

Εξετάσεις Κυρτής Ανάλυσης

16 Ιουνίου 2005

1. (2 μον.) Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ δύο σημεία που **δεν** ανήκουν στην κυρτή θήκη $\text{conv}(S)$ του S . Δείξτε ότι αν $x \in \text{conv}(S \cup \{y\})$ και $y \in \text{conv}(S \cup \{x\})$ τότε $x = y$.

2. (2 μον.) Έστω $A_1, \dots, A_m$ και C κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $i = 1, \dots, m$, το σύνολο $B_i = \{u \in \mathbb{R}^n : A_i \cap (C + u) \neq \emptyset\}$ είναι κυρτό.

(β) Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C + u$ να τέμνει τα $A_{i_1}, \dots, A_{i_{n+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C + u$ να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$.

3. (1 μον.) Δώστε παράδειγμα συμπαγούς κυρτού $K \subset \mathbb{R}^3$ ώστε το $\text{ext}(K)$ να μην είναι κλειστό.

4. (2.5 μον.) (α) Έστω K, T μη κενά, κυρτά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $K \subseteq T$ αν και μόνο αν $h_K(\theta) \leq h_T(\theta)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

(β) Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το *κέντρο βάρους* του K είναι το σημείο $y = (y_1, \dots, y_n)$ με συντεταγμένες

$$y_i = \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_i \rangle dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Δείξτε ότι $y \in K$.

5. (2.5 μον.) Έστω K και T δύο συμμετρικά (ως προς το 0) κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε ότι $\frac{1}{2}[K \cap (x + T)] + \frac{1}{2}[K \cap (-x + T)] \subseteq K \cap T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) Δείξτε ότι $|K \cap (x + T)| \leq |K \cap T|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(γ) Αν $N := N(K, T)$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο υπάρχουν $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ ώστε $K \subseteq (x_1 + T) \cup \dots \cup (x_N + T)$, δείξτε ότι

$$N(K, T) \geq \frac{|K|}{|K \cap T|}.$$

6. (3 μον.) (α) Έστω A κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Αν A° είναι το πολικό σώμα του A , δείξτε ότι

$$|A^\circ| = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-h_A(x)} dx.$$

(β) Έστω A, B κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους. Αν $0 < t < 1$, δείξτε ότι

$$|((1-t)A + tB)^\circ| \leq |A^\circ|^{1-t} |B^\circ|^t.$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σημειώσεις του μαθήματος (κανένα άλλο βοήθημα). Καλή επιτυχία.