Σπυρίδων Μανιάτης ΑΜ: 1112200800112

Θεώρημα Hahn-Banach

<u>Θεώρημα</u> (Hahn-Banach): Έστω X διανυσματικός χώρος και $p: X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Αν Y είναι υπόχωρος του X και $f: Y \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, ώστε $f(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$, τότε υπάρχει $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ γραμμική, ώστε $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\tilde{f}|Y = f$.

Το παραπάνω αποτελεί την αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach. Πριν την απόδειξη του Θεωρήματος, αποδεικνύουμε το παρακάτω Λήμμα, με το οποίο επιτυγχάνεται η κατά μία διάσταση επέκταση μιας συνάρτησης f, όπως αυτήν παραπάνω.

<u>Λήμμα</u>: Έστω X διανυσματικός χώρος, Y υπόχωρος του X, p υπογραμμικό συναρτησοειδές, $f: Y \to \mathbb{R}$ γραμμική και $f(y) \leq p(y)$ $\forall y \in Y$. Έστω $z_0 \in X \setminus Y$. Τότε υπάρχει $\tilde{f}: Z = \langle Y \cup \{z_0\} \rangle \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της f ώστε $\tilde{f}(z) \leq p(z)$ $\forall z \in Z$.

<u>Απόδειξη</u>: Αφού $z_0 \in X \setminus Y$ έχουμε ότι $z_0 \notin \langle Y \rangle$. Κάθε $z \in Z = \langle Y \cup \{z_0\} \rangle$ γράφεται μοναδικά ως $z = y + \lambda z_0$ με $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα η γραμμική επέκταση της f θα πρέπει να είναι της μορφής:

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(y + \lambda z_0) = \tilde{f}(y) + \tilde{f}(\lambda z_0) = f(y) + \lambda c \quad \text{για κάποιο } c \in \mathbb{R}.$$

Για $x, y \in Y$ έχουμε ($x - y \in Y$ γιατί Y υπόχωρος): $f(x-y) \leq p(x-y)$

$$\text{ή} \quad f(x) - f(y) \leq p(x-y) = p(x + z_0 - y - z_0) \overset{\text{τριγ.}}{\leq} p(x+z_0) + p(-y-z_0).$$

Άρα $\quad -p(-y-z_0) - f(y) \leq p(x+z_0) - f(x) \quad \forall x, y \in Y$ (αφού επιλέγησαν τυχαία)

Συνεπώς έχουμε την $(*)$: $-p(-y-z_0) - f(y) \leq \sup_{y \in Y}\{-p(-y-z_0) - f(y)\} \leq c_0 \leq \inf_{x \in X}\{p(x+z_0) - f(x)\} \leq p(x+z_0) - f(x)$, για κάποιο $c_0 \in \mathbb{R}$.

— <u>Ισχυρισμός</u>: Η $\tilde{f}: Z \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(y + \lambda z_0) = f(y) + \lambda c_0$ ικανοποιεί την $\tilde{f}(z) \leq p(z)$ $\forall z \in Z$.

- $\lambda = 0$: $\quad \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y + \lambda z_0) = \tilde{f}(y) = f(y) \leq p(y)$.
- $\lambda > 0$: $\quad \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y + \lambda z_0) = \lambda \tilde{f}(\frac{y}{\lambda} + z_0) = \lambda(f(\frac{y}{\lambda}) + c_0) \overset{(*)}{\leq} \lambda(f(\frac{y}{\lambda}) + p(\frac{y}{\lambda} + z_0) - f(\frac{y}{\lambda}))$
$$= p(y + \lambda z_0) = p(z)$$

• $\lambda<0$: $\tilde f(z) = \tilde f(y+\lambda z_0) = -\lambda \tilde f(-\frac{y}{\lambda} - z_0) = -\lambda(f(-\frac{y}{\lambda}) - c_0) \overset{(*)}{\leq} -\lambda(f(-\frac{y}{\lambda}) + p(-\frac{y}{\lambda}-z_0) - f(-\frac{y}{\lambda}))$

$$= p(y+\lambda z_0) = p(z)$$

Συνεπώς, για $\tilde f(z_0)=c_0$ έχουμε την επέκταση $\tilde f: Z=\langle Y\cup\{z_0\}\rangle \to \mathbb{R}$, της f με $\tilde f(z)\le p(z)\ \forall z\in Z$.

