3. Ένα πρόβλημα συντήρησης - αντικατάστασης - μηχανήματος. Προγραμματίστε για τα επόμενα $N=5$ έτη για την μεγιστοποίηση του κέρδους λειτουργίας μηχανήματος που υπόκειται σε φθορά και σε κάθε περίοδο αποφασίζουμε αν θα το συντηρήσουμε ή θα το αντικαταστήσουμε.

Μορφοποίηση σε ΠΔΠ

α) Περίοδοι $t=1,2,3,4,5,6$ έτη.

$t=6$ λήξη του ορίζοντα

β) Κατάσταση $x_t$ = ηλικία μηχανήματος στην αρχή της περιόδου $t$ με $x_1 = 1$, $x_t \in \{1,2,3\}$.

γ) Αποφάσεις $a_t = \begin{cases} 1 & \text{αντικατάσταση} \\ 2 & \text{συντήρηση} \end{cases}$ στην αρχή της περιόδου $t$

με $D_t(x) = \begin{cases} \{1,2\} & \text{αν } x < 3 \\ \{1\} & \text{αν } x = 3 \end{cases}$ → μέγιστη επιτρεπόμενη ηλικία

δ) Άμεσο κέρδος $R_t(x,a) = \begin{cases} r(0) - T + \mu(x) - c(0) & a=1 \\ r(x) - c(x) & a=2 \end{cases}$

με $r(x)$ έσοδο, $\mu(x)$ αξία μεταπώλησης, $c(x)$ κόστος συντήρησης κλπ.

Το μηχάνημα έχει ηλικία $x$ και $T=5000$ η αξία αγοράς καινούργιου μηχανήματος.

## Δυναμική

$$\begin{tikzcd}
 & (t+1,1) \\
(t,x) \arrow[ur, "a=1"] \arrow[r, "a=2"'] & (t+1,x+1)
\end{tikzcd}$$

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $r(x)$ | 4500 | 3000 | 1500 |
| $c(x)$ | 500 | 700 | 1100 |
| $\mu(x)$ | 3000 | 1800 | 500 |

