Γλαμπεδάκης Ιωάννης

Ορισμός

Έστω X χώρος με νόρμα, K ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X. Ένα υποσύνολο A του K καλείται ακραίο υποσύνολο του K αν το A είναι κλειστό, κυρτό και ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: $\forall x,y \in K$ και $0<\lambda<1$, αν $\lambda x+(1-\lambda)y \in A$ τότε και $x,y \in A$.

Παρατήρηση 1

Αν K κλειστό, κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα, τότε ένα σημείο x είναι ~~ακραίο σημείο του K~~, αν και μόνο αν το $\{x\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

Πρόταση 1

Έστω X χώρος με νόρμα και K ένα μη κενό κυρτό και κλειστό υποσύνολο του X.

i) Αν $\{A_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια από ακραία υποσύνολα του K με $A=\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, τότε το A είναι ακραίο υποσύνολο του K

ii) Αν $A \subset B \subset K$ ώστε το B είναι ακραίο υποσύνολο του K και το A ακραίο υποσύνολο του B, τότε το A είναι ακραίο υποσύνολο του K.

Απόδειξη:

i) Το A είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του K ως τομή κλειστών και κυρτών. Έστω $z \in A$ και $0<\lambda<1$, $x,y \in K$ ώστε $z=\lambda x+(1-\lambda)y$. Τότε $z \in A_i$ $\forall i \in I$ και άρα $x,y \in A_i$ $\forall i \in I$. Οπότε $x,y \in \bigcap_{i\in I} A_i = A$ και άρα το A είναι ακραίο υποσύνολο του K.

ii) Έστω $0<\lambda<1$, $x,y \in K$ και $z \in A$ με $z=\lambda x+(1-\lambda)y$. Αφού $A \subset B$ έχουμε ότι $z \in B$ και καθώς το B είναι ακραίο υποσύνολο του K, έχουμε ότι $x,y \in B$. Επειδή το A είναι ακραίο υποσύνολο του B, έπεται ότι $x,y \in A$. Άρα το A είναι ακραίο υποσύνολο του K.

Παρατήρηση 2

Από το ii) της προηγούμενης πρότασης έπεται ότι αν $A \subset K$ ακραίο υποσύνολο του K, τότε $ext A \subset ext K$, αφού αν $x \in ext A$ τότε το $\{x\} \subset A$ είναι ακραίο υποσύνολο του A και A ακραίο υποσύνολο του K και άρα το $\{x\}$ είναι ακραίο υποσύνολο και του K. Οπότε το x είναι ακραίο σημείο και του K, δηλαδή $x \in ext K$. Οπότε $ext A \subset ext K$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Krein - Milman θα χρειαστούμε τις εξής προτάσεις:

Πρόταση 2 (Υπενθύμιση από Πραγματική Ανάλυση)

Αν (X, ρ) μετρικός χώρος τότε

ο (X, ρ) είναι συμπαγής $\iff$ $\forall (F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών ισχύει ότι $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

(Ιδιότητα των πεπερασμένων τομών: $\forall J \subseteq I$ πεπερασμένο ισχύει ότι $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$.)

Πρόταση 3 (Πόρισμα από Θεώρημα Hahn - Banach)

Έστω K_1, K_2 κυρτά, μη κενά υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα X, ώστε $K_1 \cap K_2 = \emptyset$., K_1 είναι συμπαγές και K_2 κλειστό. Τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές φραγμένο (συνεχές), f, ώστε

$$\sup_{x \in K_1} f(x) < \inf_{x \in K_2} f(x)$$

Παρατήρηση 3

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι ο $X^* = \mathbb{B}(X, \mathbb{R})$ $= \{ f : X \to \mathbb{R} : f$ είναι συνεχές (φραγμένο) γραμμικό συναρτησοειδές$\}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, δηλαδή $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$, $\exists f \in X^*$ ώστε $f(x) \neq f(y)$. Πράγματι, παίρνοντας $K_1 = \{x\}$, $K_2 = \{y\}$ τότε $\exists f \in X^*$ με $\sup_{x \in K_1} f(x) < \inf_{x \in K_2} f(x) \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Θεώρημα Krein-Milman

Έστω X χώρος με νόρμα και K ένα μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Τότε $K=\overline{\mathrm{con}}(\mathrm{ext}(K))$

Απόδειξη:

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathrm{ext}K\neq\emptyset$.

