Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών

Θεωρία Μέτρου
Ενδιάμεση Εξέταση 2017–18
(Δεκέμβριος 2017)

1. Μία συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καλείται άνω ημισυνεχής αν

$$f^{-1}\big((-\infty, a)\big) = \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) < a\}$$

είναι ανοικτό σύνολο για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η f είναι άνω ημισυνεχής, τότε $f^{-1}(B)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}$.

(1.5μ)

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου. Έστω $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ τέτοια ώστε $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$. Δείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.
[$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. *Υπόδειξη*: ένα διάγραμμα Venn ίσως βοηθάει.]

(1.5μ)

3. Διατυπώστε και αποδείξτε το Λήμμα Borel–Cantelli. **(1μ)**

4. Έστω $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών. Δείξτε ότι, για Lebesgue-σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $n(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x - q_n| > 2^{-n}$ για κάθε $n \geqslant n(x)$.

(1μ)

5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία υποσυνόλων του X τέτοια ώστε, για κάποιο $\delta > 0$, η ανισότητα $\mu(A_n) \geqslant \delta$ ισχύει για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$.

(α) Αποδείξτε πλήρως ότι $\mu(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $n_1 < n_2 < \cdots$ τέτοια ώστε $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \neq \varnothing$.

(2μ)

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα για κάποια $f \colon X \to \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη, και αν $\mu(X) < +\infty$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$.

(β) Ισχύει αυτό αν παραληφθεί η υπόθεση ότι $\mu(X) < +\infty$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας πλήρως (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα).

(2μ)

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ να συγκλίνει για κάθε $x \in X$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(1μ)

8. (α) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f \colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^{-1/2}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue. Εξετάστε αν η συνάρτηση $f \colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^{-1/2}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue.

(β) Βρείτε το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,\pi]} \frac{\cos x}{1 + \sqrt{nx}} \,\mathrm{d}x.$$

(2μ)