Άσκηση 1η

Μια εταιρεία κατασκευάζει 2 ειδών αυτοκίνητα. Η παραγωγή τους απαιτεί υλικά κ εργάτες σύμφωνα με τον πίνακα :

	Υλικά (σε kg)	Εργασία (σε h)
Τύπος Ι	200	18
Τύπος ΙΙ	150	20
κόστος ανά μονάδα ($)	10	70
Διαθεσιμότητα	80.000	9.000

Έχει εκτιμηθεί ότι μπορούν να πουληθούν το πολύ 1500 αυτοκίνητα τύπου Ι με 10.000 $ το καθένα κ το πολύ 200 τύπου ΙΙ με 8.000 $ το καθένα. Να μοντελοποιηθεί αν ενδιαφερόμαστε να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό κέρδος.

Λύση

Έστω x_1 : το πλήθος των αυτ. τύπου Ι. x_2 : το πλήθος των αυτ. τύπου ΙΙ. } που θα κατασκευάσουμε

Το κόστος κατασκευής ενός αυτ. τύπου Ι είναι

$$200 \cdot 10 + 18 \cdot 70 = 2000 + 1260 = 3260 \ \$$$

κ το κέρδος από την πώληση του $10.000 - 3.260 = 6.740$ $.

Αντίστοιχα για το τύπου ΙΙ είναι $150 \cdot 10 + 20 \cdot 70 = 1500 + 1400 = 2900$ $

κ $8.000 - 2.900 = 5.100$ $

Τελικά έχουμε

$$\max \ 6.740 \cdot x_1 + 5.100 \cdot x_2$$

$$200 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 \leq 80.000 \quad \text{(υλικά)}$$

$$18 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \leq 9.000 \quad \text{(εργασία)}$$

$$x_1 \leq 1500$$

$$x_2 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ κ ακέραιοι}$$

Άσκηση 2η

Μια εταιρεία πρέπει να μεταφέρει 100.000 βαρέλια από κάθε μια από τις 3 πηγές της στην αποθήκη της. Το κόστος μεταφοράς είναι 0,03 € το βαρέλι για κάθε km. Μέχρι 150.000 βαρέλια μπορούν να σταλούν σε έναν ενδιάμεσο προορισμό με κόστος 0,02 € το βαρέλι για κάθε km και μετά να πάνε στην αποθήκη με 1 € το βαρέλι. Μοντελοποιήστε ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος.

Πίνακας km αποστάσεων →

	Αποθήκη	Ενδ. Σταθμός
Πηγη I	150	50
Πηγη II	170	65
Πηγη III	190	80

Λύση

Έστω x_1 = # των βαρελιών που μεταφ. από την Πηγη I → Αποθ.

x_2 = —— " —— I → Ενδ.

x_3 = —— " —— II → Αποθ.

x_4 = —— " —— II → Ενδ.

x_5 = —— " —— III → Αποθ.

x_6 = —— " —— III → Ενδ.

κόστος πηγής I → Αποθ. είναι $150\text{ km} \cdot 0{,}03 = 4{,}5$ € / βαρέλι

I → Ενδ. $50\text{ km} \cdot 0{,}02 = 1$ € $+ 1$ € $= 2$ € / βαρέλι

II → Αποθ. $170 \cdot 0{,}03 = 5{,}1$ € / βαρέλι

II → Ενδ. $65 \cdot 0{,}02 = 1{,}3 + 1 = 2{,}3$ € / βαρέλι

III → Αποθ. $190 \cdot 0{,}03 = 5{,}7$ € / βαρέλι

III → Ενδ. $80 \cdot 0{,}02 = 1{,}6 + 1 = 2{,}6$ € / βαρέλι

Τελικά έχουμε

$$\min \; 4{,}5x_1 + 2x_2 + 5{,}1x_3 + 2{,}3x_4 + 5{,}7x_5 + 2{,}6x_6$$

$$x_2 + x_4 + x_6 \leq 150.000$$

$$x_1 + x_2 = 100.000$$

$$x_3 + x_4 = 100.000$$

$$x_5 + x_6 = 100.000$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, 6$$

Άσκηση 3η

Τρεις μηχανές κατασκευάζουν τα συστατικά που είναι απαραίτητα για την παραγωγή ενός προϊόντος. Μια μονάδα προϊόντος αποτελείται από 4 μονάδες συστατικού A & 3 μονάδες συστατικού B. Τα δύο συστατικά κατασκευάζονται από δύο διαφορετικά υλικά. Υπάρχουν 100 μονάδες υλικού I, & 200 μονάδες υλικού II. Κάθε μια από τις μηχανές έχει τις δικές τις απαιτήσεις σε υλικά & άλλο αριθμό παραγωγής συστατικών. Ο πίνακας δίνει τις απαιτήσεις σε υλικά ανά γραμμή παραγωγής και τον αριθμό των συστατικών που παράγονται.