Απόδειξη του Θεωρήματος:

Είδαμε πως με το παραπάνω Λήμμα επιτυγχάνεται η κατά μία διάσταση επέκταση. Για διανυσματικό χώρο X με πεπερασμένη ή άπειρη αριθμήσιμη διάσταση αρκεί η χρήση επαγωγής. Για τη γενίκευση του Θεωρήματος Hahn-Banach σε διανυσματικούς χώρους με οποιαδήποτε διάσταση, είναι απαραίτητη η χρήση του Λήμματος Zorn.

Έστω το σύνολο $\mathcal{E} = \{(Z, f_Z) :$ Z υπόχωρος του X, $f_Z: Z\to\mathbb{R}$ γραμμική με $f_Z|Y = f$, $f_Z(z)\le p(z)\ \forall z\in Z$, όπου Y υπόχωρος του $X\}$.

• $\mathcal{E}\neq\emptyset$ γιατί προφανώς $(Y,f)\in\mathcal{E}$.

Ορίζοντας τη μερική διάταξη $<$ ως εξής: $(Z_1,f_{Z_1}) < (Z_2, f_{Z_2})$ αν Z_1 υπόχωρος του Z_2 και $f_{Z_2}|Z_1 = f_{Z_1}$, ο χώρος $(\mathcal{E},<)$ είναι μερικά διατεταγμένος.

• Κάθε $\mathcal{E}'\subset\mathcal{E}$ αλυσίδα, έχει άνω φράγμα το (W,f_W) με $W=\bigcup_{i\in I}\{Z_i\}$ και $f_W=\bigcup_{i\in I}\{f_{Z_i}\}$, όπου $(Z_i, f_{Z_i})\in\mathcal{E}'$ $\forall i\in I$ (I σύνολο δεικτών)

Το W είναι υπόχωρος γιατί $\mathcal{E}'$ αλυσίδα και Z υπόχωρος του X για κάθε $(Z,f_Z)\in\mathcal{E}$.

Επίσης η f_W είναι γραμμική (από τον ορισμό του $\mathcal{E}$).

Συνεπώς, το $(\mathcal{E},<)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος Zorn, άρα υπάρχει $(Z,f_Z)\in\mathcal{E}$ μεγιστικό.

Αρκεί να δείξουμε ότι $Z=X$ και έτσι η f_Z θα είναι η επέκταση της $f:Y\to\mathbb{R}$ σε όλο το X.

Προς απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι $Z\neq X$. Άρα υπάρχει $z_0\in X\setminus Z$.

Από το Λήμμα, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde f_Z$ της f_Z με $\tilde f_Z: \langle Z\cup\{z_0\}\rangle\to\mathbb{R}$, $\tilde f_Z(z)\le p(z)$ $\forall z\in \langle Z\cup\{z_0\}\rangle$. Συνεπώς $(Z,f_Z) < (\tilde Z,\tilde f_Z)$ που αναιρεί την μεγιστική ιδιότητα του (Z,f_Z) αφού $(\tilde Z,\tilde f_Z)\in\mathcal{E}$ αν $\tilde Z=\langle Z\cup\{x_0\}\rangle$ και $\tilde f_Z$ η επέκταση όπως στο Λήμμα, Άτοπο.

Γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach

Παρατήρηση: Κάθε υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)=c\}$ μιας γραμμικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, ο διαχωρισμός συνόλων διατυπώνεται ως εξής (με αναλυτική μορφή):

Αν $\emptyset \neq K_1,K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτά, ξένα, τότε υπάρχει $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ γραμμική και $c\in\mathbb{R}$ ώστε:

$K_1 \subseteq \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\leq c\}$ και $K_2\subseteq\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\geq c\}$ ή $\sup_{x\in K_1} f(x) \leq \inf_{x\in K_2} f(x)$.

Θα δούμε πως ισχύει κάτι ανάλογο για τυχαίο διανυσματικό χώρο με νόρμα X.

Θεώρημα: Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X με $K^\circ\neq\emptyset$ και $x_0\in X\setminus K^\circ$. Τότε υπάρχει $\tilde{f}\in X^*$, $\tilde{f}\neq 0$, ώστε $\sup_{x\in K}\tilde{f}(x)\leq f(x_0)$.

