7/12/2015

Σύγκλιση ακολουθιών με διάφορους τρόπους...

καλύτερα;

Θεωρ Φραγμ. Σύγκλισης:

Όταν $\mu(X) < +\infty$, τότε $\forall M > 0$ η $g(x) = M$ $(x \in X)$

είναι στην $\mathcal{L}_1$

άρα, αν (f_n) από μετρήσιμες, $f_n \to f$ σ.π.

και

$\exists M : \ |f_n(x)| \leq M \ \forall n$ και σχεδόν $\forall x$

$$\Downarrow$$

$|f_n| \leq g$ σ.π.

άρα από Θεωρ Κυρ Συγκλ

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$$

άρα $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ $\blacksquare$

Μοναδικότητα (σ.π.) του σ.π. ορίου:

$$f_n \to f \quad \sigma A \quad (1)$$

και

$$f_n \to g \quad \sigma A \quad (2)$$

$(1) \Rightarrow \exists N_1 \in \mathcal{A} : \mu(N_1) = 0 : \forall x \notin N_1 \quad f_n(x) \to f(x)$

$(2) \Rightarrow \exists N_2 \in \mathcal{A} : \mu(N_2) = 0 : \forall x \notin N_2 : f_n(x) \to g(x)$

άρα, $\forall x \notin N_1 \cup N_2$, $f(x) = \lim f_n(x) = g(x)$

όπου

$\mu(N_1 \cup N_2) \le \mu(N_1) + \mu(N_2) = 0$

άρα $f = g$ μ-σ.π.

$f_n \to f$ σ.π. , $g_n \to g$ σ.π. $\Rightarrow f_n g_n \to fg$ σ.π.

Αποδ

$$|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \le |f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)|\,|g(x)|$$

$\exists N_1 : \mu(N_1) = 0 : \forall x \notin N_1 : f_n(x) \to f(x)$

$\exists N_2$ - — — - - - - $g_n(x) \to g(x)$

άρα, $\forall x \notin N_1 \cup N_2$

$|f_n(x)| \to |f(x)|$ και τα άλλα $\to 0$

άρα $|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \to 0.0 + 0|g(x)| = 0$ ∎

Όμως:

αν σύγκλιση κατά μέσο $\int |f_n - f|\,d\mu \to 0$ και $\int |g_n - g|\,d\mu$

$$\int |f_n g_n - fg|\,d\mu \le \underbrace{\int |f_n|\,|g_n - g|\,d\mu}_{\downarrow ?\ 0} + \underbrace{\int |f_n - f|\,|g|\,d\mu}_{\downarrow ?\ 0}$$

(δες πιο κάτω)

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΣΟ:

Γράφω για συναρτήσεις (και μόνο):

όταν f μετρήσιμη:
$$\|f\|_1 = \int |f|\, d\mu \in [0,+\infty] \quad (\text{δεν είναι νόρμα})$$

(f_n) συγκλίνει κατά μέσο (in the mean) στην f

όταν $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$

(όταν $\mu(X)=1$, τότε $f_n \to f$ κατά μέσο σημαίνει
$\mathbb{E}(|f_n - f|) \longrightarrow 0$)

Μοναδικότητα (σ.π.) του ορίου:

$f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέσο

$$0 \le \int |f-g|\, d\mu = \int |(f-f_n) + (f_n - g)|\, d\mu$$

$$\le \int (|f-f_n| + |f_n - g|)\, d\mu$$

$$\overset{\text{προσθ}}{=} \underbrace{\int |f-f_n|\, d\mu}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\int |f_n - g|\, d\mu}_{\downarrow\, 0}$$

όπως η $|f-g| \geq 0$ έχει $\int |f-g|\, d\mu = 0$ άρα

$|f-g| = 0$ μ-σ.π.

οπότε $f = g$ μ-σ.π. $\blacksquare$

Πρτ: $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέσο

τότε $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $af_n + bg_n \longrightarrow af + bg$ κ μέσο

απόδ $\int |af_n + bg_n - (af + bg)|\, d\mu$

$$\le \int (|a||f_n - f| + |b||g_n - g|)\, d\mu$$

$$= \underbrace{|a| \int |f_n - f|\, d\mu}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{|b| \int |g_n - g|\, d\mu}_{\downarrow\, 0} \quad \text{οκ}$$

σ.π. $\not\Rightarrow$ κατά μέσο :

$([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \lambda)$:

$g_n = n\chi_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})}$: $g_n(x) \to 0 \quad \forall x\in[0,1]$

άρα

$g_n \to 0$ σχεδόν παντού

$\quad\ \ \equiv g$

όμως $\int |g_n - g|\, dx = \int |g_n|\, d\lambda = \mu((\frac{1}{n},\frac{2}{n}))\cdot n$

$= 1 \quad \forall n$

$g_n \not\to 0$ κατά μέσο

∃ ακολουθία (f_n) τ.ω. $f_n \to 0$ κατά μέσο

αλλά όχι σ.π.

