Παπαντώνης Ιωάννης (2009/189)

Μετρική Hausdorff

Ορίζουμε $H = H(\mathbb{R}^n)$, $(n \geq 1)$ το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $A, B \in H$. Τότε ορίζονται οι συναρτήσεις
$\tilde{d}(A,B) = \max\{d(a,B) : a \in A\}$ και
$\tilde{d}(B,A) = \max\{d(b,A) : b \in B\}$, όπου $d(x,B)$ ή $d(x,A)$ είναι η απόσταση του x από το A ή το B, δηλαδή $d(x,B) = \min\{|x-b| : b \in B\}$.

Ως Hausdorff απόσταση των A, B ορίζουμε
$$h(A,B) = \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\} = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B}|a-b|, \max_{b\in B}\min_{a\in A}|a-b|\}$$

Αφού τα A, B είναι συμπαγή και οι συναρτήσεις $d(\cdot, A)$, $d(\cdot, B)$ είναι συνεχείς, υπάρχουν $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ ώστε $h(A,B) = |a_0 - b_0|$

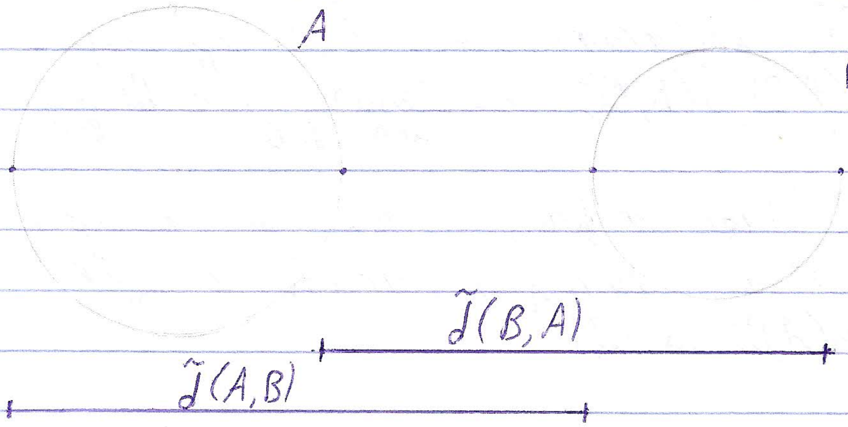
Παραδείγματα

i) Η $h(A,B)$ αποτελεί επέκταση της μετρικής του $\mathbb{R}^n$. Αν θεωρήσουμε τα $\{x\}$, $\{y\}$ σαν συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε $h(\{x\},\{y\}) =$

$$= \max\left\{\max_{x\in\{x\}}\min_{y\in\{y\}}|x-y|, \max_{y\in\{y\}}\min_{x\in\{x\}}|x-y|\right\} = \max\{|x-y|, |x-y|\} =$$

$$= |x-y|$$

ii) Οι αποστάσεις $\tilde{\delta}(A,B)$, $\tilde{\delta}(B,A)$ δεν είναι πάντα ίσες.



Ο λόγος που ορίσαμε λοιπόν την $h(A,B)$ ως το maximum των δύο αποστάσεων είναι για να κάνουμε την h συμμετρική συνάρτηση.

Ισοδύναμος ορισμός

Αν $A \in H$, $\varepsilon \geq 0$ και $\hat{B}(0,1)$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$A+\varepsilon := A+\varepsilon\hat{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = a+\varepsilon y,\ a \in A,\ y \in \hat{B}(0,1)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} \hat{B}(a,\varepsilon) \quad (*)$$

Έστω ένα $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x = a+\varepsilon y,\ a \in A,\ y \in \hat{B}(0,1)\}$.
Τότε $d(x,A) \leq |x-a| = |\varepsilon y| = |\varepsilon|\cdot|y| = \varepsilon$.

Έστω $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq \varepsilon\}$.
Αφού $A \in H$ και $d(\cdot,A)$ συνεχής, υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(x,A) = |x-a|$. Έχουμε $d(x,A) = |x-a| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-a}{\varepsilon}\right| \leq 1$.
Άρα $\frac{x-a}{\varepsilon} \in \hat{B}(0,1)$. Τελικά $x = a + x - a = a + \frac{x-a}{\varepsilon}\cdot\varepsilon$.