Απόδειξη: Αρκεί να δειχθεί για $0\in K^\circ$. Αν $0\notin K^\circ$, για $y_0\in K^\circ$ θέτουμε $L=K-y_0$ και $z_0=x_0-y_0$. Τότε $0\in L^\circ$ και $z_0\notin L^\circ$. Άρα αν $f\in X^*$ με $\sup_{x\in L} f(x)\leq f(z_0)$ τότε $\sup_{x\in L} f(x) = \sup_{x\in K-y_0} f(x) =$
$= \sup_{x\in K} f(x) - f(y_0)$, $f(z_0)=f(x_0)-f(y_0)$ και άρα $\sup_{x\in K} f(x)\leq f(x_0)$.

Συνεπώς, υποθέτουμε ότι $0\in K^\circ$. Έστω $Y=\langle x_0\rangle = \{\lambda x_0 : \lambda\in\mathbb{R}\}$. Ορίζουμε την γραμμική συνάρτηση $f:Y\to\mathbb{R}$ με $f(y)=\lambda$, αν $y=\lambda x_0$. Τότε για κάθε $y\in Y$ έχουμε ότι $f(y)\leq p_K(y)$ (p_K το συναρτησοειδές Minkowski του K). Αν $y=\lambda x_0$ με $\lambda\leq 0$, τότε $f(y)=\lambda\leq 0\leq p_K(y)$ ενώ αν $\lambda>0$ έχουμε $p_K(y)=p_K(\lambda x_0) = \lambda p_K(x_0)\geq\lambda = f(y)$ (γιατί $p_K(x)\geq 1$ αν $x\notin K^\circ$)

Από Hahn-Banach υπάρχει $\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της f με $\tilde{f}(x)\leq p_K(x)$ $\forall x\in X$.
p_K φραγμένη $\Rightarrow \tilde{f}$ φραγμένη. Επίσης $\tilde{f}(x_0)=f(x_0)=1$, $\sup_{x\in K}\tilde{f}(x)\leq\sup_{x\in K} p_K(x)\leq 1$ και $\sup_{x\in K}\tilde{f}(x)\leq f(x_0)$

Θεώρημα: Έστω $\emptyset\neq K_1,K_2\subseteq X$, X χώρος με νόρμα, ώστε $K_1^\circ\neq\emptyset$ και $K_1^\circ\cap K_2=\emptyset$, K_1,K_2 κυρτά. Τότε υπάρχει f, φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, $f\neq 0$ ώστε $\sup_{x\in K_1} f(x)\leq \sup_{x\in K_2} f(x)$.

Απόδειξη: $K_1^\circ - K_2 = \bigcup_{x\in K_2} K_1^\circ - x$ ανοικτό και κυρτό (ένωση ανοικτών, διαφορά κυρτών).

$K_1\cap K_2=\emptyset \Rightarrow 0\notin K_1^\circ-K_2$. Αν $K=K_1-K_2$ τότε $K^\circ = K_1^\circ-K_2$ ($\overline{K_1^\circ}=\overline{K_1}\Rightarrow K_1^\circ$ πυκνό στο K_1 άρα $K_1^\circ-K_2$ ανοικτό, πυκνό, κυρτό υποσύνολο του $K=K_1-K_2$). Άρα $K^\circ=K_1^\circ-K_2$.

Άρα $0\notin K^\circ$ και από προηγούμενο Θεώρημα $\exists f$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές ($f:X\to\mathbb{R}$), $f\neq 0$ ώστε $\sup_{x\in K} f(x)\leq f(0)$ ή $\sup_{x\in K_1-K_2} f(x)\leq f(0) \Rightarrow \sup_{x\in K_1} f(x)\leq\inf_{x\in K_2} f(x)$.

Θεώρημα: Έστω $\emptyset \neq K_1, K_2 \subseteq X$ κυρτά, X χώρος με νόρμα και $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Επίσης K_1 συμπαγές, K_2 κλειστό. Τότε υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f: X \to \mathbb{R}$ ώστε:

$$\sup_{x \in K_1} f(x) < \inf_{x \in K_2} f(x)$$

Απόδειξη: Θέτουμε $K = K_2 - K_1$. K κυρτό και $0 \notin K$.

– Το K είναι κλειστό: Έστω $y_n \in K_2 - K_1$, $n = 1, 2, \dots$ και $y \in X$ ώστε $y_n \to y$.

Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ υπάρχουν $x_n \in K_1$, $z_n \in K_2$ με $y_n = z_n - x_n$.

