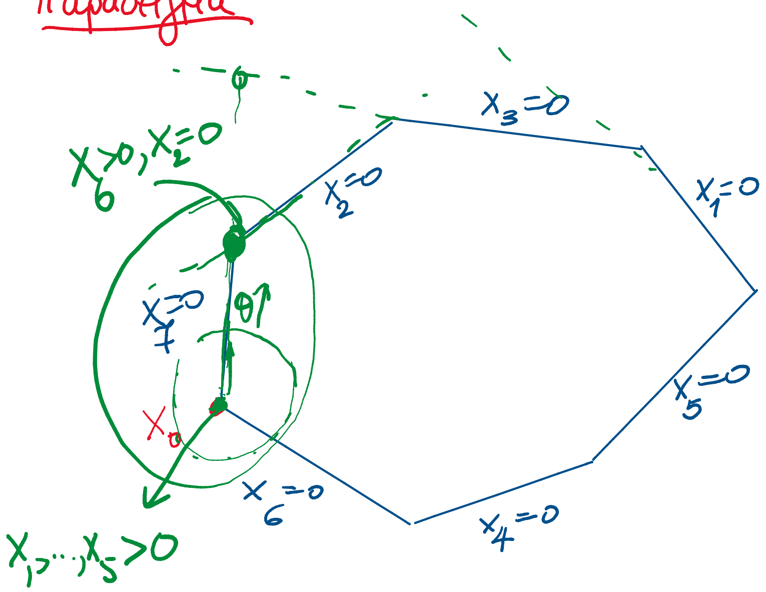
Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-03-25

Wednesday, March 25, 2020 1:19 PM

Παράδειγμα



$n=7$

$m=5$

$$x_0=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_5 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$$

x_6 "μπαίνει στη βάση"

x_2 "βγαίνει από τη βάση"

$$\max c'x \quad Ax=b \quad x\geq 0$$

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad A=(P_1 \cdots P_n)$ $\quad P_j\in\mathbb{R}^m$

Μια αρχική Βασική Εφικτή Λύση x_0 (μη εκφυλισμένη) και χβγ υποθέτουμε ο αντίστοιχος πίνακας $B=(P_1,\dots,P_m)$

$$x_0=\begin{pmatrix} x_{01}\\ \vdots \\ x_{0m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\}\ m \text{ βασικές μεταβλητές} \\ \}\ n-m \text{ μη βασικές μεταβλητές}\end{matrix}$$

1) Να βρεθούν οι τιμές $x_{01},\dots,x_{0m}=?$

$Ax_0=b$ $\qquad x_0=\begin{pmatrix} x_B \\ 0\end{pmatrix}$ $\qquad x_B=\begin{pmatrix} x_{01}\\ \vdots \\ x_{0m}\end{pmatrix}$

$$A=(\underbrace{P_1,\dots,P_m}_{B},\underbrace{P_{m+1},\dots,P_n}_{N})=(B\ \ N)$$

$B_{m\times m}, N_{m\times(n-m)}$

$$|B| \neq 0$$

$$\forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \boxed{Ax = b} \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i P_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j P_j = b$$

$$\Longleftrightarrow B x_B + N x_N = b \qquad \text{όπου} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{B^{-1} A x = B^{-1} b}$$

$$\Longleftrightarrow B^{-1} B x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow I x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N}, \quad \forall\, x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Οποιαδήποτε λύση του συστήματος $Ax = b$

γράφεται ως $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ x_N \end{pmatrix}$

για $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$

Έστω $Y = B^{-1} A = B^{-1} (B \quad N) = (I \quad B^{-1} N)$

$$Ax = b \iff$$
$$Yx = B^{-1}b \iff$$
$$Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \iff$$
$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \implies x = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix}$$

Η λύση $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} x_N = 0 \end{matrix}$

Επομένως από $\underline{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$

Θέτοντας $x_N = 0$ προκύπτει $x_B = B^{-1}b$

και η λύση (ΒΕΛ) $x_0 = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$B^{-1}b \geq 0 \iff x_0 : \text{ΒΕΛ}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} x_B \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} x_N = 0 \end{matrix} \qquad A = (\underbrace{P_1 \; P_2 \cdots P_m}_{B} \; \underbrace{P_{m+1} \cdots P_n}_{N})$$

$$|B| \neq 0 \implies \{P_1, \dots, P_m\} \text{ βάση του } \mathbb{R}^m$$

Επομένως $\forall j = 1, \dots, n \implies P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i$

Θέτουμε $Y_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \end{pmatrix}$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$

Θέτουμε $Y_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$

και παρατηρούμε ότι $P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \iff P_j = BY_j$, $j=1,\dots,n$

$$\Rightarrow Y_j = B^{-1} P_j \Rightarrow \boxed{Y = B^{-1} A}$$

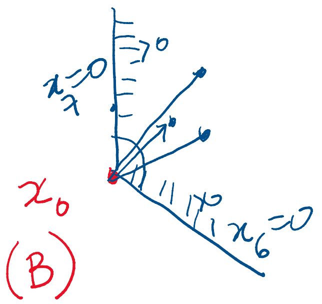
Έχουμε την αρχική ΒΕΛ: $x_0 = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

Η τιμή της αντικ. συνάρτησης είναι:

$$z_0 = c' \cdot x_0 = (c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

$$= (c_B' \quad c_N') \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B' x_B + c_N' x_N$$

$$= c_B' B^{-1} b + c_N' \cdot 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = c_B' \cdot B^{-1} b}$$



