Άσκηση 3

Θα δείξουμε αρχικά ότι $\overline{K} = \overline{\text{ri}K}$

• $\text{ri}K \subseteq K \Rightarrow \overline{\text{ri}K} \subseteq \overline{K}$

Έστω $x \in \overline{K}$ και $y \in \text{ri}K$. Τότε $[y,x) \subseteq \text{ri}K$

Άρα είναι φανερό ότι $x \in \overline{[y,x)} \subseteq \overline{\text{ri}K}$

Δηλαδή $x \in \overline{\text{ri}K}$.

$K \subseteq \overline{K} \Rightarrow \text{aff}K \subseteq \text{aff}\overline{K}$ ①

Επίσης $K \subseteq \text{aff}K \Rightarrow \overline{K} \subseteq \overline{\text{aff}K} = \text{aff}K$ αφού $\text{aff}K$ κλειστό

επειδή $\text{aff}\,\overline{K} = \cap \{B \subseteq \mathbb{R}^n : B = \text{affine υπόχωρος},\ B \supseteq \overline{K}\}$

έπεται ότι $\text{aff}\overline{K} \subseteq \text{aff}K$ ②

Δηλ. $\text{aff}\overline{K} = \text{aff}K$

επειδή $\overline{K} = \overline{\text{ri}K}$ εύκολα έπεται

ότι $\text{aff}K = \text{aff}\overline{K} = \text{aff}\,\overline{\text{ri}K}$.

Άλλη απόδειξη $(\text{aff}(K) = \text{aff}(\overline{K}))$

$\text{ri}(K) \subseteq K \subseteq \overline{K} \Rightarrow \text{aff}(\text{ri}K) \subseteq \text{aff}K \subseteq \text{aff}(\overline{K})$. Έστω $x \in \text{aff}(\overline{K})$. Τότε $\exists\ x_i \in \overline{K}$ και $t_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, m$ υπάρχει

ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i$

ακολ. (x_k) στο K με $x_{ik} \to x_i$ καθώς $k \to \infty$

Τότε $x_k = \sum_{i=1}^{m} t_i x_{ik} \in \text{aff}(K)$ και $x_k \to x$

άρα $x \in \overline{\text{aff}(K)} = \text{aff}K$ αφού $\text{aff}(K)$ κλειστό

δηλ. $\text{aff}(K) = \text{aff}(\overline{K})$

Άσκηση 3

ii) Αφού $\tau_i(K) \subseteq K \subseteq \overline{K}$ έπεται $\tau_i(\tau_i K) \subseteq \tau_i K \subseteq \tau_i \overline{K}$

"$\supseteq$" Έστω $x \in \tau_i \overline{K}$ και $y \in \tau_i K$. Τότε απο το θεώρημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει $z \in \overline{K}$. (αυτό επειδή $x \in \tau_i \overline{K}$ και $z \in \overline{K}$ $\Rightarrow [x, z) \subseteq \tau_i \overline{K}$ $\Rightarrow x \in (y, z) \subseteq \tau_i K)$ ώστε $\underline{x \in (y, z)}$. Επειδή $y \in \tau_i(K)$ και $z \in \overline{K}$, έπεται ότι $(y, z) \subseteq \tau_i(K)$, δηλαδή $x \in \tau_i(K) \Rightarrow \boxed{\tau_i K = \tau_i \overline{K}}$

Τέλος επειδή $\overline{K} = \overline{\tau_i K}$, έπεται ότι αν στη θέση του K θέσουμε το $\tau_i K$ έχουμε

$$\tau_i(\tau_i K) = \tau_i(\overline{\tau_i K}) = \tau_i(\overline{K})$$

iii) $\tau b(K) = \overline{K} \setminus \tau_i(K) \overset{ii)}{=} \overline{\overline{K}} \setminus \tau_i(\overline{K}) = \tau b(\overline{K})$

$\tau b(\tau_i K) = \overline{\tau_i K} \setminus \tau_i(\tau_i K) = \overline{K} \setminus \tau_i(K) = \tau b(K)$