι οπουδήποτε στο $a_i b_i$

      $b_{i+1} = b_i$

      3.2 Υπολόγισε $d_{i+1} = d (a_{i+1} , b_{i+1})$

      3.3 $h (A, B) = \max \{ h (A, B), d_{i+1} \}$

Όπου CheckForClosePoint συνάρτηση που αναζητεί την ύπαρξη σημείου με τη μικρότερη απόσταση

Function z = CheckForClosePoint (a, b1 , b2)

Υπολόγισε τη θέση z εκεί όπου η ευθεία που περνάει μέσα από τα b1 και b2 τέμνει την κάθετή του στο a ;

Εαν z είναι ανάμεσα στα b1 b2 τότε επέστρεψε z ;

διαφορετικά υπολόγισε στο b2 μια ευθεία P κάθετη στην ευθεία ab2 ;

Εαν P είναι βοηθητική ευθεία του B τότε επέστρεψε το b2 ;

διαφορετικά επέστρεψε NULL

Πολυπλοκότητα του αλγόριθμου

(υπόθεση τα πολύγωνα A , B έχουν αντίστοιχα

m , n γωνίες)

Βήμα 1 O(m) χρόνο

Βήμα 2 O(1)

Βήμα 3 θα εκτελεστεί n-1 φορές , O(n) χρόνο

Βήμα 4 από λήμμα που μας διαβεβαιώνει ότι το πολύγωνο B θα «σαρωθεί» το πολύ 2 φορές

άρα O(2n) χρόνο

Βήμα 5,6 O(1)

Συνολικός χρόνο O(n)+O(m)+O(2n) = O(n+m)

O αλγόριθμος πρέπει να εκτελεστεί 2 φορές , άρα

παραμένει γραμμικός O(n+m)