Άσκηση

Ένας επιχειρηματίας έχει 4 εκατ. € για να τα επενδύσει σε τρεις περιοχές εξόρυξης πετρελαίου. Το ποσό των εσόδων που κατέχει από κάθε περιοχή εξαρτάται από τα χρήματα που θα επενδύσει, όπως στον πίνακα.

Έσοδα εκ. €

Επένδυση εκ.	Περ. 1	Περ. 2	Περ. 3
0 €	4	3	3
1	7	6	7
2	8	10	8
3	9	12	13
4	11	14	15

Υποθέτοντας ότι οι επενδύσεις είναι πολ/σιο του 1 εκ. €, να βρούμε μια επενδυτική πολιτική που να μεγιστοποιεί τα έσοδα.

Λύση

καταστάσεις - αποφάσεις : (t, x_t) — t: περιοχή

x_t : χρήματα που απομένουν για επένδυση στις περιοχές $t, t+1, \dots, 3$

a_t : χρήματα που θα επενδύσω στην περιοχή t και $0 \le a_t \le x_t$.

δυναμική συστήματος : $x_{t+1} = x_t - a_t \quad (t = 1, 2, 3)$

δομή κέρδους : $R_t(a_t)$ → κέρδος αν επενδ. στην t a_t

$R_4(0) = 0$

$v(t, x)$: το μέγιστο συνολικό κέρδος για τις περιοχές $t, t+1, \dots, 3$ όταν απομένει για αυτές προς επένδυση ποσό x.

εξ. βελτ.
$$\begin{cases} v(t,x) = \max\limits_{0 \le a \le x} \{ R_t(a) + v(t+1, x-a) \} & t = 1, 2, 3 \\ v(4, x) = 0 \end{cases}$$

α' τρόπος

$$v(1,4) = \max\{4+v(2,4),\ 7+v(2,3),\ 8+v(2,2),\ 9+v(2,1),\ 11+v(2,0)\}$$
$$= \max\{4+19,\ 7+17,\ 8+13,\ 9+10,\ 11+6\} = 24 \qquad \underline{\alpha^*(1,4) = 1.}$$

$$v(2,4) = \max\{3+v(3,4),\ 6+v(3,3),\ 10+v(3,2),\ 12+v(3,1),\ 14+v(3,0)\}$$
$$= \max\{3+15,\ 6+13,\ 10+8,\ 12+7,\ 14+3\} = 19 \qquad \alpha^*(2,4) = 1 \text{ ή } 3$$

$$v(2,3) = \max\{3+v(3,3),\ 6+v(3,2),\ 10+v(3,1),\ 12+v(3,0)\}$$
$$= \max\{3+13,\ 6+8,\ 10+7,\ 12+3\} = 17 \qquad \underline{\alpha^*(2,3) = 2,}$$

$$v(2,2) = \max\{3+v(3,2),\ 6+v(3,1),\ 10+v(3,0)\} = \max\{3+8,\ 6+7,\ 10+3\} = 13$$
$$\alpha^*(2,2) = 1 \text{ ή } 2$$

$$v(2,1) = \max\{3+v(3,1),\ 6+v(3,0)\} = \max\{3+7,\ 6+3\} = 10 \qquad \alpha^*(2,1) = 0$$

$$v(2,0) = 3+v(3,0) = 3+3 = 6 \qquad \alpha^*(2,0) = 0$$

$$v(3,4) = \max\{3+v(4,4),\ 7+v(4,3),\ 8+v(4,2),\ 13+v(4,1),\ 15+v(4,0)\}$$
$$= \max\{3,\ 7,\ 8,\ 13,\ 15\} = 15 \qquad \alpha^*(3,4) = 4.$$

$$v(3,3) = \max\{3+v(4,3),\ 7+v(4,2),\ 8+v(4,1),\ 13+v(4,0)\}$$
$$= \max\{3,\ 7,\ 8,\ 13\} = 13 \qquad \alpha^*(3,3) = 3.$$

$$v(3,2) = \max\{3+v(4,2),\ 7+v(4,1),\ 8+v(4,0)\}$$
$$= \max\{3,\ 7,\ 8\} = 8 \qquad \alpha^*(3,2) = 2$$

