Έστω μια ΒΕΛ x_0 (με πίνακα $B=(P_1,\dots,P_m)$)

ισχύει $z_j - c_j < 0$ για κάποιο $j \in \{m+1,\dots,n\}$

Επομένως η x_0 δεν είναι βέλτιστη

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{B0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{B0} = B^{-1} b$$

$$z_j = c_B' Y_j, \quad Y_j = B^{-1} P_j$$

Βήμα Βελτίωσης

Θεωρώ λύσεις της μορφής $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m \\ \} \end{matrix}$

όπου $x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow m+1 \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \leftarrow n \end{matrix}$ $(\theta > 0)$

δηλαδή $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

Για να ισχύει $x \in F$ δηλαδή (1) $Ax = b$ θα πρέπει

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \} x_N \\ \\ \end{matrix} \quad (1)$$

και επίσης $x \geq 0$

$$B^{-1} N = [Y_{m+1}, \dots, Y_n] \qquad Y = [I, B^{-1}N] = B^{-1} A$$

$$B^{-1} N x_N = \sum_{k=m+1}^{n} x_k Y_k = \theta Y_j$$

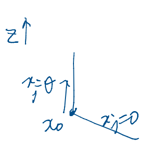
Επειδή $x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \Rightarrow B^{-1} N x_N = \theta Y_j = \theta \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}$

Τελος $B^{-1} b = x_{B0} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0m} \end{pmatrix}$ (βασικές μεταβλητές στην αρχική λύση x_0)

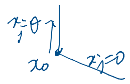
Επομένως $B^{-1} b - B^{-1} N x_N = x_{B0} - \theta Y_j$

$$= \begin{pmatrix} x_{01} - \theta x_{1j} \\ x_{02} - \theta x_{2j} \\ \vdots \\ x_{0m} - \theta x_{mj} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} - \theta x_{1j} \\ x_{02} - \theta x_{2j} \\ \vdots \\ x_{0m} - \theta x_{mj} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$



$\boxed{\begin{matrix} x_{0i} > 0 \text{ (μη εκφυλ. } x_0) \\ \theta > 0 \end{matrix}}$ x_{ij} ?



$\boxed{\begin{array}{l} x_{0i} > 0 \ (\text{μη εκφυλ. } x_0) \\ \theta > 0 \end{array}}$ $\quad \underline{x_{ij}\ !}$

Περίπτωση 1 Έστω $\boxed{x_{ij} \le 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, m}$

$$\Rightarrow \quad x_{i0} - \underbrace{\theta x_{ij}}_{\le 0} \ge x_{i0} > 0 \qquad (\theta x_{ij} \le 0)$$

$$\forall\, \theta > 0$$

$$x_{i0} - \theta x_{ij} > 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, m, \ \forall\, \theta > 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Πρόβλημα μη φραγμένο}}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{Y_j = B^{-1} P_j \le 0}$

(αποτελείται από μη θετ. συνιστώσες)

$$\left[\quad Y \quad \boxed{Y_j} \le 0 \ \right]$$

$$\frac{z_j - c_j < 0}{c_B' Y_j - c_j < 0}$$

τότε το πρόβλημα είναι μη φραγμένο

Περίπτωση 2 $x_{ij} > 0$ για $\underline{\text{τουλάχιστον ένα}}$ $i = 1, \dots, m$

Το θ πρέπει να είναι τέτοιο ώστε

$$x_{0i} - \theta x_{ij} \ge 0 \quad \text{για } i : x_{ij} > 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \theta \le \underbrace{\boxed{\frac{x_{0i}}{x_{ij}}}}_{>0}, \ \forall\, i = 1, \dots, m : x_{ij} > 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \theta \le \min \left\{ \frac{x_{0i}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0 \right\}$$

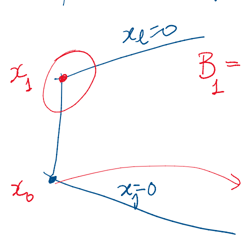
Έστω ℓ : $\displaystyle \frac{x_{0\ell}}{x_{\ell j}} = \min_i \left\{ \frac{x_{0i}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0 \right\}$

