Άσκηση 1 Έστω $f(x_1,x_2) = 5+4x_1+6x_2-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2$

Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο βαθμίδας (2 βήματα) με αρχικό σημείο $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(για το πρόβλημα $\max\limits_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} f(x_1,x_2)$)

---

f : κοίλη

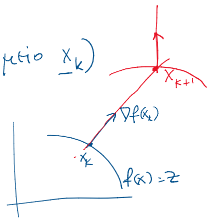
$\nabla f(\underline{x}^*) = 0$

k-επανάληψη αλγ. βαθμίδας: (σημείο $\underline{x}_k$)

$g(t) = f(\underline{x}_k + t\,\nabla f(\underline{x}_k))$

$\max\limits_{t\geq 0} g(t) \Rightarrow t^*$

$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + t^*\,\nabla f(\underline{x}_k) \Rightarrow$ προχωράμε στην k+1 επανάληψη



έως ότου $\|\nabla f(\underline{x}_k)\| < \varepsilon$

Εδώ: $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 4-4x_1-2x_2$

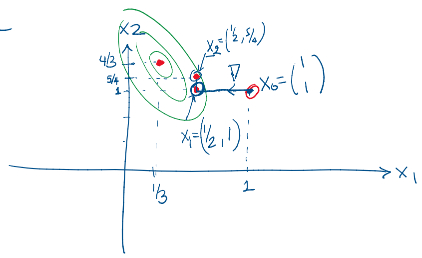
$\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 6-2x_1-4x_2$

Στο πρόβλημα αυτό είναι εύκολο να λύσουμε $\nabla f(\underline{x}) = 0$

$\left.\begin{array}{l}4x_1+2x_2=4\\2x_1+4x_2=6\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}4x_1+2x_2=4\\4x_1+8x_2=12\end{array}\right\} \Rightarrow 6x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3}$

$4x_1 + \frac{8}{3} = 4 \Rightarrow 4x_1 = 4-\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = 1/3$

Σημείο μεγιστοποίησης της f: $\underline{x}^* = \begin{pmatrix}1/3\\4/3\end{pmatrix}$



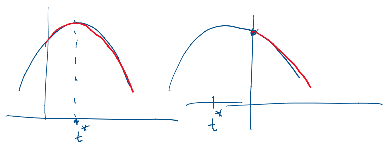
1η επανάληψη

$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ $\quad \|\nabla f(x_0)\|_\infty = 2 = \left(\max\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right)$

$g(t) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right) = f(1-2t, 1) = \ldots$

$= -8t^2+4t+4$

$\max\limits_{t\geq 0} g(t)$: $g'(t) = -16t+4 = 0 \Rightarrow t^* = 1/4 > 0$ ✓



$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \frac{1}{4}\nabla f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$

2η επανάληψη

$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: $\|\nabla f\| = 1$

$$g(t) = f\left(\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = f\left(1/2\,,\,1+t\right) =$$

$$= \cdots = -2t^2 + t + 9/2$$

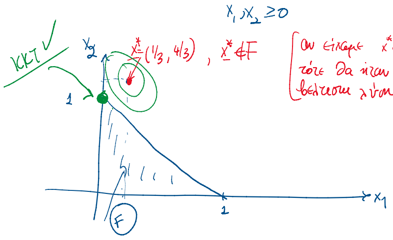
$$g'(t) = -4t + 1 = 0 \Rightarrow t^* = 1/4 > 0$$

$$\Rightarrow \underline{x}_2 = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\5/4\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\underline{x}_2) = \begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla f(\underline{x}_2)\| = 1/2$$

Άσκηση 2 Να λυθεί το πμγμ:

$$\max f(x_1, x_2)$$
$$\text{υ.π.} \quad x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$\underline{x}^* = (1/3, 4/3)$, $\underline{x}^* \notin F$

[αν είχαμε $x^* \in F$ τότε θα ήταν κ' η βέλτιστη λύση του πμγπ]

Συνθήκες ΚΚΤ (για πρόβλημα με $x_1, x_2 \geq 0$)

$$\max f(x_1, x_2)$$
$$(\mu) \leftarrow g(x_1, x_2) \leq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$f(x_1, x_2) = \cdots$ (άσκηση 1)

$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4 - 4x_1 - 2x_2 \qquad \partial g/\partial x_1 = \partial g/\partial x_2 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6 - 2x_1 - 4x_2$$

ΚΚΤ συνθήκες [Πρέπει να βρούμε $\underline{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ και $\mu \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις εξής:]

(1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_1} \leq 0$: $4 - 4x_1 - 2x_2 - \mu \leq 0$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_2} \leq 0$: $6 - 2x_1 - 4x_2 - \mu \leq 0$