Οποιαδήποτε λύση του $Ax=b$ γράφεται $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ x_N \end{pmatrix}$

$$= x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B^{-1} x_N \\ x_N \end{pmatrix} = x_0 + \begin{pmatrix} -B^{-1} x_N \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$= X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix} = x_0 + \begin{pmatrix} -B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Επομένως οποιαδήποτε εφικτή λύση $x \in F$ $(x \geq 0)$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix} \quad \text{για κάποιο } x_N \geq 0$$

Συνεπώς για κάθε $x \in F$

$$z = c'x = c' \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix} =$$

$$c_B' (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N' x_N =$$

$$= \underbrace{c_B' B^{-1} b}_{z_0 = c'x_0} + \underbrace{(c_N' - c_B' B^{-1} N)}_{\bar{c}'} x_N$$

$$\Rightarrow \quad c'x = c'x_0 + \bar{c}' x_N$$

$$\underset{}{\bar{c}'} = \underset{1\times(n-m)}{c_N'} - \underset{1\times m}{c_B'} \, \underset{m\times m}{B^{-1}} \, \underset{m\times(n-m)}{N} = (\bar{c}_{m+1}, \ldots, \bar{c}_n)$$

$$B^{-1}N = (Y_{m+1}, \ldots, Y_n)$$

$$c_B' B^{-1} N = (c_B' Y_{m+1} \cdots c_B' Y_n)$$

$$c_B' B^{-1} N = \left(c_B' Y_{m+1} \cdots c_B' Y_n \right)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{c}_j = c_j - c_B' Y_j \, , \quad j = m+1, \dots, n$$

Έστω $z_j = c_B' Y_j \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_j = (c_j - z_j)$

$$c'x = c'x_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \bar{c}_j x_j = c'x_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$$

<u>Θεώρημα</u> (Ικανή συνθήκη βελτιστότητας)

Αν $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall \, j = m+1, \dots, n \Rightarrow x_0$: βέλτιστη λύση

<u>Απόδειξη</u> Αν $z_j - c_j \geq 0 \Rightarrow c_j - z_j \leq 0 \, , \; j = m+1, \dots, n$

ενώ $x_j \geq 0 \quad j = m+1, \dots n$

$$\Rightarrow \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j \leq 0 \Rightarrow \boxed{c'x \leq c'x_0 \quad \forall \, x \in F}$$

$\Rightarrow x_0$: βέλτιστη

<u>Παρατήρηση</u> $\bar{c}_j = c_j - z_j \qquad j = m+1, \dots, n$

Για $j = 1, \dots, m$

$z_j = c_B' Y_j$, όμως $Y = (\underbrace{Y_1, \dots, Y_m}_{I}, \underbrace{Y_{m+1}, \dots, Y_n}_{B^{-1}N})$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{I} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{B^{-1}N}$

$\Rightarrow$ για $j=1,\dots,m \Rightarrow y_j = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

$$\Rightarrow z_j = (c_1,\dots,c_m)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_j \Rightarrow \bar{c}_j = 0$$

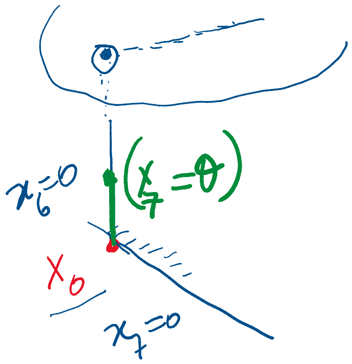
$$\bar{c}_j = c_j - c_B' y_j = \begin{cases} 0 & j=1,\dots,m \ (B) \\ c_j - c_B' y_j & j=m+1,\dots,n \end{cases}$$

Αν $\underline{z_j - c_j \geq 0 \quad \forall j=1,\dots,n} \Rightarrow x_0$: βέλτιστη

Αντίστροφα Υποθέτουμε $z_j - c_j < 0$ για κάποιο $j=m+1,\dots,n$

Θα δείξουμε ότι η x_0 δεν είναι βέλτιστη κατασκευάζοντας μια καλύτερη λύση

$$c'x = c'x_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$$



υποθ. ότι $z_7 - c_7 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{c_7 - z_7 > 0}$

Θεωρώ λύσεις όπου $x_6=0,\ x_7=\theta>0$

$c'x = c'x_0 + (c_7 - x_7)\theta > c'x_0 \Rightarrow$ $\underline{x_0 \text{ όχι βέλτιστη}}$

Ξεκινώντας από x_0 θέτουμε $x_6=0, x_7=\theta>0$

$$x=\begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad x_N=\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

Γενικά $$c'x = c'x_0 + \sum_{k=m+1}^{n} (c_k - z_k)\, x_k$$

και για κάποιο $j \in \{m+1, \dots, n\}$ ισχύει $c_j - z_j > 0$

Θεωρώ τιμές για τα $x_{m+1}, \dots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} x_j=\theta>0 \\ x_k=0 \quad \forall k\neq j \end{array}\right\} \Rightarrow x_N=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} m+1 \\ \\ j \\ \\ n \end{array}$$

Αυτές αντιστοιχούν σε $$x=\begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}\, x_B \\ \\ \\ \}\, x_N \\ \\ \end{array}$$

κ' $c'x = c'x_0 + (c_j - z_j)\,\theta > c'x_0 \Rightarrow$ η x_0 όχι βέλτιστη