Θέτουμε $\mathcal{A}=\{A\subset K: A$ ακραίο υποσύνολο του $K.\}$

Η οικογένεια $\mathcal{A}\neq\emptyset$, αφού $K\in\mathcal{A}$.

- Θα δείξουμε τώρα ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει ένα ελαχιστικό στοιχείο ως προς την μερική διάταξη, "$\subseteq$", του υποσυνόλου. Δηλαδή ότι $\exists\, S\in\mathcal{A}$ ώστε $\forall B\in\mathcal{A}$ με $B\subseteq S$ έπεται ότι $B=S$.

Ορίζουμε την μερική διάταξη $A\leq B \iff B\subseteq A$. $\forall A,B\in\mathcal{A}$.
Αν δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει ένα μεγιστικό στοιχείο ως προς την "$\leq$", τότε αυτό θα είναι ένα ελαχιστικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ ως προς την "$\subseteq$". Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Zorn.
Έστω $\mathcal{C}=\{A_i: i\in I\}$ μια αλυσίδα στην $\mathcal{A}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ έχει άνω φράγμα στην $\mathcal{A}$. (αφού η $\mathcal{C}$ είναι τυχαία)
Θέτουμε $A=\bigcap_{i\in I}A_i$. Τότε το A είναι μη κενό: Πράγματι, η οικογένεια $\mathcal{C}$ (επειδή είναι αλυσίδα) έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών (αφού αν $A_{i_1},\dots,A_{i_m}\in\mathcal{C}$ τότε $\bigcap_{j=1}^{m}A_{i_j}=A_{n_0}\neq\emptyset$, όπου $n_0=\min\{i_j: j=1,\dots,m\}$). Επίσης, αποτελείται από κλειστά σύνολα και το K είναι συμπαγές. Άρα από την Πρόταση 2 έχουμε ότι $A=\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$.
Επίσης από το (i) της Πρότασης 1 το A είναι ακραίο υποσύνολο του K και άρα $A\in\mathcal{A}$.
Προφανώς $A\geq A_i\ \forall i\in I$, αφού $A\subseteq A_i\ \forall i\in I$
Οπότε το A είναι ένα άνω φράγμα της αλυσίδας $\mathcal{C}$ και άρα από το Λήμμα του Zorn υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο S ως προς την "$\leq$" στην $\mathcal{A}$, το οποίο είναι ελαχιστικό ως προς την "$\subseteq$"

• Τώρα θα δείξουμε ότι κάθε ελαχιστικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ είναι μονοσύνολο.

Έστω ότι υπάρχει S ελαχιστικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ με τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία $x', y' \in S$. Τότε από την Παρατήρηση 3 υπάρχει f συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $f(x) \neq f(y)$ και έστω $f(x') < f(y')$. Επειδή το S είναι συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K), έχουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $a = \sup_{z \in S} f(z)$ και επιπλέον το σύνολο $B = \{z \in S : f(z) = a\} \subseteq S$ είναι μη κενό. Το B είναι ακραίο υποσύνολο του S:

αν $x, y \in S$, $0 < \lambda < 1$ και $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in B$, τότε

$f(z) = a \Rightarrow f((1-\lambda)x + \lambda y) = a \Rightarrow (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) = a$.

αν $f(x)$ ή $f(y) < a$, τότε $a = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) < (1-\lambda)a + \lambda a = a$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x) = f(y) = a$, δηλαδή $x, y \in B$.

Αφού το B είναι ακραίο υποσύνολο του S και το S ακραίο υποσύνολο του K, έχουμε ότι (από την Πρόταση 1 το (ii)) το B είναι ακραίο υποσύνολο του K και άρα $B \in \mathcal{A}$.

Όμως $f(x') < f(y') \leq a$, δηλαδή $x' \notin B$. Οπότε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subsetneq S$ που είναι άτοπο, αφού το S είναι ελαχιστικό ακραίο υποσύνολο του K.