(3) $x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) = 0$: $x_1(4 - 4x_1 - 2x_2 - \mu) = 0$

(4) $x_2(\quad)$: $x_2(6 - 2x_1 - 4x_2 - \mu) = 0$

(5) $\mu\, g(x) = 0$: $\mu(x_1 + x_2 - 1) = 0$

(6) $g(x) \leq 0$: $x_1 + x_2 \leq 1$

(7) $\mu, x_1, x_2 \geq 0$

(Π1) : $\mu = x_1 = x_2 = 0$ παραβιάζεται η (1) ✗

(Π2) : $\mu = 0, x_1 > 0, x_2 = 0$

$(3) \Rightarrow 4 - 4x_1 - \cancel{2x_2} - \cancel{\mu} = 0$

$4 - 4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0, \mu = 0$

(2) $6 - 2x_1 - 4x_2 - \mu = 4 > 0$ ✗

(Π3) $\mu = 0, x_1 = 0, x_2 > 0$

$(4) \Rightarrow x_2 = 3/2, x_1 = 0, \mu = 0$

$(6) \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{3}{2} > 1$ ανέφικτη ✗

(Π4) $\mu = 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

(Π4) $\mu=0$, $x_1>0$, $x_2>0$

$$\left.\begin{aligned}4-4x_1-2x_2=0\\6-2x_1-4x_2=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}x_1=1/3\\x_2=4/3\end{aligned} \quad x_1+x_2>1 \quad \times$$

Επομένως πρέπει $\mu>0 \Rightarrow (x_1+x_2-1)=0 \Rightarrow \boxed{x_1+x_2=1}$

(Π5) $\mu>0$, $x_1=x_2=0$

$x_1+x_2=0<1$ $\times$

(Π6) $\mu>0$, $x_1>0$, $x_2=0$

$x_1+x_2=1$, $x_1=1$, $x_2=0$.

(3) : $4-4-\mu=0 \Rightarrow \mu=0$ άτοπο $\times$

(Π7) $\mu>0$, $x_1=0$, $x_2>0$

$x_1+x_2=1 \Rightarrow x_2=1$, $x_1=0$

(4) : $6-4-\mu=0 \Rightarrow \mu=2$

$\boxed{x_1=0, x_2=1, \mu=2}$ ικανοποιεί τις (1) - (7)

(Π8) $\mu>0$, $x_1>0$, $x_2>0$

$$\left.\begin{aligned}(3)\\(4)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}4-4x_1-2x_2-\mu=0\\6-2x_1-4x_2-\mu=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}4-4x_1-2x_2=6-2x_1-4x_2\\x_1+x_2=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}x_1=0\\x_2=1\end{aligned} \quad \times$$

Τελικά η μόνη λύση των KKT :

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \mu=2$$

Άσκηση 3

(Άσκηση 1, σειρά ασκ. ΓΠ)

n προϊόντα

m πρώτες ύλες (a_{ij})

t_j : χρόνος επεξ ανά μον πρ. j

Μεταβλητές : $x_1, \dots, x_n$, x_j = ποσ. παραγ. προϊόντος j

$$\sum_j a_{ij} x_j \le b_i \quad \forall i=1,\dots,m$$
$$\sum_j t_j x_j \le T$$

Άσκηση 4 (άσκ. 2 σειρά ΓΠ)

n προϊόντα

m πρώτες ύλες, (a_{ij}), b_i

t_j : χρόνος επεξεργασίας ανά μον. πρ. j

ℓ μηχανήματα, διαθ. χρόνοι T_k, $k=1,\dots,\ell$

Μεταβλητές $x_1,\dots,x_n$ όπως στην προηγ. άσκηση δεν είναι αρκετές.

Πρέπει να γνωρίζουμε ποιες ποσότητες κάθε προϊόντος παράγονται σε κάθε μηχάνημα

Μεταβλητές : x_{jk} = ποσ. πρ. j που παράγεται στο μηχ k, $j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,\ell$

Συνολ ποσότητα πρ. j : $\sum_{k=1}^{\ell} x_{jk} = x_{j1} + \dots + x_{j\ell}$

Αντικ. Συν. $= \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{k=1}^{\ell} x_{jk} \right)$ = συνολ κέρδος

αντίστοιχα για περ. πρώτων υλών:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{\ell} x_{jk} \right) \le b_i , \quad i=1,\dots,m$$

για χρόνους επεξ $\quad \sum_{j=1}^{n} t_j x_{jk} \le T_k \quad k=1,\dots,\ell$

$$x_{jk} \ge 0 \quad \forall j,k$$

(Άσκηση 3 σειρά ΓΠ)

Οι μεταβλητές θα πρέπει να ορίζουν

(Άσκηση 5 συνέχεια ...)