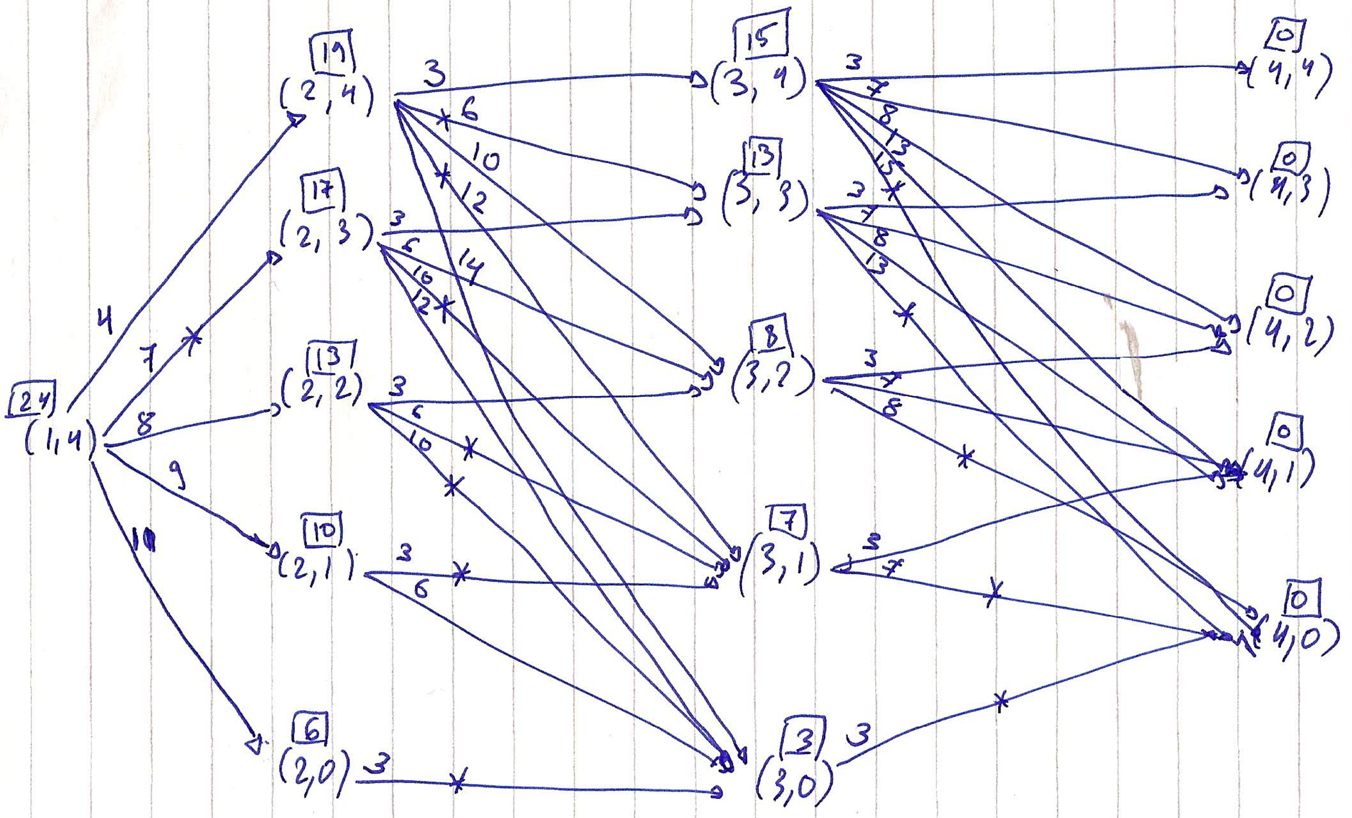
$$v(3,1) = \max\{3+v(4,1),\ 7+v(4,0)\} = \max\{3,7\} = 7 \qquad \underline{\alpha^*(3,1) = 1}$$

$$v(3,0) = \cancel{\max}\ 3+v(4,0) = 3 \qquad \alpha^*(3,0) = 0$$

στην περ. 1 επενδ. 1.
περ 2 —"— 2
περ 3 —"— 1

σύνολο εσόδων 24

β' τρόπος



$(1,4) \xrightarrow[1]{\text{επενδ.}} (2,3) \xrightarrow[2]{\text{επενδ}} (3,1) \xrightarrow[1]{\text{επενδ}} (4,0)$

συνολικό κέρδος 24

Άσκηση

Έστω ότι ένα καινούργιο αυτοκ. κοστίζει 10.000 € και ότι το ετήσιο κόστος λειτουργίας καθώς και η μεταπωλητική αξία δίνονται από τον παρακάτω πίνακα

Έτη (x)	Μεταπ. αξία ($\mu(x)$)	Κόστος λειτ. ($C(x)$)
1	7.000 €	300 €
2	6.000	500
3	4.000	800
4	3.000	1200
5	2.000	1600
6	1000	2200

Αν αρχικά έχουμε ένα καινούργιο αυτοκίνητο, να βρούμε μια πολιτική αντικατάστασης - συντήρησης που να ελαχιστοποιεί το κόστος για τα επόμενα 6 χρόνια.