Με αυτά τα 2 βήματα δείξαμε ότι $\mathrm{ext}\,K \neq \emptyset$, αφού δείξαμε ότι υπάρχει ακραίο υποσύνολο του K με ένα στοιχείο, $\{x_0\}$, οπότε αυτό από την Παρατήρηση 1 είναι ακραίο σημείο του K, δηλαδή $x_0 \in \mathrm{ext}\,K$

• Τέλος θα δείξουμε ότι $K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\,K)$

Θέτουμε $L = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\,K)$. Τότε το L είναι κλειστό υποσύνολο του K και άρα συμπαγές (αφού το K είναι συμπαγές) και κυρτό ως κυρτή θήκη του κυρτού συνόλου $\mathrm{co}(\mathrm{ext}\,K)$.
($L \subseteq K$, αφού $\mathrm{ext}\,K \subseteq K \overset{K \text{ κυρτό}}{\Longrightarrow} \mathrm{co}(\mathrm{ext}\,K) \subseteq K \overset{K \text{ κλειστό}}{\Longrightarrow} L = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\,K) \subseteq K$).
Έστω ότι ισχύει $L \subsetneq K$. Τότε υπάρχει $x \in K \setminus L$.
Από την Πρόταση 3 υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές f ώστε $\sup_{z \in L} f(z) < f(x)$.

Έστω $a = \sup\{f(y) : y \in K\}$ και $B = \{y \in K : f(y) = a\}$.
Όπως στο προηγούμενο βήμα, το B είναι μη κενό (αφού K είναι συμπαγές) και ακραίο υποσύνολο του K.
Επειδή το B είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K, είναι και το ίδιο συμπαγές. Τώρα με την ίδια διαδικασία που δείξαμε για το K ότι ισχύει $\mathrm{ext}\,K \neq \emptyset$, μπορούμε να δείξουμε το ίδιο για το B. Δηλαδή έχουμε $\mathrm{ext}\,B \neq \emptyset$.
Επειδή όμως το B είναι ακραίο υποσύνολο του K, από την Παρατήρηση 2 έπεται ότι $\mathrm{ext}\,B \subset \mathrm{ext}\,K \subset L$. (αφού $B \subset K$ και $\mathrm{ext}\,K \subset L$). Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού αν $y \in \mathrm{ext}\,B$, τότε $f(y) = a$. Αλλά $y \in \mathrm{ext}\,B \subseteq L$, δηλαδή $y \in L$ οπότε $f(y) < f(x) \leq a$

Άρα τελικά έχουμε ότι $K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\,K)$.

Θα δούμε τώρα ένα παράδειγμα ενός συνόλου που είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο που δεν έχει ακραία σημεία. Και το οποίο μας δείχνει ότι η υπόθεση της συμπάγειας στο Θεώρημα Krein - Milman δεν μπορεί να παραληφθεί.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Έστω ο χώρος $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to 0\}$.
με νόρμα $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Έστω $B_{c_0} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq 1\}$ η μοναδιαία μπάλα του c_0

Θα δείξουμε ότι κάθε $x \in B_{c_0}$ γράφεται ως $x = \frac{y_1+y_2}{2}$ με $y_1 \neq y_2$ και $y_1, y_2 \in B_{c_0}$ και άρα δεν μπορεί να είναι ακραίο σημείο του B_{c_0}.

Έστω $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε $x_n \to 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_{n_0}| < \frac{1}{4}$. Θέτουμε $y_1 = (y_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $y_n^1 = \begin{cases} x_n, & n \neq n_0 \\ x_{n_0} + \frac{1}{4}, & n = n_0 \end{cases}$

και $y_2 = (y_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $y_n^2 = \begin{cases} x_n, & n \neq n_0 \\ x_{n_0} - \frac{1}{4}, & n = n_0. \end{cases}$

Τότε βλέπουμε ότι i) $y_1, y_2 \in c_0$ αφού τελικά είναι ίσα με το x

ii) $\|y_1\| \leq 1$ και $\|y_2\| \leq 1$ και άρα $y_1, y_2 \in B_{c_0}$.

iii) $x = \frac{y_1+y_2}{2}$ και $y_1, y_2 \neq x$ και $y_1 \neq y_2$.

Οπότε $\text{ext}\, B_{c_0} = \emptyset$.

Το επόμενο παράδειγμα μας δείχνει ότι στις άπειρες διαστάσεις η κλειστότητα στο $K = \overline{con}(ex\,K)$, στο Θεώρημα Krein-Milman, δεν μπορεί να παραληφθεί σε αντίθεση με τις πεπερασμένες όπου έχουμε το Θεώρημα του Minkowski.

Παράδειγμα 2

Έστω ο χώρος $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty\}$

με νόρμα $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2\right)^{1/2}$

Θεωρώ τα στοιχεία $u_n = (0, 0, \dots, 0, \underset{n\text{-θέση}}{1/n}, 0, \dots) \in \ell_2$

και έστω $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ το οποίο είναι συμπαγές.

