Κυρτή Ανάλυση (2009-10) – Φυλλάδιο 3

Παράδοση των ασκήσεων του Φυλλαδίου 2 ως την Παρασκευή 23 Οκτωβρίου 2009.

I. Ασκήσεις

1. Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα $I_1, \ldots, I_m$ στον $\mathbb{R}^2$ τα οποία περιέχονται στις διακεκριμένες παράλληλες ευθείες $\ell_1, \ldots, \ell_m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει ευθεία που τέμνει τα I_{i_1}, I_{i_2} και I_{i_3}. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία που τέμνει όλα τα διαστήματα $I_1, \ldots, I_m$.

2. Δίνονται κυρτά σύνολα $A_1, \ldots, A_m$ στον $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x–άξονα που τέμνει τα A_i και A_j. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x–άξονα που τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \ldots, A_m$.

3. Έστω $m \geq n+1$ και $K, C_1, \ldots, C_m$ κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+1} \leq m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_{n+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_1 \cap \cdots \cap C_m$.

4. Σκοπός μας σε αυτή την άσκηση είναι να δείξουμε το εξής: αν K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$-\frac{1}{n}K + y \subseteq K.$$

(α) Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που $K = \mathrm{conv}(\{u_1, \ldots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \ldots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ με $u_1 + \cdots + u_{n+1} = 0$. Με αυτές τις υποθέσεις δείξτε ότι

$$-\frac{1}{n}K \subseteq K.$$

(β) Εξετάστε τώρα την περίπτωση που $K = \mathrm{conv}(\{u_1, \ldots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \ldots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$. Αν

$$y = \frac{u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n},$$

δείξτε ότι

$$-\frac{1}{n}K + y \subseteq K.$$

(γ) Θεωρήστε τώρα τη γενική περίπτωση: K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in K$ θεωρήστε το σύνολο

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{n}x + y \in K \right\}$$

και δείξτε ότι η οικογένεια $\{A_x : x \in K\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly.

5*. Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η *διάμετρος* του K ορίζεται από την

$$\mathrm{diam}(K) = \max\{\|x - y\|_2 : x, y \in K\}.$$

Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{diam}(K) \leq 2$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το K να περιέχεται στην κλειστή μπάλα $B(u, r_n)$ με κέντρο u και ακτίνα

$$r_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως *θεώρημα του Jung*.

II. Η «έγχρωμη» έκδοση του θεωρήματος του Καραθεοδωρή

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής αποτέλεσμα του Bárány.

Έστω $A_1, \ldots, A_{n+1}$ πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i = 1, \ldots, n+1$,

$$0 \in \mathrm{conv}(A_i).$$

Τότε υπάρχουν

$$v_1 \in A_1, \ldots, v_{n+1} \in A_{n+1}$$

(ένα σημείο από κάθε σύνολο) ώστε

$$0 \in \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}).$$

(α) Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός δεν ισχύει. Τότε, για κάθε επιλογή σημείων $v_i \in A_i$ έχουμε $0 \notin \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\})$, άρα

$$d(0, \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\})) > 0.$$

Αφού τα σύνολα A_i είναι πεπερασμένα, υπάρχει επιλογή σημείων $z_i \in A_i$ ώστε η (θετική) απόσταση του 0 από το σύνολο $S = \mathrm{conv}(\{z_1, \ldots, z_{n+1}\})$ να είναι η μικρότερη δυνατή.

Δείξτε ότι υπάρχει $y \in S$ ώστε $\|y\|_2 = d(0, S)$ και ότι: αν $\theta \in S^{n-1}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του y τότε

$$S \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \geq \|y\|_2\}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Καραθεοδωρή για το

$$S \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = \|y\|_2\}$$

δείξτε ότι το y γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός n σημείων από τα z_i: υπάρχει $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε

$$y \in \mathrm{conv}(\{z_i : i \neq s\}).$$

(γ) Τώρα χρησιμοποιήστε την υπόθεση ότι $0 \in \mathrm{conv}(A_s)$ για να καταλήξετε σε άτοπο. Δείξτε ότι υπάρχει $w_s \in A_s$ με την ιδιότητα

$$d(0, \mathrm{conv}(\{w_s, z_i : i \neq s\})) < d(0, S).$$