Λύση

Καταστάσεις: (t,x) το αυτοκ. στην αρχή της περιόδου t έχει ηλικία x.

Αποφάσεις: $a = \begin{cases} 0: \text{αντικατάσταση} \\ 1: \text{συντήρηση.} \end{cases}$

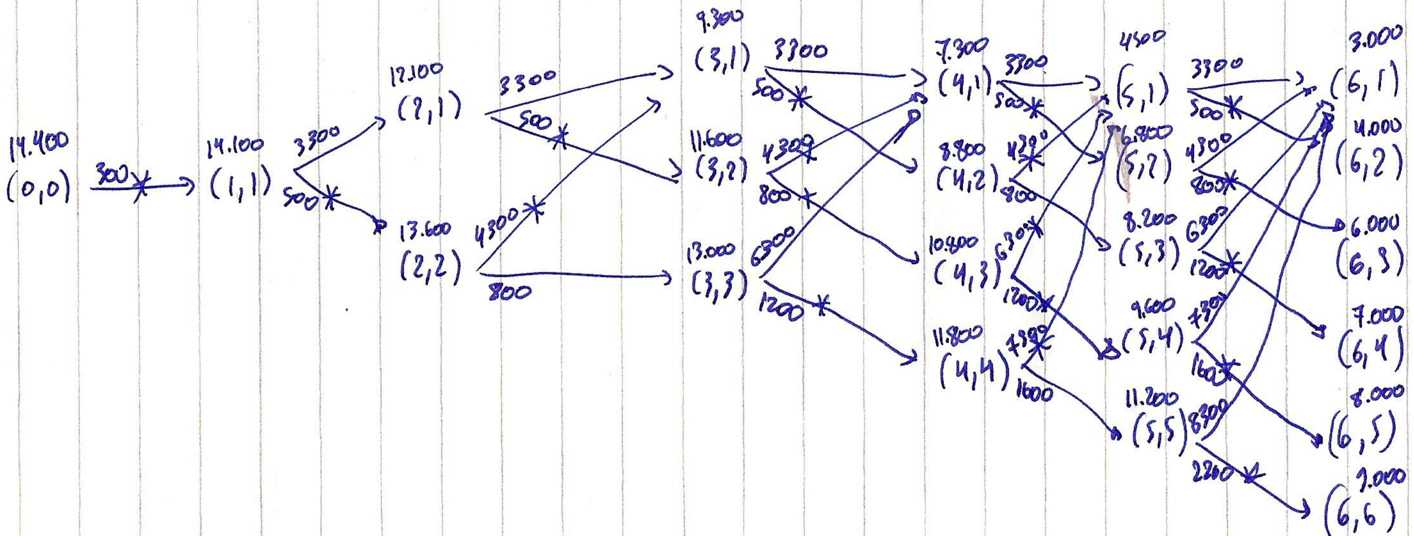
Δυναμική: $(t,x) = \begin{cases} (t+1,1) & \text{αν } a=0. \\ (t+1,x+1) & \text{αν } a=1. \end{cases}$

Συνάρτηση κόστους: $C(x,a) = \begin{cases} T-\mu(x)+C(1). & \text{αν } a=0 \\ C(x) & \text{αν } a=1. \end{cases}$

$$C(6,x) = -\mu(x).$$

εξ. βελ. $\begin{cases} v(t,x) = \min\{T-\mu(x)+C(1)+v(t+1,1),\ C(x)+v(t+1,x+1)\} & t=1,\dots,5,\ x=1,\dots,5 \\ v(t,x) = T-\mu(x)+C(1)+v(t+1,1),\ t=1,\dots,5,\ x=6 \end{cases}$

$$v(6,x) = -\mu(x) \quad x=1,\dots,6.$$



$(0,0) \xrightarrow{\text{GUVT.}} (1,1) \xrightarrow{\text{GUVT.}} (2,2) \xrightarrow{\alpha\lambda.} (3,1) \xrightarrow{\text{GW.}} (4,2) \xrightarrow{\alpha\lambda.} (5,1) \xrightarrow{\text{GUVT}} (6,2)$ αλαf

