11 Νοεμβρίου

**Άσκ 3.8** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου

$(A_n)$ υποσύνολα του $X$, $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu^*(A_n)$$

---

**Πρότ** $f_n : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες

- $\underset{= f}{\sup f_n}$ μετρήσιμη

**Απόδ** $\forall b \in \mathbb{R}$ $\{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathcal{A}$ ?

$$= \{x \in X : \sup_n f_n(x) \leq b\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : f_n(x) \leq b\}}_{= B_n} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

- $\inf f_n$ μετρήσιμη

  (same difference)

Υπενθύμιση: $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ $(b_n)\downarrow$

ορ. $\limsup a_n = \lim_n b_n = \inf_n b_n$

άρα, $\limsup f_n = \inf g_n$ όπου $g_n = \sup\{f_k : k \geq n\}$

$\forall f_n$ μετρήσιμη $\Rightarrow \sup\{f_k : k \geq n\} = g_n$ μετρ

$\forall g_n$ μετρ $\Rightarrow \inf g_n$ μετρήσιμη
$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad \limsup f_n$

Δείξαμε ότι αν $\forall f_n$ μετρ τότε και η $\limsup f_n$ είναι μετρήσιμη.

Ομοίως, η $\liminf f_n$ είναι μετρήσιμη.

• Αν $\forall f_n$ μετρ και $\forall x \in X$ υπάρχει το

$$\lim_n f_n(x) \in [-\infty, +\infty]$$
$$\| $$
$$f(x) \qquad f : X \to [-\infty, +\infty]$$

Ισχ. $f$ μετρήσιμη

; το κ.σ. όριο μετρήσιμων είναι μετρήσιμο

Απόδ. Έστω $x \in X$: $\lim_n f_n(x)$ υπάρχει

$$\Updownarrow$$

$$\limsup f_n(x) = \liminf f_n(x)$$
(αντιστροφικά)

άρα η υπόθεσή μου λέει: $f(x) = \limsup f_n(x)$ $\forall x$

άρα, αφού $\forall f_n$ μετρ, έπεται ότι η $f$ είναι μετρ.

$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$

$$f_n = \chi_{\{q_1, q_2, \dots, q_n\}}$$

$$f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} \chi_{\mathbb{Q}}$$

$\uparrow$ R-ολοκλ., γιατί είναι συνεχής εκτός από n σημεία.

ενώ η $\chi_{\mathbb{Q}}$ <u>όχι</u> R-ολοκλ.

γιατί $\forall\ L(f,P) = 0$ (σε κάθε $(a,b)$ $\exists\ \mathbb{Q}^c$)
και $\forall\ U(f,P) = 1$ ( " " " $\exists\ \mathbb{Q}$)

**Προτ.** ⊛ $f : X \to [0,+\infty]$ μετρ

νδο $af$ μετρ $, a \geq 0$

$a=0$ προφανές. Έστω $a>0$

**Αποδ** $\forall b$ $\{x \in X : af(x) \leq b\}$ μετρ

$\qquad \| \qquad \{x \in X : f(x) \leq b/a\}$ μετρ. ▨

**Προτ.** ⊛ $f, g : X \to [0,+\infty]$ μετρ.

$f+g$ μετρ.

**Αποδ** νδο $\forall b \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x)+g(x) < b\} \in \mathcal{A}$

υποθ $\forall b$, $\{x : f(x) < b\}$ και $\{x : g(x) < b\}$ $\in \mathcal{A}$

όμως: $f(x)+g(x) < b$

$$f(x) < b - g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists q_x \in \mathbb{Q} :$$

$$f(x) < q_x < b - g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$\exists q_x :$ $f(x) < q_x$ και $q_x < b - g(x)$

$\qquad \iff g(x) < b - q_x$

άρα $\{x : f(x)+g(x) < b\}$

$$\| \quad \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) < q\} \cap \{x : g(x) < b-q\}$$

μετρήσιμο.

Προτ $f: X \to \mathbb{R}$ μετρ, $a \geq 0$

$$\Downarrow$$

$af$ μετρ

Αποδ
- $a \geq 0$ : όπως πριν
- $a < 0$ : $\forall b \in \mathbb{R}$ : $\{x \in X : (af)(x) \leq b\}$

$$= \underbrace{\{x \in X : f(x) \geq \frac{b}{a}\}}_{\in \mathcal{A}}$$

άρα ον

Προτ $f$ μετρ $\Rightarrow f^2$ μετρ $\left(f^2(x) = (f(x))^2\right)$

Απόδ Θέλω νδο $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\{x : (f(x))^2 \leq b\} \in \mathcal{A}$$

$b < 0$ no problem (το σύνολο είναι κενό)

$$\Updownarrow \quad b \geq 0$$

$$\{x : |f(x)| \leq \sqrt{b}\}$$

$$= \underbrace{\{x : f(x) \geq -\sqrt{b}\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{x : f(x) \leq \sqrt{b}\}}_{\in \mathcal{A}}$$

