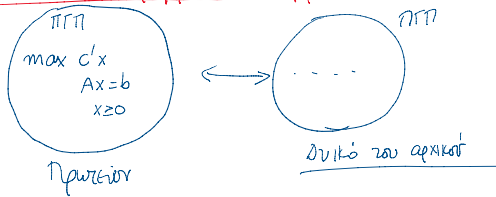


Διπλότητα στο Γραμμικό Προγραμματισμό



Ημικανονική Μορφή (Normal Form)

$\begin{matrix} \text{HK/max} & \max c'x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} \min c'x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{matrix} \quad \text{HK/min}$

(b μπορεί να έχει αρνητικά στοιχεία) Προβλεπόμενη φορά :  $\begin{cases} \leq \text{αν max} \\ \geq \text{αν min} \end{cases}$   
 (επιλογισμών σε HK μορφή)

HK μορφή χωρίς βλάβη γενικότητας  
 (κάθε ΠΓΠ μπορεί να μετασχηματιστεί σε ισοδύναμο ΠΓΠ σε HK μορφή)

$\min c'x \Leftrightarrow -\max (-c'x)$

$a'x \geq b \Leftrightarrow -a'x \leq -b$

$a'x = b \Leftrightarrow \begin{cases} a'x \leq b \\ a'x \geq b \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} a'x \leq b \\ -a'x \leq -b \end{cases}}$

$x \leq 0 \Leftrightarrow x' = -x \geq 0$

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = x_1 - x_2, x_1, x_2 \geq 0$

Ορισμός

Έστω πππ (Π) (ημι κανονική)  
 σε HK/max μορφή

Ορίζουμε το δual πρόβλημα  
 του Π, ως το πρόβλημα

(Π)  $\begin{matrix} \max c'x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{matrix}$   
 $(x \in \mathbb{R}^n), c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$   
 (m περιορισμοί, n μεταβλητές)

(Δ)  $\begin{matrix} \min b'w \\ A'w \geq c \\ w \geq 0 \end{matrix}$   
 $A' \in \mathbb{R}^{n \times m}$  (n περιορισμοί, m μεταβλητές)

HK/min

$w \in \mathbb{R}^m$   
 (δual μεταβλητές)

Παράδειγμα 1

Έστω (Π)

Δual

5, 2, 4, 4

7, 19, 11



Ερω (Π)

$$\max 5x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

v.π.

$$x_1 - 2x_2 \leq 7 \quad (w_1)$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 12 \quad (w_2)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min 7w_1 + 12w_2$$

$$w_1 + 2w_2 \geq 5 \quad (x_1)$$

$$-2w_1 + 3w_2 \geq 3 \quad (x_2)$$

$$-w_2 \geq 4 \quad (x_3)$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

(Hk/max)

$$c' = (5, 3, 4), \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b' = (7 \ 12)$$

## Παρατήρηση 1

Ερω σε 20 ηρωκίωρ είναι

$$\min b'w$$

$$A'w \geq c$$

$$w \geq 0$$

↕

$$\left[ \begin{array}{l} \max -b'w \\ -A'w \leq -c \\ w \geq 0 \end{array} \right]$$

δουκίω

δερ είναι σε Hk/max

$$\max c'x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

↕

$$\min (-c'x)$$

$$-Ax \geq -b$$

$$x \geq 0$$

Aw D είναι το δουκίω του Π ρίτε



20 Π " " " " 200 Δ

Ζεύγη (πρωτεύοντος - δευτερεύοντος)

## Παράδειγμα Οικονομική Εφαρμογή

Παραγωγή 2 προϊόντων Α, Β (κέρδη/μονάδα)  
2 πρώτες ύλες, 1 ώρα λειτουργίας σε ένα μηχάνημα

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 7x_2 & \text{(κέρδος)} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 & (w_1) \text{ πρ. ύλη 1} \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 25 & (w_2) \text{ " " 2} \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 & (w_3) \text{ (ώρας λειτουργίας μηχανήματος)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Πρόβλημα παραγωγής

Πρόβλημα που αφορά τις πόρους παραγωγής

Θέλουμε να προσφέρουμε τιμές ανά μονάδα

πρώτη ύλη 1, πρ. ύλη 2, 1 ώρα λειτουργίας

α) Η πρόταση να είναι συμφέρουσα για να

δηλαδή να γίνει με το μικρότερο

(, f αναθε)

αμφα.

(ης) } πόροι .  
παράγωγοι

ης

για

είναι ώστε:

των παραγωγών

δυνατότητα κίνησης.

b) Η απόφαση να γίνει με το μικρότερο

### Πρόβλημα απόφασης

$w_1$ : τιμή απόφασης ηρ. ύψους 1 / μον

$w_2$ : " " " " 2 / μον

$w_3$ : " " " " χρονον μηχανής / μον

$$\begin{array}{l}
 \min \quad 12w_1 + 25w_2 + 30w_3 \\
 \text{υ.π.} \quad \begin{array}{l}
 2w_1 + 7w_2 + 5w_3 \geq 5 \\
 3w_1 + 4w_2 + 6w_3 \geq 7 \\
 w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{array}
 \end{array}$$

(συνολικ  
←

0 παραγωγή: 1) με  $\left. \begin{array}{l} 2 \text{ μον. η.υ. 1} \\ 7 \text{ " η.υ. 2} \\ 5 \text{ ώρες μηχανής} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{παραγώ} \\ \text{μοιάδα} \\ \text{ε'να βγ}$

Οω αντί τις ποσότητες το πουρήσω σε τιμή

θα εσπραξω  $2 \cdot w_1 + 7w_2 + 5w_3$

Για να με συμφέρει να τις πουρήσω θα

$$2w_1 + 7w_2 + 5w_3 \geq 5$$

• 1 0 0  
δυνατό κόστος

ό κόστος αγοράς)

Δυτικό του  
Προβλήματος Παραγωγής

• μια  
nr. A  
αγορά κέρδος 5

$w_1, w_2, w_3$

πρέπει