(Αποδείξαμε όμως, ∃ (f_{k_n}) υπακ. της (f_n) να $f_{k_n} \to 0$ σ.π.)

παράδ. $f_1 = \chi_{(0,1)}$

$f_2 = \chi_{(0,\frac{1}{2})}$, $f_3 = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$

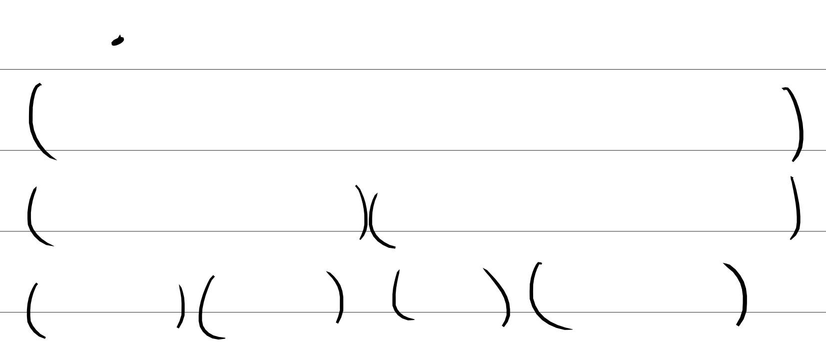
$f_4 = \chi_{(0,\frac{1}{4})}$, $f_5 = \chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$, ---

$f_8 = \chi_{(0,\frac{1}{8})}$ - - —

$\vdots$

$\int |f_n|\, d\mu = \mu(\Delta_n) \to 0$

$f_n \to 0$ κατά μέσο



$\forall x\in(0,1)$ ∃ άπειρα n ώστε $f_n(x) = 1$

και ∃ άπειρα n ώστε $f_n(x) = 0$

$\Rightarrow (f_n(x))$ δεν συγκλίνει όταν $x\in(0,1)$

Παρ. (για όσους ενδιαφέρονται για την τοπολογία...)

Έστω ότι $\exists$ τοπ. τ στο χώρο $\mathbb{R}^{[0,1]}$

ώστε $f_n \xrightarrow{\tau} f \iff$ σχεδόν $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \to f(x)$

Ισχ. αν (f_n) συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, (f_{k_n}) \text{ υπακ. της } (f_n) \\ \exists\, (f_{k_{j_n}}) \text{ υπακ. της } (f_{k_n}) \\ \text{ώστε } f_{k_{j_n}} \xrightarrow{\tau} 0 \end{array}\right\} (*)$$

τότε: $f_n \xrightarrow{\tau} 0$ (απλή άσκηση τοπολογίας)

Η ακολουθία του παραδ. <u>έχει</u> την ιδιότητα $(*)$:

Πράγματι, $\forall$ υπακ. (f_{k_n}) της (f_n) συγκλίνει στο 0 κατά μέσο (αφού $f_n \to 0$ κατά μέσο)

$\Downarrow$ Riesz

έχει μια υπακ. $(f_{k_{j_n}})$ που $\to 0$ σχεδόν παντού

Όμως, $f_n \not\to 0$ σ.π. !

Θ. Riesz : (f_n) αποτελεσματικά μετρήσιμα,
πού είναι

Βασική και μέσο: να βρώ "ορισκή" υ.μ.