άρα $\in \mathcal{A}$

$\Rightarrow f^2$ μετρήσιμη $\blacksquare$

$$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$$

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

$f, g$ μετρ $\Rightarrow$ $f+g$ μετρ $\Rightarrow$ $(f+g)^2$ μετρ

$-f^2$ μετρ

$-g^2$ μετρ

---

$\frac{1}{2}$ : $fg$

**Πρτ** $\chi_A$ μετρ $\iff A \in \mathcal{A}$

οι πιο απλές μετρ. συναρτήσεις

Απλές: Γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών

$\underbrace{\text{Απλές μετρήσιμες}}_{\text{Απλές}}$: $\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}$, $c_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{A}$

η γραφή δεν είναι μοναδική

**πχ** $\chi_{[0,2]} + \chi_{[1,3]} =$

$$\chi_{[0,1)} + 2\chi_{[1,2]} + \chi_{(2,3]}$$

Κάθε απλή $s: X \to \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένο σύνολο τιμών

$$s(X) = \{b_1, b_2, \dots b_k\} \subseteq \mathbb{R}$$

**Πρτ** αν $B_j = s^{-1}(\{b_j\})$ τότε $B_j \in \mathcal{A}$

Borel

και ισχύει $s = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{B_j}$ || κανονική μορφή

όπου $B_j \in \mathcal{A}$, ξένα ανά δύο, (μοναδική)

$$\bigcup_{j=1}^{k} B_j = X$$

($\forall x \in X$ τότε $s(x) = b_j$, κάποιο $j = 1 - k$ άρα $x \in B_j$)

$\longrightarrow$ Το σύνολο των απλών (μετρήσιμων) συναρτήσεων $X \longrightarrow \mathbb{R}$
Είναι $\mathbb{R}$- γραμμικός χώρος

$\cap|$

$\longrightarrow$ χώρος των μετρήσιμων $X \longrightarrow \mathbb{R}$

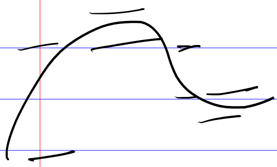
<u>Θεώρημα</u> Κάθε μετρήσιμη $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$
Είναι <u>κσ</u> όριο <u>ακολουθίας</u>
<u>απλών</u>

<u>Απ.)</u> $\exists\ (s_n)$ ακολουθία απλών
ώστε $\forall x \in X$,
$f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Το κριτήριο Riemann:

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (φραγμ)}$$

η $f$ είναι R-ολοκλ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$
$\exists$ διαμερ $P$ του $[a,b]$:
$P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$



$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \big(M_k(f) - m_k(f)\big)(t_k - t_{k-1}) < \varepsilon$$

όπου $M_k(f) = \sup\{f(s) : s \in [t_{k-1}, t_k)\}$

$m_k(f) = \inf\{ \quad '' \quad \}$

ισοδύναμα

αν ορίσω $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \chi_{[t_{k-1}, t_k)}$

$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \chi_{[t_{k-1}, t_k)}$

όπως $\varphi, \psi$ κλιμακωτές $\varphi \le f \le \psi$

να είναι $\int (\psi - \varphi) < \varepsilon$ (δηλ $U - L < \varepsilon$)

κλιμακωτή: γραμμ. συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων διαστημάτων

απλή: γραμμ. συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρ-συνόλων

**Πρόσ 1.** Έστω $f: X \to [0, M]$ μετρήσιμη. Τότε $\exists$ ακολουθία $(s_n)$ απλών: $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X$

**Πρόσ 2.** Έστω $f: X \to [0, +\infty]$ μετρ. τότε $\exists$ αύξουσα ακολουθία $(s_n)$ απλών: $s_n \to f$ κατά σημείο.

**Ιδέα** για την Πρόσ 1: Έστω $M = 1$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Σπάω το $[0,1]$ σε $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), \dots, \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right]$.

$$\underset{0}{[}\quad )[\quad )[\quad )[\quad \underset{1}{]}$$

ορίζω $B_k = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right) \in \mathcal{A}$

$B_n = f^{-1}\left(\left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right]\right)$ αφού $f$ μετρ.

Εκ κατασκευής, αν $s, t \in B_k$

$|f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{2^n}$

Ορίζω $h_k = \frac{k-1}{2^n}$

Θέτω

$\forall x \in X$ $\quad s_n = \sum_{k=1}^{2^n} h_k \chi_{B_k}$ απλή μετρήσιμη

$|f(x) - s_n(x)| \leq ?$ $\exists B_k$ $(k = 1 \dots 2^n)$ ώστε $x \in B_k$ και όμως $\left|\underset{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)}{\underset{\uparrow}{f(x)}} - \frac{k-1}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$

άρα

$\forall x \in X$, $|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$

$\Downarrow$

$\sup\{|f(x) - s_n(x)|\} \leq 1/2^n$

$s_n \to f$ ομοιόμορφα!