Άσκηση

Σε ένα δήμο που αποτελείται από n διαμερίσματα πρέπει να σχηματιστεί μια επιτροπή από K αντιπροσώπους. Ο αριθμός αντιπροσώπων από κάθε διαμέρισμα πρέπει να είναι ανάλογος του πληθυσμού του διαμερίσματος. Οι πληθυσμοί των διαμερισμάτων είναι M_i, $i=1,\dots,n$ και έστω $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Σύμφωνα με αυτά τα στοιχεία το διαμέρισμα i πρέπει να έχει $d_i = KM_i/M$ αντιπροσώπους. Όμως γενικά οι αριθμοί d_i, $i=1,\dots,n$ δεν είναι ακέραιοι. Το δημοτικό συμβούλιο έχει αποφασίσει να σχηματίσει την επιτροπή έτσι ώστε το άθροισμα των απόλυτων αποκλίσεων των αριθμών αντιπροσώπων κάθε διαμερίσματος από τις ιδανικές τιμές να είναι ελάχιστο. Συγκεκριμένα αν a_i, $i=1,\dots,n$ είναι ο αριθμός αντιπροσώπων από κάθε διαμέρισμα, ζητείται να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} |a_i - d_i|$.

α) Να οριστεί ένα μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα και να γραφούν οι εξισώσεις βελτιστοποίησης.

β) Να βρεθεί η σύνθεση της επιτροπής που ελαχιστοποιεί την συνολική απόκλιση, όταν $n=3$, $K=3$, $d_1 = 0{,}4$, $d_2 = 1{,}4$, $d_3 = 1{,}2$.

Λύση

α) Καταστάσεις - αποφάσεις : (t, x) ή x_t απομένουν x αντιπρόσωποι όταν βρισκόμαι στο διαμέρισμα t και απομένουν $t+1,\dots,n$

a_t : πόσους αντιπρ. θα τοποθετήσουμε στο διαμ. t.

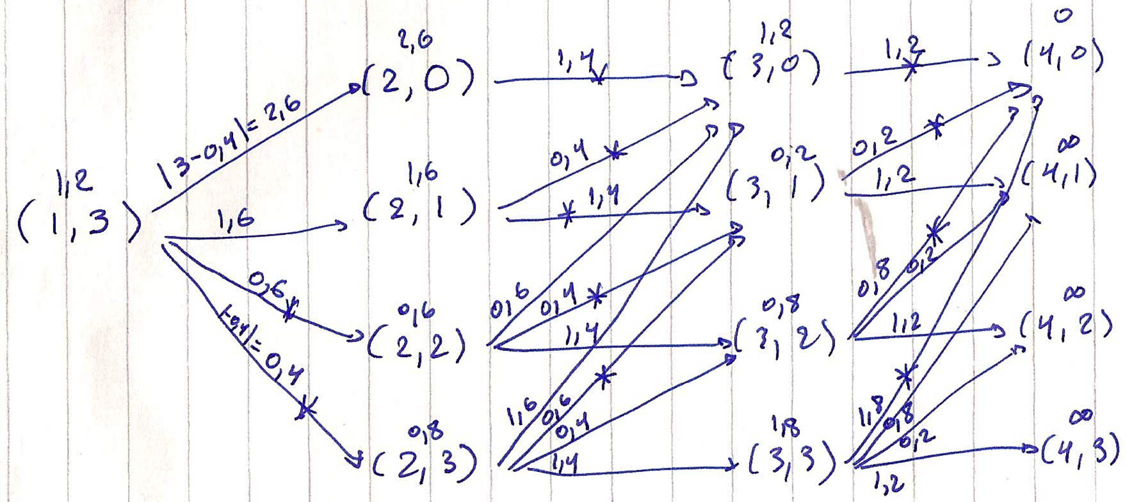
Δυναμική συστήματος : $x_{t+1} = x_t - a_t$

Κόστος : $c_t(x,a) = |a_t - d_t|$

Εξ. βελτ.

$$v(t,x) = \min_{a_t} \{ |a_t - d_t| + v(t+1, x - a_t) \}$$

$$v(n+1, x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ \infty & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$



$(1,3) \xrightarrow{\alpha=1} (2,2) \xrightarrow{\alpha=1} (3,1) \xrightarrow{\alpha=1} (4,0)$

$(1,3) \xrightarrow{\alpha=0} (2,3) \xrightarrow{\alpha=2} (3,1) \xrightarrow{\alpha=1} (4,0)$

kóstor 1,2.