Κυρτή Ανάλυση (2009-10) – Φυλλάδιο 6

Παράδοση των ασκήσεων του Φυλλαδίου 5 ως την Παρασκευή 20 Νοεμβρίου 2009.

I. Ασκήσεις

1. Έστω $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ γράφεται μονοσήμαντα σαν κυρτός συνδυασμός των $x_0, x_1, \dots, x_k$. Δείξτε ότι τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα.

2. Έστω C μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι:

1. $\mathrm{aff}(C) = \mathrm{aff}(\overline{C}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(C))$.
2. $\mathrm{ri}(C) = \mathrm{ri}(\overline{C}) = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C))$.
3. $\mathrm{rb}(C) = \mathrm{rb}(\overline{C}) = \mathrm{rb}(\mathrm{ri}(C))$.

3. Έστω C_1, C_2 μη κενά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{ri}(C_1 + C_2) = \mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2).$$

4. Έστω C_1, C_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{ri}(C_1 \cap C_2) = \mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2).$$

Ισχύει το ίδιο για τυχόντα μη κενά κυρτά $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$;

5. Έστω $\{C_i : i \in I\}$ οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με $\bigcap_{i \in I} \mathrm{ri}(C_i) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι

$$\overline{\bigcap_{i \in I} C_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}.$$

6. Έστω $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_n\})$ ένα n–simplex στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $y \in \mathrm{int}(S)$. Δείξτε ότι τα

$$S_i = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n\}), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

είναι n–simplices, ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά, και

$$S = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n.$$

7. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\overline{\mathrm{conv}(A)} = \bigcap \{B \subseteq \mathbb{R}^n : B \supseteq A,\ B \text{ κλειστό και κυρτό}\}.$$

II. Εξεταστέα ύλη από τα πρώτα τρία κεφάλαια

Κεφάλαιο 1: §1.1, 1.2, 1.3, 1.4(α), 1.5(β).

Κεφάλαιο 2: §2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

Κεφάλαιο 3: §3.1, 3.2.