Τερματικό όφελος $\hat{v}(x) = \mu(x)$

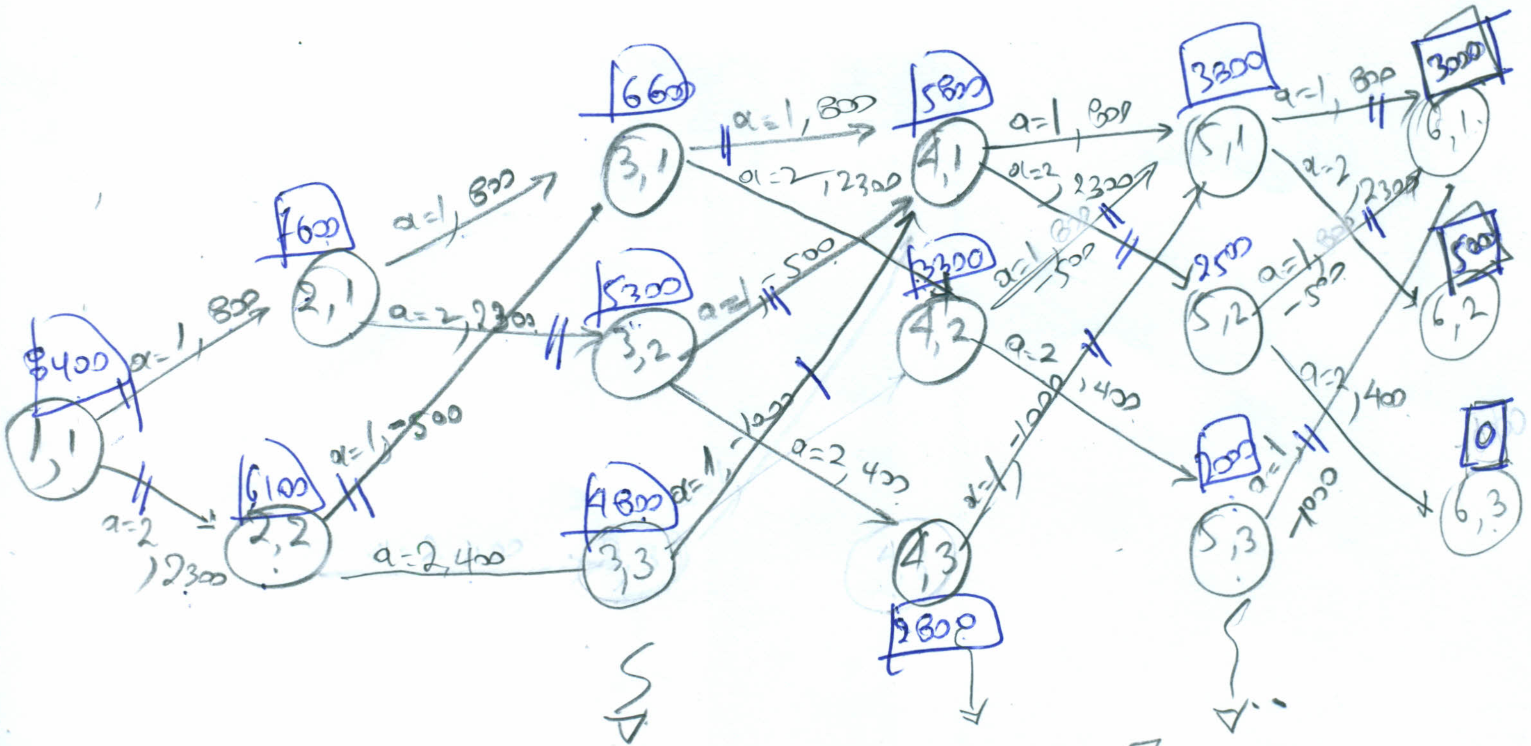
## Εξίσωση Βελτιστοποίησης

$v(t,x)$ = μέγιστο συνολικό καθαρό κέρδος αν στην αρχή της περιόδου $t$ το μηχάνημα έχει ηλικία $x$ και ως τη λήξη του ορίζοντα.

$$v(t,x) = \max_{a \in D_t(x)} \{ \overset{a=1}{\mu(x) - 1000 + v(t+1,1)}, \overset{a=2}{r(x) - c(x) + v(t+1,x+1)} \}$$

$$v(6,x) = \mu(x), \quad x = 0, 1, 2.$$

# Δίκτυο




γίνεται αγορά νέου αντικαταστάτη με κόστος $I = 5000$

και έχω μηχάνημα ηλικίας 0 από αρχής

$r(0) - c(0) - I = 4500 - 500 - 5000 = -1000$

Το μέγιστο συνολικό κέρδος από τη λειτουργία του μηχανήματος είναι

$v(1,1) = 8400$

και υπάρχουν 2 βέλτιστες πολιτικές που το επιτυγχάνουν με

$(1,1) \xrightarrow{\text{αντ.}} (2,1) \xrightarrow{\text{αντ.}} (3,2) \xrightarrow{\text{αν}} (4,1) \xrightarrow{\text{αντ.}} (5,2) \xrightarrow{\text{αν}} (6,1)$

ή

$(1,1) \xrightarrow{\text{αντ}} (2,2) \xrightarrow{\text{αν.}} (3,1) \xrightarrow{\text{αν}} (4,1) \xrightarrow{\text{αντ.}} (5,2) \xrightarrow{\text{αν}} (6,1)$

4. Η άσκηση είναι της κατηγορίας φόρτωσης σακιδίου

Το σακίδιο έχει μέγιστη χωρητικότητα $b = 10$ kg

Θα πρέπει να φορτωθεί από $N=4$ διαφορετικά είδη

όπου κάθε είδος $i$ έχει βάρος $b_i$ και αξία $w_i$.