Δηλαδή $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x = a+\varepsilon y,\ a \in A,\ y \in \hat{B}(0,1)\}$

Έστω $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq \varepsilon\}$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(x,A) = |x-a| \leq \varepsilon \Rightarrow x \in \hat{B}(a,\varepsilon) \Rightarrow x \in \bigcup_{a\in A} \hat{B}(a,\varepsilon)$.

Έστω $x \in \bigcup_{a \in A} \hat{B}(a,\varepsilon)$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε
$x \in \hat{B}(a,\varepsilon) \Rightarrow |x-a| \leq \varepsilon$.
Όμως $d(x,A) \leq |x-a| \leq \varepsilon$, άρα $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq \varepsilon\}$

Από τα παραπάνω έχουμε την ισότητα των συνόλων στην $(*)$ για $\varepsilon > 0$.

- Για $\varepsilon = 0$ ξέρουμε ότι $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) = 0\} = \bar{A} = A$ (A=κλειστό)

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι

$h(A,B) = \min\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B+\varepsilon \ , \ B \subseteq A+\varepsilon\}$

Απόδειξη

Κατά αρχάς παρατηρούμε ότι υπάρχει $\varepsilon \geq 0$: $A \subseteq B+\varepsilon$, $B \subseteq A+\varepsilon$, επειδή τα A, B είναι φραγμένα. (π.χ. $\varepsilon = 2(h(A,B) + diam B + diam A)$)

Άρα υπάρχει $g = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B+\varepsilon \ , B \subseteq A+\varepsilon\} \in \mathbb{R}$.

Αν $\varepsilon \geq 0$ και $A \subseteq B+\varepsilon$, $B \subseteq A+\varepsilon$, τότε $\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A) \leq \varepsilon$.

Αυτό ισχύει γιατί αν $a \in A \Rightarrow a \in B+\varepsilon \Rightarrow d(a,B) \leq \varepsilon$.

Αφού το $a \in A$ είναι τυχαίο, τότε

$\tilde{d}(A,B) = \max\{d(a,B) : a \in A\} \leq \varepsilon$. Όμοια $\tilde{d}(B,A) \leq \varepsilon$.

Άρα $h(A,B) \leq \varepsilon$. Συνεπώς $h(A,B) \leq g$.

Έστω ότι $h(A,B) < g$ και $h(A,B) < \varepsilon < g$.

Τότε $\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A) < \varepsilon$, άρα $d(a,B), d(b,A) < \varepsilon \ \forall a \in A, b \in B$.

Τώρα αν $a \in A \Rightarrow d(a,B) < \varepsilon \Rightarrow a \in B+\varepsilon \Rightarrow A \subseteq B+\varepsilon$.

Όμοια $B \subseteq A+\varepsilon$. Από τον ορισμό του g έχουμε $g \leq \varepsilon$. Άτοπο.

Άρα $h(A,B) = g$. Αφού το g είναι infimum του συνόλου $E = \{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B+\varepsilon \ , B \subseteq A+\varepsilon\}$ υπάρχει ακολουθία g_n στοιχείων του E: $g_n \to g$.

Δηλαδή έχουμε πως $g_n \geq g \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} g_n = g$ και $A \subseteq B+g_n$, $B \subseteq A+g_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(B+g_n) = B+g$, $B \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(A+g_n) = A+g$.

Δηλαδή $g \in E$, συνεπώς $h(A,B) = \min\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B+\varepsilon \ , B \subseteq A+\varepsilon\}$

Η h είναι μετρική

i) $h(A,B)\geq 0$. Προφανώς $h(A,A)=0$, $A\in H$.
Αν $h(A,B)=0=\min\{\varepsilon\geq 0 : A\subseteq B+\varepsilon,\ B\subseteq A+\varepsilon\}$,
τότε $A\subseteq B$, $B\subseteq A$, δηλαδή $A=B$.

ii) $h(A,B)=h(B,A)$

iii) $h(A,B)\leq h(A,C)+h(C,B)$, $A,B,C\in H$
Έστω $h(A,C)=g$, $h(C,B)=\delta$. Τότε
$A\subseteq C+g$, $C\subseteq A+g$ και $B\subseteq C+\delta$, $C\subseteq B+\delta$. Άρα
$A\subseteq C+g\subseteq B+(g+\delta)$ και $B\subseteq C+\delta\subseteq A+(g+\delta)$.
Δηλαδή $(g+\delta)\in\{\varepsilon\geq 0 : A\subseteq B+\varepsilon,\ B\subseteq A+\varepsilon\}$, συνεπώς
$\min\{\varepsilon\geq 0 : A\subseteq B+\varepsilon,\ B\subseteq A+\varepsilon\}=h(A,B)\leq g+\delta=h(A,C)+h(C,B)$.

