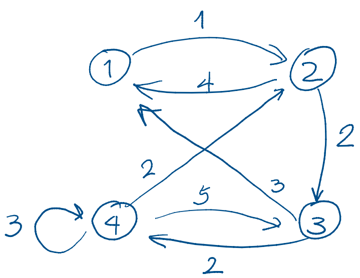
Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-04-29

Wednesday, April 29, 2020 12:53 PM

Δυναμικός Προγραμματισμός

Προβλήματα όπου παίρνονται διαδοχικές αποφάσεις σε βήματα ή στάδια (διακριτός χρόνος)

Παράδειγμα 2

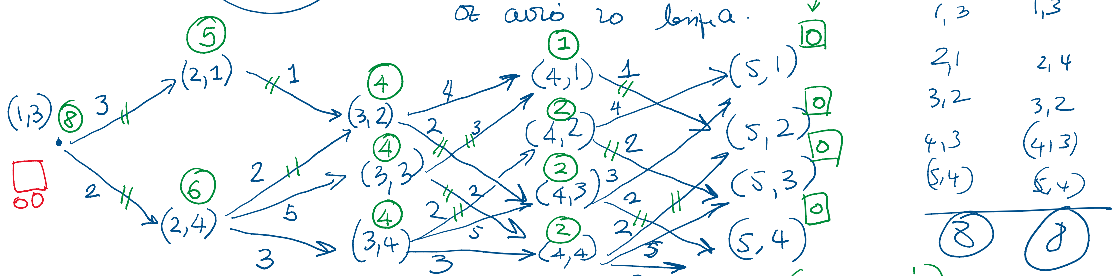


Ξεκινώντας από τον κόμβο 3 θέλω να κινηθώ για 4 βήματα με το ελάχιστο δυνατό κόστος

$8 = v(1,3)$

Κατάσταση (t, x) : t = βήμα/στάδιο, $t = 1, 2, 3, 4$

x = κορυφή που βρισκόμαστε σε αυτό το βήμα.



$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$ $t=5$ (τερματικό)

λαμβάνονται αποφάσεις

τερματικές καταστάσεις

$S_1 = \{3\}$
$= \{(1,3)\}$

$S_2 = \{(2,1), (2,4)\}$

⋮

$g_3(3,4) = (4,4)$

$D_2(2,1) = \{2\}$

$c_2((2,1),2) = 1$

$\hat{C}(N+1, x) = 0$

Συνάρτηση βέλτιστης τιμής

$v(t, x)$ = ελάχιστο κόστος έως το $5^{\text{ο}}$ στάδιο (τέλος) αν στο στάδιο t βρισκόμαστε στην κορυφή x.

(Στάδιο t: έχουν ληφθεί οι προηγ. $t-1$ αποφάσεις κ' τώρα πρέπει να ληφθεί η $t^{\text{οστή}}$)

$v(1,3) = 8$

Βέλτιστες διαδρομές

$v(t, x)$

$v(5,x)=0 \qquad x=1,2,3,4$

$v(4,1)=1+v(5,2)$

$\vdots$

$v(3,2)=\min\begin{cases}4+v(4,1)\\2+v(4,3)\end{cases}$

$\vdots$

$v(1,3)=\min\begin{cases}3+v(2,1)\\2+v(2,4)\end{cases}=8$

γενικά $\quad v(t,x)=\min\left\{\underbrace{\text{άμεσο κόστος ενός βήματος}+v(t+1,\text{επόμενη κατάσταση})}:\ \forall\ \text{απόφαση στην } (t,x)\right\}$

Γενικά σε ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού πεπερασμένου ορίζοντα, με ντετερμινιστική δυναμική ορίζουμε:

1) Στάδια/βήματα: $t=1,2,\dots,N+1$ $\quad$ N μήκος ορίζοντα, $N+1$: τερματικό στάδιο

2) x_t: κατάσταση στο βήμα t

S_t = χώρος καταστάσεων στο βήμα t $=\{x \mid x:\text{κατάσταση στο } t\}$ $\qquad |S_t|<\infty$

3) a_t: απόφαση στο βήμα t

$D_t(x)$ = δεσμή αποφάσεων $=\{a \mid a:\text{δυνατή απόφαση στην κατάσταση } x \text{ στο βήμα } t\}$ $\qquad |D_t(x)|<\infty$

4) Δυναμική $\quad x_{t+1}=g_t(x_t,a_t)$

5) Κόστος/κέρδος ενός βήματος $c_t(x_t, a_t)$

6) Τερματικό κόστος $\hat{c}(x_{N+1})$ = κόστος αν η τελική κατάσταση είναι η x_{N+1}

Εξισώσεις Βελτιστότητας (Εξισώσεις Bellman)

$$v(t,x) = \min\left\{ c_t(x,a) + v(t+1, g_t(x,a)),\ a \in D_t(x) \right\}$$

Τερματικές συνθήκες $\quad v(N+1,x) = \hat{c}(x), \quad x \in S_{N+1}$

$(\delta t \to 0)$

$$\min\left\{ c_t(x,a) + \underbrace{\left(v(\overset{t+\delta t}{t+1}, g_t(x,a)) - v(t,x)\right)}_{\text{μεταβολή } \Delta_t(v(t,x),a)},\ a \in D_t(x) \right\} = 0.$$

Εξίσωση διαφορών

↓ διαφορική εξίσωση σε συνεχή χρόνο