Τότε αν $\displaystyle \theta^* = \frac{x_{0\ell}}{x_{\ell j}} \Rightarrow x_\ell = \boxed{x_{0\ell} - \theta^* x_{\ell j} = 0}$

δηλ. η $x_\ell = 0$ στη νέα λύση

Επομένως έχουμε φτάσει σε μια νέα κορυφή (ΒΕΛ)

όπου $\underbrace{x_j > 0}_{\text{νέα βασική μεταβλητή}}$ κ' $\underbrace{x_\ell = 0}_{\text{έχει φύγει από την προηγούμενη βάση (τώρα μη βασική)}}$



$$B_1 = (P_1, \dots, P_{\ell-1}, P_j, P_{\ell+1}, \dots P_m)$$

$$B = (P_1, P_2, \dots, P_\ell, P_{\ell+1}, \dots, P_m)$$

Συνοπτικά

ΒΕΛ $\quad B, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{B0} \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_{B0} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0m} \end{pmatrix}$

Συνοπτικά

ΒΕΛ B, $x_0 = \begin{pmatrix} x_{B0} \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_{B0} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0m} \end{pmatrix}$

Βήμα 1

$Y = B^{-1}A$

$\bar{c} = \underline{c}' - c_B' Y \Rightarrow \bar{c}_j = c_j - z_j$

$z_j = c_B' Y_j$

Αν $z_j - c_j \geq 0 \ \forall j = 1, \ldots, n$ βέλτιστη λύση

αν $z_j - c_j < 0$ για κάποιο j (μη βασικό)

Βήμα 2

τότε η x_j μπαίνει στη βάση

(α) Αν $Y_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow$ μη φραγμένο πρόβλημα

(β) Διαφορετικά

$$\theta = \min\left\{ \frac{x_{0i}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0 \right\} = \frac{x_{0l}}{x_{lj}}$$

για κάποιο l (βασικό)

Τότε η x_l φεύγει από τη βάση και στη θέση της μπαίνει η x_j

Έχουμε βρει μια καλύτερη ΒΕΛ

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{B0} - B^{-1}N x_N \\ 0 \\ \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\to l : x_l = 0 \Rightarrow \text{φεύγει} \\ \leftarrow j \ (\text{μπαίνει}) \end{array}$$

$$B^{(1)} = (P_1, \ldots, P_{l-1}, P_j, P_{l+1}, \ldots, P_m)_{m \times m}$$

$$|B^{(1)}| \neq 0$$

Επιστροφή στο βήμα 1 με την νέα βάση $B^{(1)}$

Simplex Tableau

$Y = [\,I \ \ B^{-1}N\,]$

B	C_B	$X_B = B^{-1}b$	c_1 Y_1	c_2 Y_2	Y_l	Y_m	Y_j	c_n Y_n	θ
P_1	c_1	x_{01}	1	0	0	0	x_{1j}	x_{1n}	$\frac{x_{01}}{x_{1j}}$ $(x_{1j}>0)$
P_2	c_2	$\vdots$	0	1	$\vdots$	$\vdots$	x_{2j}	x_{2n}	
P_l		x_{0l}			1		x_{lj}		$\frac{x_{0l}}{x_{lj}}$ $(x_{lj}>0)$ ← min φεύγει
P_m	c_m	x_{0m}	0	0	0	1	x_{mj}	x_{mn}	
		z_0	0	0	0		$z_j - c_j$	$z_n - c_n$	$\geq 0 \Rightarrow$ βέλτιστο

$z_0 = c_B' x_B$

(m) βασικές στήλες

αν <0 ↑ μπαίνει στη βάση

αν $\leq 0 \Rightarrow$ μη φραγμένο

	B	C_B	X_B	Y_1	Y_2 ...	Y_l	Y_n
1	P_1	c_1		1		0	
2	P_2	c_2		0	νέος Y $= B_{new}^{-1} \cdot A$	⋮	
l	P_l	c_l		⋮		1	
m		c_m		0		0	