Οι μεταβλητές θα πρέπει να ορίζουν
ποιο μέρος κάθε φορτίου θα μεταφέρει η εταιρεία κ' πώς αυτό θα κατανεμηθεί στα 3 μέρη του αεροσκάφους

Υπόδειξη: X_{jk} = κλάσμα (≤ 1) του φορτίου j που τοποθετείται στο διαμ. k του σκάφους

$j = 1, \dots, 4$, $k = 1, \dots, 3$

1: εμπρός
2: μεσαίο
3: πίσω

(π.χ. $X_{11} = 0.2$, $X_{12} = 0.2$, $X_{13} = 0.3$)

$\Rightarrow$ Από φορτίο 1: 20% → εμπρός, 20% → μεσαίο, 30% → πίσω

Βάρος	Όγκος	Αμοιβή
$0,2 \times 15 = 3$	$0,2 \times 360 = 72$	$0,2 \times 7500 = 1500$ ευρώ
⋮	⋮	⋮

[συμπληρώστε: γενική μορφή αντικ. συνάρτησης και περιορισμών].

(Άσκηση 6 – Σειρά ΓΠ)

X τμ. $X \in \{a_1, \dots, a_n\}$ $a_1, \dots, a_n$: σταθερές

$p_1, \dots, p_n$ ← μεταβλητές

Γνωρίζουμε $E(X) = m$

$$E(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j = m$$

Επίσης τα p_j ικανοποιούν $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, $p_j \geq 0$

Επίσης τα p_j ικανοποιούν $\sum_{j=1} p_j = 1$, $p_j \geq 0$

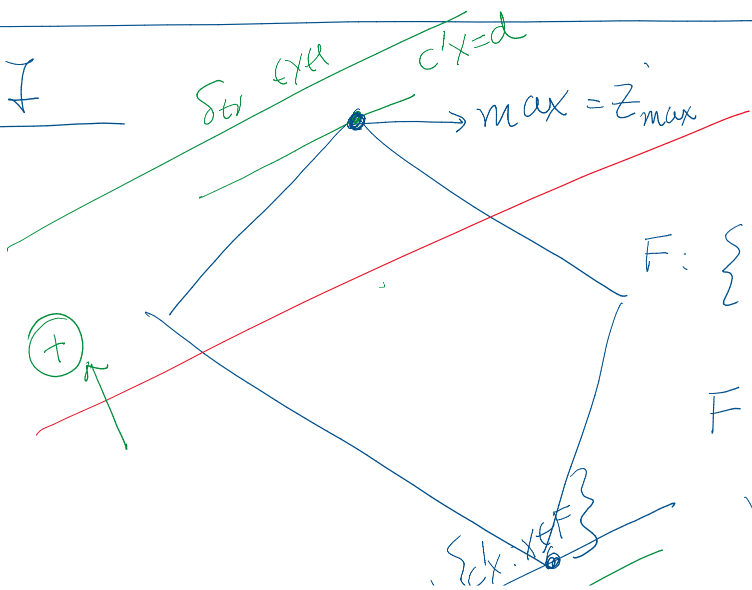
$$\max \; V(X) \qquad \text{υ.π.} \quad E(X) = m, \quad \sum p_j = 1, \quad p_j \geq 0$$

$$\max_{p_1, \dots, p_n} V(X) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j p_j = m, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1, \quad p_j \geq 0$$

$$V(X) = E\big(X - \underbrace{E(X)}_{m}\big)^2 = E(X-m)^2 = \sum_{j=1}^{n} (a_j - m)^2 p_j$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max \; (\min) & \sum_{j=1}^{n} (a_j - m)^2 p_j \\ \text{υ.π.} & \sum_{j=1}^{n} a_j p_j = m \\ & \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \\ & p_j \geq 0, \; j = 1, \dots, n \end{array}}$$

Ασκ 7



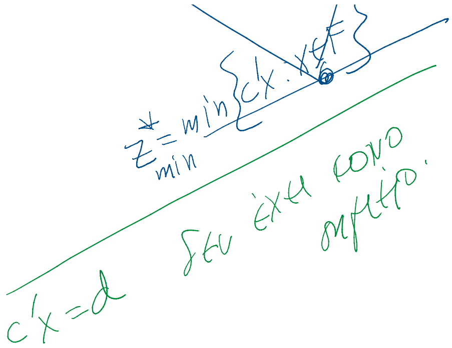
$c'x = d$ έχει κοινό σημείο

$F: \{Ax = b, x \geq 0\}$

$F \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c'x = d\} \neq \emptyset$

να ελέγξουμε αν

2



να εξηγήσουμε αυτό :)

$$\max \{ c'x : x \in F \}$$ π.χ.