Μηχανή	Υλικό I	Υλικό II	A	B
1	8	6	7	5
2	5	9	6	9
3	3	8	8	4

Να μοντελοποιηθεί ώστε να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των προϊόντων που παράγουμε.

Λύση

Έστω x_1 : # των προϊόντων που παράγουμε

$x_{2,3,4}$: # λειτουργιών της μηχανής 1, 2, 3 αντίστοιχα

x_5 : # μονάδων συστατικού A

x_6 : # μονάδων συστατικού B

που χρησιμοποιούμε

Έχουμε $\max \; x_1$.

$$8x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 100 \quad (\text{υλικό I})$$

$$6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \le 200 \quad (\text{υλικό II})$$

$$7x_2 + 6x_3 + 8x_4 = x_5$$

$$5x_2 + 9x_3 + 4x_4 = x_6$$

$$x_1 \le \frac{1}{4} x_5$$

$$x_1 \le \frac{1}{3} x_6$$

$$x_i \ge 0 \;\; \forall i \text{ \& ακέραιοι}$$

Άσκηση 4η

Μια βιομηχανία κατασκευάζει φορτηγά και επιβατικά αυτοκίνητα. Η παραγωγή χωρίζεται σε 2 στάδια, αυτό της συναρμολόγησης κ εκείνο της βαφής. Μια μελέτη έδειξε ότι αν το τμήμα συναρμολόγησης κατασκεύαζε αποκλειστικά φορτηγά θα παράγονταν ημερήσια 50 αυτοκ., ενώ αν στους φούρνους βαφής έβαφαν αποκλειστικά φορτηγά θα βάφονταν ημερήσια 40 αυτοκ. Οι αριθμοί για τα επιβατικά είναι αντίστοιχα 50 (συν.) κ 60 (βαφή). Αν το κέρδος από κάθε φορτηγό ανέρχεται στο ποσό των 9.000 € και από κάθε επιβατικό σε 6.000 €, μοντελοποιήστε το πρόβλημα ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της βιομηχανίας, αν γνωρίζουμε ότι απαιτούν ημερήσια παράδοση τουλάχιστον 20 φορτηγών κ 20 επιβατικών.

Λύση

Έστω x_1 : # των φορτηγών που παράγονται ημερήσια

x_2 : # των επιβατικών —— " ——

Έτσι έχουμε

$$\max\ 9.000 \cdot x_1 + 6.000 \cdot x_2$$

$$\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{50} \leq 1$$

$$\frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{60} \leq 1$$

$$x_1 \geq 20$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Άσκηση 5η

Μια εταιρεία πρέπει να παράγει το λιγότερο 600.000 κοντές βίδες & 400.000 μακριές βίδες για να ικανοποιήσει την ζήτηση της επόμενες 4 εβδομάδες. Οι βίδες μπορούν να κατασκευαστούν με δύο διαφορετικές μηχανές οι οποίες είναι διαθέσιμες για 40 ώρες την εβδομάδα.

	Κοντές	Μακριές
Τιμή Πώλησης ($/1000)	27,50	32,50
Κόστος μηχ. I ($/1000)	6,25	7,75
Κόστος μηχ. II ($/1000)	8	9,25
Χρον. μηχ. I (min/kg)	1,50	1,75
Χρον. μηχ. II (min/kg)	1	1,25

Υπάρχουν 60 κοντές βίδες σε κάθε kg & 40 μεγάλες.

x_1 = # των 1000 απο μικρές βίδες που παράγει η μχ I κατα την διάρκεια των 4 εβδ.

x_2 = — ıı — μηχ. II — ıı —

x_3 = — ıı — μακριών — ıı — μηχ. I. — ıı —

x_4 = — ıı — μηχ. II. — ıı —

$$\max \quad 27{,}50\,x_1 + 27{,}50\,x_2 + 32{,}50\,x_3 + 32{,}50\,x_4$$

$$x_1 + x_2 \geq 600.000$$

$$x_3 + x_4 \geq 400.000$$

$$1{,}5\,x_1 + 1{,}75\,x_3 \leq 40$$

$$1\,x_2 + 1{,}25\,x_4 \leq 40$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Σωστό ή Λάθος.