<u>Μορφοποίηση σε ΠΔΠ</u>

<u>Περίοδοι</u> $t=1,2,3,4,5$ $\longrightarrow$ δηλ. τα στάδια αντιστοιχούν στα 4 διαφορετικά είδη.

<u>Κατάσταση</u> $x_t$ = χωρητικότητα του σακιδίου που απομένει για τα είδη $\{t, t+1, \dots, N\}$, $x_t \in \{0, \dots, 10\}$

<u>Απόφαση</u> $a_t$ = μονάδες από είδος $t$ που φορτώνονται στο σακίδιο

όπου $a_t \geq 0$ και $x_{t+1} = x_t - a_t \cdot b_t \geq 0$

$\Rightarrow a_t \leq \frac{x_t}{b_t}$

άρα $D_t(x) = \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{x}{b_t} \rfloor\}$

<u>Άμεσο κέρδος</u> $R_t(a_t) = a_t \cdot w_t$

<u>Δυναμική</u> $(t, x) \xrightarrow{a} (t+1, x - a \cdot b_t)$

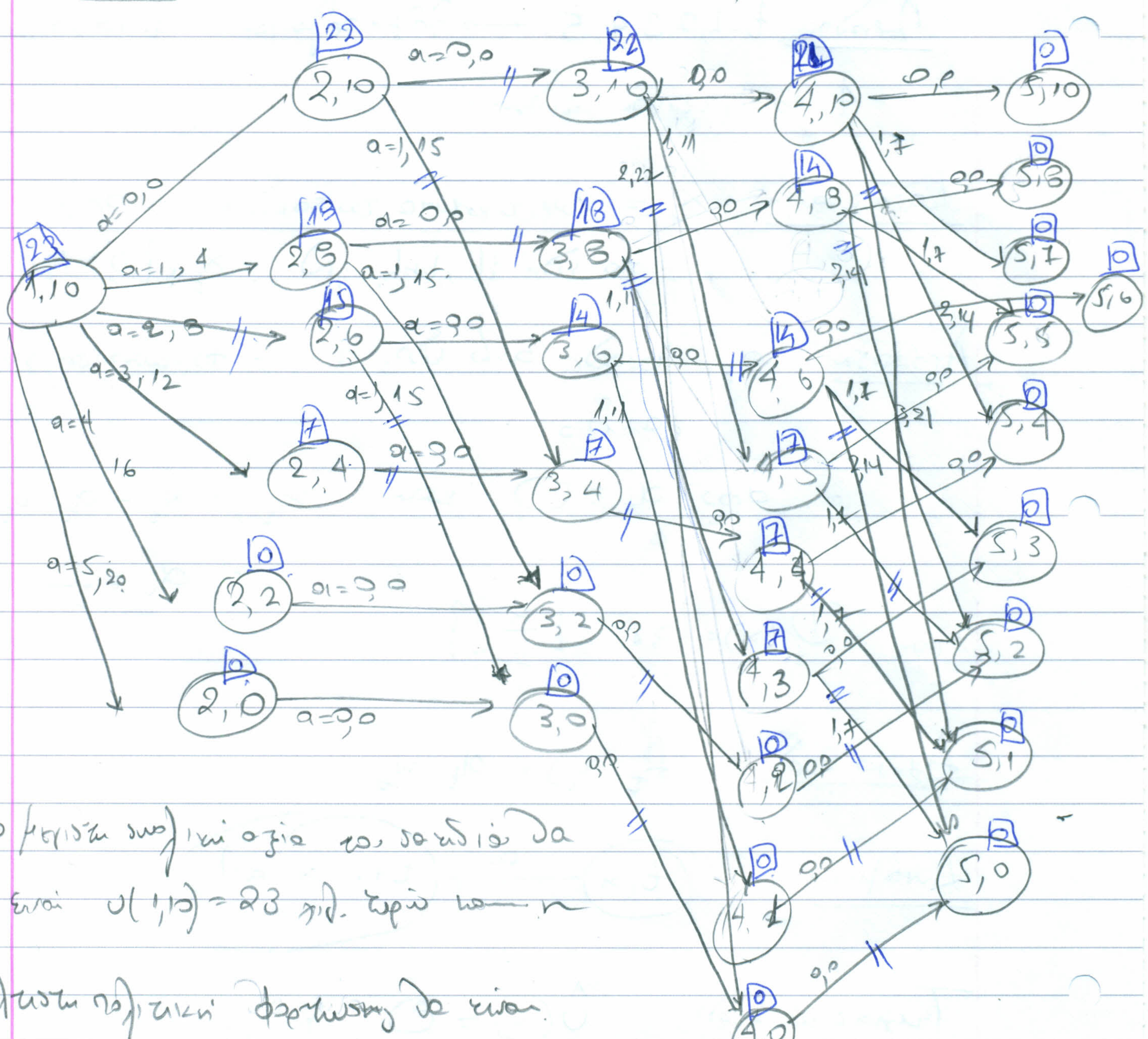
<u>Τερματικό κέρδος</u> $\hat{U}(x) = 0$, $\forall x \in S$

## Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

$$v(t,x) = \max_{a=0,\dots,\lfloor x/b_t \rfloor} \{ a \cdot w_t + v(t+1, x - a \cdot b_t) \} \quad t = 1,2,3,4$$

$$v(5,x) = 0 \quad , x \in S$$

## Δίκτυο



Η μέγιστη συνολική αξία του σακιδίου θα είναι $v(1,10) = 23$ χιλ. ευρώ και η

βέλτιστη πολιτική φόρτωσης θα είναι

$$(1,10) \xrightarrow{a^*=2} (2,6) \xrightarrow{a^*=1} (3,0) \xrightarrow{a^*=0} (4,0) \xrightarrow{a^*=0} (5,0)$$

5. Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα κατανομής πόρων - κεφαλαίου επένδυσης για την προβολή $N=4$ προϊόντων και την επιλογή μεταξύ ποσοτήτων των $\Pi_1, \Pi_2$

Ο συνολικός πόρος - κεφάλαιο είναι $b=5$ εκατ. ευρώ

Μορφοποίηση σε ΠΔΠ

Περίοδοι $t=1,2,3,4,5 \rightarrow$ λήξη ορίζοντα και αντιστοιχούν στα 4 προϊόντα

Κατάσταση $x_t$ = κεφάλαιο που απομένει για προώθηση/επένδυση για τα προϊόντα $t, t+1, \dots 4$ $\quad x_t \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Απόφαση
$$a_t = \begin{cases} 1, & \text{εφαρμογή της } \Pi_1 \\ 2, & \text{'' της } \Pi_2 \\ 0, & \text{δεν πραγματοποιείται καμία προβολή} \end{cases} \quad \text{για το προϊόν } t$$

$$\text{με } D_t(x) = \begin{cases} \{0,1,2\}, & x \le k_t \\ \{0\}, & x > k_t \end{cases}$$

