Άσκηση 4

Αν K, M κυρτά τότε $ri(K+M) = ri(K) + ri(M)$

Απόδειξη

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in K \cap M$. Τότε $aff(K+M) = span(K+M) = span(K) + span(M) = aff(K) + aff(M)$. Θεωρούμε $x_1 \in ri(K)$ και $x_2 \in ri(M)$. Θα δείξουμε ότι $x_1 + x_2 \in ri(K+M)$. Έστω τυχόν $z \in aff(K+M)$. Τότε $\exists\ y_1 \in aff(K)$ και $y_2 \in aff(M)$ ώστε $z = y_1 + y_2$

Αφού $x_1 \in ri(K)$ $\exists\ t_1 \in (0,1)$ ώστε $(1-t)x_1 + ty_1 \in K$

(Αυτό επειδή υπάρχει $w \in (x_1, y_1)$ ώστε $[x_1, w] \subseteq K$)

Όμοια $\exists\ t_2 \in (0,1)$ ώστε $(1-t_2)x_2 + ty_2 \in M$

Τώρα διαλέγουμε $t \in \mathbb{R}$ ώστε $0 < t \leq \min\{t_1, t_2\}$. Τότε $(1-t)(x_1+x_2) + t(y_1+y_2) \in K+M$. Από το Λήμμα υπάρχει $z_0 \in (x_1+x_2, y_1+y_2 = z)$ ώστε $[x_1+x_2, z_0] \subseteq K+M$ δηλαδή $x_1 + x_2 \in ri(K+M)$

• Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρησιμοποιήσουμε ότι $\overline{K+M} = \overline{riK + riM}$. Από την άσκηση 3 έχουμε

$$ri(K+M) = ri(\overline{K+M}) = ri(\overline{riK + riM}) =$$
$$= ri(riK + riM) \underset{\text{εξ' ορισμού}}{\subseteq} ri(K) + ri(M)$$