__Πρόταση:__ Αν K_n φθίνουσα ακολουθία του μετρικού χώρου (H,h), $(K_{n+1}\subseteq K_n,\ n\in\mathbb{N})$ τότε η K_n συγκλίνει στο $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$, $K\in H$.

Απόδειξη
Το σύνολο K είναι κλειστό (ως τομή κλειστών) και φραγμένο, άρα $K\in H$. Αν $x_n\in K_n\subseteq K_1$, $n\in\mathbb{N}$, είναι τυχαία ακολουθία, τότε υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} ώστε $x_{k_n}\to x_0\in\mathbb{R}^n$. (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass)
Έστω $\nu\in\mathbb{N}$. Τότε $x_{k_n}\in K_\nu$, για $n\geq\lambda(\nu)$, άρα ένα τελικό τμήμα της $x_{k_n}\in K_\nu$ και αφού $x_{k_n}\to x_0$ και K_ν κλειστό, έχουμε $x_0\in K_\nu$.
Επομένως $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=K$, δηλαδή $K\neq\emptyset$.

Θα δείξουμε ότι $K_n \xrightarrow{h} K$.

Έστω $\varepsilon>0$. Ισχύει πως $K \subseteq K_n \subseteq K_n+\varepsilon$, $n\in\mathbb{N}$.

Θεωρούμε το $V=\bigcup_{a\in K} B(a,\varepsilon)$.

Το V είναι ανοιχτό, φραγμένο (επειδή K φραγμένο) και $K\subseteq V$.

Έστω X συμπαγές με $K_1\subseteq X$ και $V\subseteq X$ (π.χ. $X=K_1\cup\bar{V}$).

Τότε $X=V\cup(X\cap V^c)\underset{(*)}{\subseteq} V\cup K^c = V\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\right)^c = V\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n^c\right)$

με V, K_n^c ανοιχτά.

Η (*) ισχύει γιατί αν $y\in X\cap V^c$, τότε $y\in X$ και $y\in V^c\subseteq K^c$ (γιατί $K\subseteq V$), άρα $X\cap V^c\subseteq K^c$.

Η K_n^c είναι αύξουσα ακολουθία.

Το X είναι συμπαγές και είδαμε πως το $V\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n^c\right)$ είναι ένα ανοιχτό του κάλυμμα, άρα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Σε αυτό, πρέπει να περιέχεται το V.

Αλλιώς, αν το πεπερασμένο υποκάλυμμα είναι της μορφής $K_{i_1}^c\cup K_{i_2}^c\cup\dots\cup K_{i_k}^c$ με $i_k\in\mathbb{N}$, $k=1,..,k$

Θεωρούμε το $i=\max\{i_j,\ j=1,..,k\}$.

Τότε $K_i^c=K_{i_1}^c\cup\dots\cup K_{i_k}^c$ γιατί K_n^c είναι αύξουσα.

Άρα $X\subseteq K_i^c$. Όμως $K_i\subseteq K_1\subseteq X \Rightarrow K_i\subseteq K_i^c \Rightarrow K_i=\emptyset$. Άτοπο.

Δηλαδή $X\subseteq V\cup K_{i_1}^c\cup\dots\cup K_{i_k}^c$. Όπως πριν, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}: X\subseteq V\cup K_{n_0}^c$.

Τώρα αν $x\in K_{n_0} \Rightarrow x\in X\subseteq V\cup K_{n_0}^c \Rightarrow x\in V$ ή $x\in K_{n_0}^c$.

Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, άρα $x\in V$.

Συνεπώς $K_{n_0}\in V$ και $K_n\subseteq V=\bigcup_{a\in K}B(a,\varepsilon)\subseteq\bigcup_{a\in K}\hat{B}(a,\varepsilon)=K+\varepsilon$, αν $n\geq n_0$ (K_n φθίνουσα).

Τελικά $h(K_n,K)\leq\varepsilon$ για $n\geq n_0$. Άρα $K_n\xrightarrow{h}K$.