K_1 συμπαγές $\Rightarrow$ υπάρχει (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) και $x_0 \in K_1$: $x_{k_n} \to x_0$.

Τότε $y_{k_n} \to y$, άρα $z_{k_n} = y_{k_n} + x_{k_n} \to y + x_0$. Επειδή K_2 κλειστό, $y + x_0 \in K_2$.

Άρα $y = (y + x_0) - x_0 \in K_2 - K_1$.

Συνεπώς $\exists \varepsilon > 0 : B(0, \varepsilon) \cap K = \emptyset$. Από προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει f φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f: X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$ ώστε:

$$\sup_{x \in B(0,\varepsilon)} f(x) \leq \inf_{x \in K_2 - K_1} f(x) \Rightarrow 0 < \varepsilon \|f\| \leq \inf_{x \in K_2} f(x) - \sup_{x \in K_1} f(x)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in K_1} f(x) < \inf_{x \in K_2} f(x)$$

Έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν

Ορισμός: Μια διμελής σχέση $\leq$ σε ένα μη κενό σύνολο E καλείται μερική διάταξη στο E αν είναι:
(i) Αυτοπαθής: $x \leq x \quad \forall x \in E$.
(ii) Μεταβατική: αν $x, y, z \in E$ με $x \leq y$ & $y \leq z$ τότε $x \leq z$.
(iii) Αντισυμμετρική: αν $x, y \in E$ με $x \leq y$ & $y \leq x$ τότε $x = y$.
Αν $\leq$ είναι μια μερική διάταξη στο E τότε ο $(E, \leq)$ (ή απλά E) καλείται μερικά διατεταγμένος χώρος.

Θεωρούμε $(X, \leq)$ μερικά διατεταγμένο χώρο.

Ορισμοί: 1) Ένα υποσύνολο C του $(X, \leq)$ ονομάζεται αλυσίδα αν $\forall x, y \in C$ ισχύει $x \leq y$ ή $y \leq x$.
2) Αν $A \subset X$, ένα στοιχείο $x \in X$ ονομάζεται άνω φράγμα του A αν $a \leq x \quad \forall a \in A$.
3) Ένα στοιχείο $m \in X$ λέγεται μεγιστικό στοιχείο του X αν $(x \in X \text{ \& } m \leq x) \Rightarrow m = x$.

Λήμμα του Zorn: Έστω $(E, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Αν κάθε αλυσίδα του E έχει άνω φράγμα τότε ο E έχει μεγιστικό (maximal) στοιχείο.

Ορισμός: Κάθε συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$, όπου X διανυσματικός χώρος καλείται γραμμικό συναρτησοειδές του X. Το f καλείται φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές αν η f είναι φραγμένη (συνεχής).

Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια συνάρτηση $p: X \to \mathbb{R}$ λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές αν:
(1) $p(x) \geq 0, \ \forall x \in X$
(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0$ (θετικά ομογενής)
(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (τριγωνική ανισότητα)

Ορισμός: Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται υπερεπίπεδο αν $W = x + Y$ και Y είναι συνδιάστασης 1 υπόχωρος του X.

<u>Ορισμός</u>: Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X ώστε $0 \in K^{\circ}$. Το συναρτησοειδές Minkowski του K ορίζεται να είναι η συνάρτηση $p_K : X \to \mathbb{R}$ με:

$$p_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\} = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}.$$

Κάποιες προτάσεις που θα χρησιμοποιηθούν

Πρόταση: Έστω X διανυσματικός χώρος. Τότε:

(i) Αν $f: X \to \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ τότε ο $\mathrm{Ker} f$ είναι συνδιάστασης 1.

(ii) Ένα $W \subset X$ είναι υπερεπίπεδο $\Leftrightarrow$ υπάρχει $f: X \to \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ και $t \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $W = f^{-1}(\{t\})$.

Απόδειξη: (i) Επειδή f γραμμική, $\mathrm{Ker} f$ υπόχωρος του X. Επίσης, $\mathrm{Ker} f \neq X$ γιατί $f \neq 0$. Επειδή η f είναι υποχρεωτικά επί ($f \neq 0$), επιλέγουμε $x \in X$ ώστε $f(x) = 1$.
Θα δείξουμε ότι για κάθε $y \in X$ υπάρχουν $z \in \mathrm{Ker} f$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $y = \lambda x + z \Rightarrow$ άρα $\mathrm{Ker} f$ συνδιάστασης 1. Έστω $\lambda = f(y) \in \mathbb{R}$. Τότε $f(y - \lambda x) = f(y) - \lambda f(x) = \lambda - \lambda \cdot 1 = 0$ άρα $y - \lambda x \in \mathrm{Ker} f$.
Άρα $y = \lambda x + (y - \lambda x)$.