Παράδειγμα

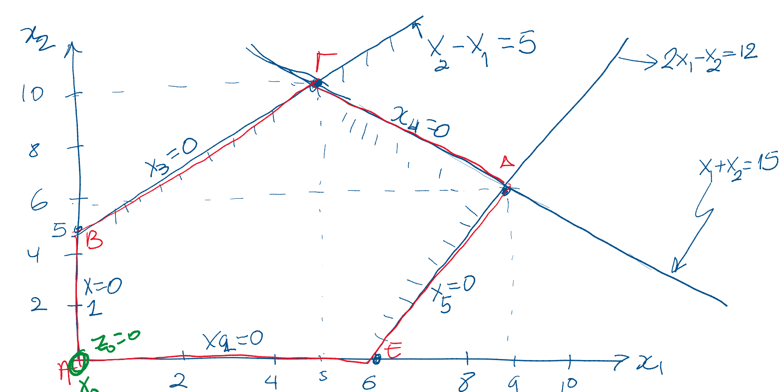
$$\max \; 3x_1 + x_2$$
$$-x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 + x_2 \le 15$$
$$2x_1 - x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

ΚΜ

$$\max \; 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 15$$
$$2x_1 - x_2 + x_5 = 12$$
$$x_1, \dots, x_5 \ge 0$$

$$b = \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 15 \\ 12 \end{matrix}}$$

$$A = \begin{array}{ccccc} & & P_3 & P_4 & P_5 \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} \ge 0 \qquad = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = (P_3, P_4, P_5)$

Εύρεση αρχικής ΒΕΛ

Πρέπει να βρώ υποπίνακα B του A, τ.ω. $|B| \neq 0$
κ' να υπολογίσω B^{-1} $(m=3)$

Επειδή στις στήλες του A εμφανίζεται ο μοναδ. $I_{3\times3}$
μπορούμε ως αρχικό βασικό πίνακα να πάρουμε

$$B = (P_3, P_4, P_5) = I \Rightarrow B^{-1} = I$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} x_N \\ \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}\right\} x_B \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x_B = B^{-1} b = b \ge 0}$$

$$\Rightarrow \underline{x_0 : \text{ΒΕΛ}}$$

$Y = B^{-1}A = \underline{A}$

		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	
		3	1	0	0	0	
B	C_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	θ
P_3	0	5	−1	1	1	0	0	×
P_4	0	15	1	1	0	1	0	$15/1 = 15$
P_5	0	12	2	−1	0	0	1	$12/2 = 6$ → φεύγει η x_5
		0	−3	−1	0	0	0	

$x_3 = 5$, $x_4 = 15$, $x_5 = 12$

γραμμή περιορισμός (πίνακας) →

σημείο περιορισμού

$z_0 = c_B' \cdot x_B$, $z_1 - c_1$, $z_j - c_j$, $z_j = c_B' Y_j$

x_1 μπαίνει στη βάση

Γ_1, Γ_2, Γ_3

$(B = (P_3, P_4, P$

			3	1	0	0	0	
B	C_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	θ
P_3	0	11	0	1/2	1	0	1/2	$11/(1/2) = 22$
P_4	0	9	0	3/2	0	1	−1/2	$9/(3/2) = 6$
P_1	3	6	1	−1/2	0	0	1/2	×
		18	0	−5/2	0	0	3/2	

x_4 φεύγει

$-5/2 < 0$

x_2 ↑ 2 μπαίνει

$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_3$

$\Gamma_2' = \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_3$

$\Gamma_3' = \frac{1}{2}\Gamma_3$

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 11 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z = 18 > 0 \text{ (στην προηγ. λύση) !!}$$

			3	1	0	0	0
B	C_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
P_3	0	$B^{-1}b$	? Y				
P_2	1						
P_1	3						
		?					