Άσκηση 2 (Θεώρημα).

Έστω $A = \operatorname{con}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$ri(A) = \{\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m, \ \lambda_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, m, \ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\} \quad (1)$$

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω $a_0 = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, m$

Έστω $\alpha \in A$. Προφανώς $\alpha_0 \in A$.

$a = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m$, $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$, $\mu_1 + \dots + \mu_m = 1$.

Παίρνουμε $\mu > 1$ ώστε $\mu\lambda_1 + (1-\mu)\mu_1 \geq 0$ ... $\mu\lambda_m + (1-\mu)\mu_m \geq 0$ (έπεται από την κυρτότητα του $[0, +\infty)$).

Τότε $(1-\mu)a + \mu a_0 \in A \Rightarrow a_0 \in ri(A)$.

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι $a_0 \in ri(A)$, και $a^* = \frac{1}{m}(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)$. Τότε $a^* \in A$. Από την άσκηση 1 $\exists \ \mu > 1$ και $a \in A$ ώστε

$a = (1-\mu)a^* + \mu \cdot a_0$

Επίσης $a = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m$, $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$, $\mu_1 + \dots + \mu_m = 1$.

Οπότε $a_0 = \left(\frac{\mu_1}{\mu} + \frac{\frac{\mu-1}{m}}{\mu}\right)a_1 + \dots + \left(\frac{\mu_m}{\mu} + \frac{\frac{\mu-1}{m}}{\mu}\right)a_m$ και

είναι της μορφής $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_m a_m$

$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$

Άρα ισχύει η ισότητα (1).