Παίρνω την $con\,A = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_{n_i}, \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \le 1\}$

και $K = \overline{con}\,A$. το οποίο είναι κυρτό υποσύνολο του ℓ_2.

Θα δείξουμε ότι το K είναι και συμπαγές χρησιμοποιώντας το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα:

i) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $E \subseteq X$ υποσύνολο του X ολικά φραγμένο. Τότε το $con\,E$ είναι ολικά φραγμένο.

ii) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach (πλήρης χώρος με νόρμα) και $K \subseteq X$ ολικά φραγμένο. Τότε το $\overline{con}\,K$ είναι συμπαγές

Απόδειξη:

i) Έστω $\varepsilon > 0$. Το E είναι ολικά φραγμένο άρα $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ για κάποια $x_i \in X$. Ξέρουμε (από το Θεώρημα Καραθεοδωρή) ότι το $con(\{x_1, x_2, \dots, x_k\})$ είναι συμπαγές.

Έστω $x \in con\,E$. Τότε $x = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j y_j$, $\sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \ge 0$, $y_j \in E$ $\forall j = 1, \dots, \nu$.

Τότε $\forall y_j \in E$, $\exists x_{i_j} : y_j \in S(x_{i_j}, \frac{\varepsilon}{2})$, $j = 1, \dots, \nu$.

Αφού το $con(\{x_1, \dots, x_k\})$ είναι συμπαγές $\exists z_N \in X$, $N = 1, \dots, n$ ώστε $con(\{x_1, \dots, x_k\}) \subseteq \bigcup_{N=1}^{n} S(z_N, \varepsilon/2)$

Οπότε $\quad x=\sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j x_{i_j} + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j (y_j - x_{i_j}) \in con(\{x_1,\dots,x_k\}) + S(0,\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq$

$\subseteq \bigcup_{n=1}^{n} S(z_n,\frac{\varepsilon}{2}) + S(0,\varepsilon/2) = \{z_1,\dots,z_n\} + S(0,\frac{\varepsilon}{2}) + S(0,\frac{\varepsilon}{2})$

$= \{z_1,\dots,z_n\} + S(0,\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{n} S(z_n,\varepsilon)$. Άρα $con\, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{n} S(z_n,\varepsilon)$

δηλαδή το $con\, E$ είναι ολικά φραγμένο.

ii) Έστω K ολικά φραγμένο υποσύνολο χώρου Banach.
Τότε το $con\, K$ είναι ολικά φραγμένο (από (i)) οπότε το $\overline{con}\, K$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.
Τώρα το $\overline{con}\, K$ είναι κλειστό υποσύνολο ενός πλήρους χώρου, οπότε είναι και πλήρες.
Τελικά το $\overline{con}\, K$ είναι πλήρες και ολικά φραγμένο, δηλαδή συμπαγές.

Συνεχίζουμε στο παράδειγμα:
Από το Θεώρημα και αφού το A είναι συμπαγές, δηλαδή πλήρες και ολικά φραγμένο, έπεται ότι το $K=\overline{con}\, A$ είναι συμπαγές αφού ο ℓ_2 είναι πλήρης

Παρατηρούμε ότι $ext\, K = A$, όμως δεν ισχύει ότι $K = con(ext\, K) = con\, A$ αφού το $con\, A$ δεν είναι συμπαγές, μάλιστα δεν είναι καν κλειστό.

Άρα $K \supsetneq con(ext\, K)$.

Γενικά δεν ισχύει ότι αν για ένα κυρτό και κλειστό σύνολο K σε έναν χώρο απείρων διαστάσεων ισχύει ότι $K = \overline{con}(ext K)$ τότε αυτό είναι συμπαγές. Δηλαδή το Θεώρημα Krein-Milman δεν χαρακτηρίζει τα συμπαγή σύνολα. Ένα παράδειγμα είναι το εξής:

Παράδειγμα 3

Έστω η μοναδιαία μπάλα B_{ℓ_2} του ℓ_2, όπως στο παράδειγμα 2. Τότε το $B_{\ell_2} = \{ x \in \ell_2 : \|x\| \leq 1 \}$ είναι κλειστό και φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του ℓ_2 αλλά δεν είναι συμπαγές.

Όμως $B_{\ell_2} = \overline{con}(ext B_{\ell_2})$.

Απόδειξη:

Στον ℓ_2 το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:

αν $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$. τότε $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

Θα δείξουμε ότι $ext B_{\ell_2} = S_{\ell_2} = \{ x \in \ell_2 : \|x\| = 1 \}$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι

αν $x, y \in S_{\ell_2}$ και $\langle x, y \rangle = 1$ τότε $x = y$.