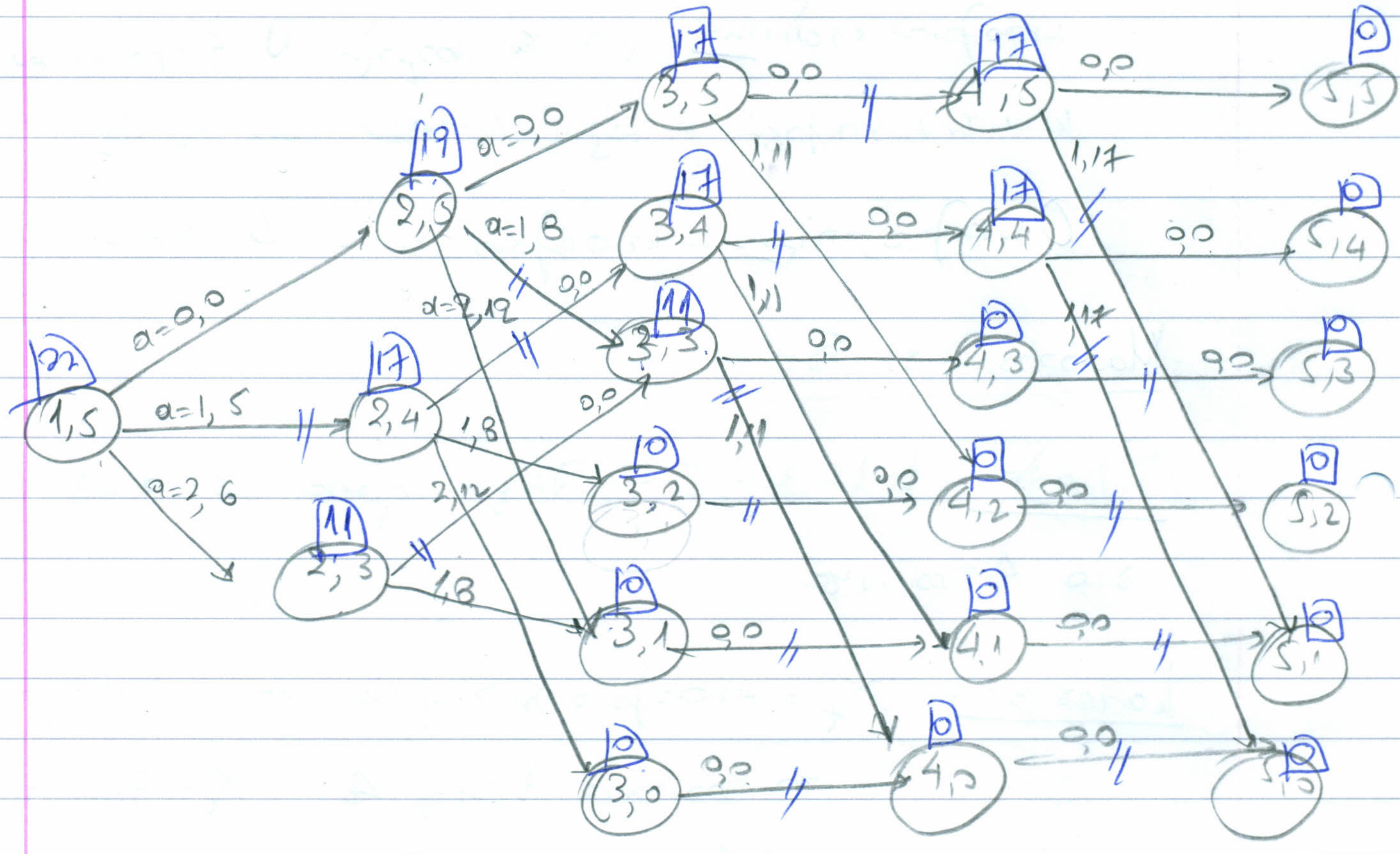
Άμεσο Όφελος $R_t(a_t)$ = απόδοση από την απόφαση προβολής $a_t$ του προϊόντος $t$

Δυναμική $(t,x) \xrightarrow{a} (t+1, x-k_t(a))$

Τερματικό Όφελος $\hat{v}(x) = 0$

Εξίσωση Βελτιστοποίησης
$$v(t,x) = \max_{a \in \{0,1,2\}} \{ R_t(a) + v(t+1, x-k_t(a)) \}$$
$$v(5,x) = 0$$

## Δίκτυο



Άρα η μέγιστη συνολική απόδοση είναι $υ(1,5) = 22$ εκ. ευρώ

και η βέλτιστη πολιτική

$$(1,5) \xrightarrow{a^*=1} (2,4) \xrightarrow{a^*=0} (3,4) \xrightarrow{a^*=0} (4,4) \xrightarrow{a^*=1} (5,0)$$