(ii) Αν $W \subset X$ υπερεπίπεδο, τότε $W = x + Y$ με Y υπόχωρο συνδιάστασης 1.
Για $x \notin Y$ ορίζουμε $f: X \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x + y) = \lambda$. Η f γραμμική, $f \neq 0$ και $W = f^{-1}(\{1\})$.
Αν $x \in Y$ τότε $W = Y$, για τυχαίο $z \in X \setminus Y$ και $f: X \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda z + y) = \lambda$, f γραμμική, $W = f^{-1}(\{0\})$.

Πρόταση: Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X με $0 \in K^{\circ}$ και έστω p_K το συναρτησοειδές Minkowski του K. Τότε:

(1) $K^{\circ} = \{x \in X : p_K(x) < 1\}$.

(2) $\bar{K} = \{x \in X : p_K(x) \leq 1\}$.

(3) $\partial K = \{x \in X : p_K(x) = 1\}$.

Απόδειξη: Άμεση από τον χαρακτηρισμό της νόρμας μέσω της συνάρτησης στάθμης κυρτού, που αποδείχθηκε στην τάξη.

Πρόταση: Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X, ώστε $0 \in K^\circ$. Τότε:

$$p_{K^\circ} = p_K = p_{\bar K} \quad (p_{K^\circ}, p_K, p_{\bar K} \text{ συναρτησοειδή Minkowski των } K^\circ, K, \bar K \text{ αντίστοιχα}).$$

Απόδειξη: Άμεση απ' αυτά που έχουμε κάνει στην τάξη.

Πόρισμα: Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X με $K^\circ \neq \emptyset$. Τότε:

$$\overline{K^\circ} = \bar K \text{ και } (\bar K)^\circ = K^\circ.$$

Απόδειξη: $\overline{K^\circ} = \{x \in X : p_{K^\circ}(x) \leq 1\} = \{x \in X : p_K(x) \leq 1\} = \bar K$

$(\bar K)^\circ = \{x \in X : p_{\bar K}(x) < 1\} = \{x \in X : p_K(x) < 1\} = K^\circ$

Πόρισμα: Έστω K κυρτό με $K^\circ \neq \emptyset$. Τότε για κάθε $V \subset K$ ανοικτό κυρτό και πυκνό στο K έχουμε ότι $V = K^\circ$.

Απόδειξη: Από το παραπάνω Πόρισμα, $(\bar V)^\circ = V^\circ$. Επειδή το V ανοικτό $V^\circ = V$ και άρα $(\bar V)^\circ = V$.
Επίσης V πυκνό στο K. Άρα $\bar V = \bar K$ και συνεπώς πάλι από προηγούμενο πόρισμα, $(\bar V)^\circ = (\bar K)^\circ = K^\circ$.
Άρα $K^\circ = V$.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα Hahn-Banach ισχύει και για f φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, αν
$f: Y \to \mathbb{R}$ και $M \geq 0$: $|f(y)| \leq M\|y\|$ $\forall y \in Y$ $\exists \tilde f: X \to \mathbb{R}$ γραμ. επέκταση του f ώστε
$|\tilde f(x)| \leq M\|x\|$ $\forall x \in X$ (βλ. Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης - Σπύρος Αργυρός [σελ.57])
Η Παρατήρηση χρησιμοποιείται στη Γεωμετρική μορφή του Θ. Hahn-Banach.
Ισχύει για τον εξής λόγο:
Τα κυρτά σύνολα που θεωρούμε έχουν το 0 στο εσωτερικό τους, συνεπώς περιέχουν μια $B(0,\varepsilon)$.
Επειδή $B(0,\varepsilon) \subseteq K$ (K κυρτό) έχουμε ότι το συναρτησοειδές p_K είναι φραγμένο πάνω σε μπάλα κέντρου 0 άρα (Πρόταση Συν. Ανάλυσης) είναι φραγμένο σε όλον τον χώρο με τη νόρμα συναρτήσεων ($g: X \to \mathbb{R}$ $\|g\| = \sup\{g(x) : x \in B(0,1)\}$)