

Κυρτή Ανάλυση
Δευτέρα 30 Ιουνίου 2025

1. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σύνολο και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν το $x_0 \in K$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για την f , δείξτε ότι το x_0 είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f .

(β) Αν $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι συμπαγές σύνολο, δείξτε ότι η κυρτή θήκη $\text{conv}(C)$ του C είναι επίσης συμπαγές σύνολο.

2. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $k \geq 0$ ακέραιος και $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε σημείο $x \in \text{aff}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ γράφεται ως αφφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \dots, x_k$ κατά μοναδικό τρόπο.

(β) Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και ανοιχτό, και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -διαφορίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in K$ ισχύει ότι

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

3. (1.5+1 μον.) (α) Έστω $(K_i)_{i \in I}$ οικογένεια μη κενών κυρτών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε για κάθε $i_1, i_2, \dots, i_{d+1} \in I$ να ισχύει ότι $\bigcap_{j=1}^{d+1} K_{i_j} \neq \emptyset$. Δείξτε ότι τότε $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.

(β) Έστω (φυσικός) $m \geq d+1$ ($d \in \mathbb{N}$) και $K, C_1, C_2, \dots, C_m$ κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d+1} \leq m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $x + K \subseteq C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $x + K \subseteq C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$.

4. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και κλειστό σύνολο. Υποθέτουμε ότι για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ότι

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|_2 = \|x - y\|_2. \quad (1)$$

Δείξτε ότι $x - p_K(x) = y - p_K(y)$. Αν η (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$ να βρείτε το σύνολο K .

(β) Περιγράψτε τα μη κενά κυρτά σύνολα $K \subseteq \mathbb{R}^d$ που δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης (δύο κατευθύνσεις).

5. (1.5+1 μον.) (α) Δώστε παράδειγμα δύο ξένων μη κενών κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που διαχωρίζονται γνήσια αλλά όχι αυστηρά.

(β) Έστω K μη κενό συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με μη κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι το σύνορο ∂K του K δεν είναι κυρτό σύνολο. (Υπόδειξη: Θεώρημα Minkowski).

Καλή Επιτυχία!