Λύση

Το σωστό είναι

$$\max \quad 21{,}25\,x_1 + 19{,}50\,x_2 + 24{,}75\,x_3 + 23{,}25\,x_4$$

$$x_1 + x_2 \geq 600$$

$$x_3 + x_4 \geq 400$$

$$0{,}41667\,x_1 + 0{,}729\,x_3 \leq 160$$

$$0{,}2777\,x_2 + 0{,}5208\,x_4 \leq 160$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$1{,}5\ \text{min}/\text{kg} = 0{,}41667\ \text{h}/\text{χιλ.βιδ.}$$

Άσκηση 6η

Κάθε εβδομάδα μια εταιρεία χρησιμοποιεί μια μηχανή για 150 h για να μετατρέψει τον φυσικό χυμό πορτοκαλιού & λεμονιού σε συμπυκνωμένο χυμό και τους αποθηκεύει σε δύο δεξαμενές των 1000 kg η καθεμία πριν τους πωλήσει. Η μηχανή μπορεί να μετατρέψει 25 kg χυμό πορτοκαλιού & 20 kg χυμό λεμονιού σε 1 h. Κάθε kg χ.π. κοστίζει 1,5 € & χάνει 30% σε νερό κατά την μετατροπή του. Επίσης κάθε kg χ.λ. κοστίζει 2 € και χάνει 25% σε νερό. Ο σ.χ.λ. πωλείται 8 €/kg & ο σ.χ.π. 6 €/kg. Να μοντελοποιήσετε ένα π.γ.π. ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος κάθε εβδομάδας χρησιμοποιώντας:

α) x_1 = # των kg χ.π. που απαιτείται για μία εβδομάδα.
x_2 = # —"— χ.λ. —"—

β) x_1 = # ~~των~~ kg σ.χ.π. που παράγεται σε μια εβδομάδα
x_2 = # —"— σ.χ.λ. —"—

δ) x_1 = # των h που λειτουργεί η μηχανή για να μετατρέψει τον χ.π.
x_2 = —"— —"— χ.λ.

Λύση

α) 1 kg χ.π. κοστίζει 1,5 € & δίνει 0,7 kg σ.χ.π. που πωλ. $0,7 \cdot 6 = 4,2$ €

άρα $\text{κέρδος}_{χ.π} = 4,2 - 1,5 = 2,7$ €

1 kg χ.λ. κοστίζει 2 € & δίνει 0,75 kg σ.χ.λ. που πωλ. $0,75 \cdot 8€ = 6€$

$\text{κέρδος}_{χλ} = 6 - 2 = 4$ €

Άρα

$$\max\ 2,7x_1 + 4x_2$$
$$0,7x_1 \le 1000$$
$$0,75x_2 \le 1000$$
$$0,04x_1 + 0,05x_2 \le 150$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\,h \rightarrow 25\text{ kg χ.π.} \\ ; \quad\ \ x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0,04x_1$$

β) 1 kg. χ.π. κοστ. 1,5 € δίνει 0,7 kg σ.χ.π. πωλ. 0,7·6 €

1,43 kg χ.π. κοστ. $1,5 \cdot 1,43 = 2,14$ δίνει 1 kg σ.χ.π. πωλ. 6 €

$κέρδος_{σχπ} = 6 - 2,14 = 3,86$ €

1 kg χ.λ. κοστ. 2 € δίνει 0,75 kg σ.χ.λ. πωλ. 0,75·8 €

1,33 kg χ.λ. κοστ. $2 \cdot 1,33 = 2,66$ € δίνει 1 kg σ.χ.λ. πωλ. 8 €

κέρδος σχλ $= 8 - 2,66 = 5,34$ €.

άρα $\max 3,86 x_1 + 5,34 x_2$

$$x_1 \leq 1000$$
$$x_2 \leq 1000$$
$$0,057 x_1 + 0,067 x_2 \leq 150$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

1 h → 25 kg χ.π. → $0,7 \cdot 25 = 17,5$ kg σ.χ.π. } ⇒ $0,057 x_1$

; x_1

δ) Σε 1 h μετατρ. 25 kg. χ.π. με κέρδος. $2,7 \cdot 25 = 67,5$ €

Σε 1 h μετατρ. 20 kg. χ.λ. με κέρδος $4 \cdot 20 = 80$ €

άρα $\max 67,5 x_1 + 80 x_2$

$$17,5 \cdot x_1 \leq 1000$$
$$15 \cdot x_2 \leq 1000$$
$$x_1 + x_2 \leq 150$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1 h → 25 kg. χ.π. → $0,7 \cdot 25 = 17,5$ kg. σ.χ.π. } $17,5 \cdot x_1$

x_1 h ;