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι $x - y = 0$ ή $\langle x - y, x - y \rangle = 0$

Έχουμε $\langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = 1 - 2 + 1 = 0$

(αφού η νόρμα προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$.). Άρα $x = y$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι $S_{\ell_2} \subseteq ext B_{\ell_2}$.

Έστω $x \in S_{\ell_2}$ και έστω $y_1, y_2 \in B_{\ell_2}$ και $0 < \lambda < 1$ ώστε $x = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$. Θα πρέπει $y_1, y_2 \in S_{\ell_2}$, διότι αλλιώς αν $\|y_1\|$ ή $\|y_2\| < 1$ τότε $\|x\| \leq \lambda \|y_1\| + (1 - \lambda) \|y_2\| < \lambda + (1 - \lambda) = 1$. που είναι άτοπο

Επίσης θα πρέπει $\langle x, y_1 \rangle = 1$ και $\langle x, y_2 \rangle = 1$

Πράγματι, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι $|\langle x, y_1 \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y_1\| = 1$ και όμοια $|\langle x, y_2 \rangle| \leq 1$.

όμως $1 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, x \rangle = \lambda \langle y_1, x \rangle + (1 - \lambda) \langle y_2, x \rangle$

άρα αν $\langle y_1, x \rangle$ ή $\langle y_2, x \rangle < 1$ τότε $1 < \lambda + (1 - \lambda) < 1$

που είναι άτοπο.

Οπότε είναι $x, y_1, y_2 \in S_{\ell_2}$ και $\langle y_1, x\rangle = \langle y_2, x\rangle = 1$.

Από την αρχική παρατήρηση έχουμε $x = y_1 = y_2$.

Οπότε το x είναι ακραίο σημείο του B_{ℓ_2} και άρα

$S_{\ell_2} \subseteq ext\, B_{\ell_2}$ (αφού το x ήταν τυχαίο).

Έπειτα θα δείξουμε ότι $ext\, B_{\ell_2} \subseteq S_{\ell_2}$.

Πράγματι, αν $x \in ext\, B_{\ell_2}$ και $\|x\| < 1$ τότε

a) αν $x = 0$, επιλέγουμε $y \in S_{\ell_2}$ (π.χ. το $e_1 = (1, 0, \dots)$) και

τότε $0 = \frac{1 + (-1)}{2}$ που είναι άτοπο.

b) αν $x \neq 0$, θέτουμε $y_1 = \frac{x}{\|x\|} \in S_{\ell_2}$ και $y_2 = 0$

Τότε για $\lambda = \|x\| \in (0,1)$ έχουμε $x = \lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) y_2$

που είναι άτοπο.

Οπότε $ext\, B_{\ell_2} \subseteq S_{\ell_2}$

Άρα τελικά είναι $S_{\ell_2} = ext\, B_{\ell_2}$

Θα δείξουμε τώρα ότι $B_{\ell_2} = con(ext\, B_{\ell_2}) = con\, S_{\ell_2}$.

Έχουμε $S_{\ell_2} \subseteq B_{\ell_2}$ και αφού B_{ℓ_2} κυρτό έπεται $con\, S_{\ell_2} \subseteq B_{\ell_2}$.

Τώρα έστω $x \in B_{\ell_2}$, τότε:

a) αν $x = 0$, παίρνοντας $e_1 = (1, 0, \dots) \in S_{\ell_2}$ και

$-e_1 = (-1, 0, \dots) \in S_{\ell_2}$ έχουμε ότι $0 = \frac{1}{2}(e_1 + (-e_1)) \in con(S_{\ell_2})$

b) αν $x \neq 0$, τότε θέτουμε $y_1 = \frac{x}{\|x\|} \in S_{\ell_2}$ και $y_2 = -\frac{x}{\|x\|} \in S_{\ell_2}$

και έχουμε για $\lambda = \frac{\|x\| + 1}{2} \leq 1$, $\lambda > 0$ ότι

$x = \lambda \cdot \frac{x}{\|x\|} + (1-\lambda) \cdot \left(-\frac{x}{\|x\|}\right)$.

Οπότε $B_{\ell_2} \subseteq con\, S_{\ell_2}$.

Άρα τελικά έχουμε $B_{\ell_2} = con\, S_{\ell_2} = con(ext\, B_{\ell_2})$.