Βασική :
$\forall \epsilon>0 \ \exists n_0(\epsilon) : \forall n,m \geq n_0$ ισχύει $\int |f_n - f_m| \, d\mu < \epsilon$
$$\| f_n - f_m \|_1$$

οπότε ισοδύναμα
$\forall k \in \mathbb{N}, \ \exists n_k \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq n_k$ ισχύει $\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{2^k}$

και μπορώ $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
το κάνω για να φτιάξω απολύτως συγκλίνουσα σειρά

οπότε $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1}_{\text{γράφω: } g_k} < \frac{1}{2^k}$

έχω $\|g_{k+1} - g_k\|_1 < 1/2^k \ \forall k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_1 < +\infty$

ορίζω $g := \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} |g_{k+1} - g_k|$

είναι ≥ 0 μετρήσιμη συνάρτηση

έχω
$$\int g \, d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| \right) d\mu \overset{B-L}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int |g_{k+1} - g_k| \, d\mu < +\infty \ !!$$

έδειξα ότι $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, ειδικότερα, $g(x) < +\infty$ σχεδόν παντού
δηλ. $\exists A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0 : \forall x \notin A, \ g(x) < +\infty$

δηλ. $\forall x \notin A \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < +\infty$

άρα η σειρά $\sum (g_{k+1}(x) - g_k(x))$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

Μπορώ να ορίσω, $\forall x \notin A$,
$$f(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \quad !!$$

και για $x \in A$ θέτω $f(x) = 0$
οπότε η f είναι μετρήσιμη διότι ...

$x \notin A$: $f(x) = g_1(x) + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x))}_{= (g_n(x) - g_1(x))}$
$= g_1(x) + (g_2(x) - g_1(x)) + (g_3(x) - g_2(x)) + \dots$

$= \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x)$

Ήδη βρήκα μια υπακ. (f_{n_k}) της (f_n) και μια f μετρήσιμη ώστε $f_{n_k} \to f$ μ-σ.π.

Ισχυρίζομαι, $f_{n_k} \to f$ κατά μέσο

$$\int |f_{n_k} - f| \, d\mu \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$\int |g_k - f| \, d\mu \to 0$$

$$|g_n - f| = |(f - g_1) - (g_n - g_1)|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1} - g_k) - \sum_{k=1}^{n-1} (g_{k+1} - g_k) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n}^{\infty} (g_{k+1} - g_k) \right|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$$

$$\Downarrow \int$$

$$\int |g_n - f| \, d\mu \leq \int \sum_{k=n}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| \, d\mu \overset{BL}{=} \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\int |g_{k+1} - g_k| \, d\mu}_{< 1/2^k}$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}$$

Άρα, $\|g_n - f\|_1 \to 0$ δηλ. $\|f_{n_k} - f\|_1 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Παρόλο που $\| \ \|_1$ δεν είναι νόρμα, έπεται ότι $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

<u>Απόδ.</u> (f_n) βασική $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon/2$

(f_{n_k} συγκ. στην f)

" $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 : \|f_{n_k} - f\|_1 < \varepsilon/2$

Τώρα να διαλέξω k_0 τ.ω. $n_{k_0} \geq n_0$

(μπορώ διότι έχω επιλέξει $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

οπότε $n_k \nearrow +\infty$)

Τότε $\forall \ n \geq n_0$ έχω

$$\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f_{n_{k_0}}\|_1 + \|f_{n_{k_0}} - f\|_1$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \quad \underline{\text{ok}}$$

<u>Διότι</u>

$$\int |f - g| \, d\mu \leq \int |f - h| \, d\mu + \int |h - g| \, d\mu$$

αφού ισχύει από

προσθετικότητα + μονοτονία του $\int$

$f_n \to f$ κατά μέσο και $g_n \to g$ κατά μέσο

$\not\Downarrow$ $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο

Παράδ. $f_n = g_n = \sqrt{n}\,\chi_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})}$ ισχ. $f_n \to 0$ κατά μέσο

$g_n \to 0$ ''

$$\int_0^2 |f_n - 0|\,d\lambda = \sqrt{n}\,\lambda\left(\left(\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0$$

$$\int |f_n g_n - 0|\,d\lambda = \int n\,\chi_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})}\,d\lambda = n\frac{1}{n} \not\to 0$$

(Παρατ.: $f_n \to f$ σ.π. και $g_n \to g$ σ.π.

$\Downarrow$

$f_n g_n \to fg$ σ.π.)

Αν όμως, $f_n \to f$ κατά μέσο, $g_n \to g$ κατά μέσο και επιπλέον $\exists M$: $|f_n| \le M$ σ.π.

$|g_n| \le M$ '' $\forall n$

τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο

Απόδ. $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \le |f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)|\,|g(x)|$

όμως, $|f_n| \le M$ σ.π., άρα $|f| \le M$ σ.π. (*). οπότε:

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \le M\,|g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)|\,M$$

σχεδόν $\forall x$

$\Downarrow$

$$\int |f_n g_n - fg|\,d\mu \le M\underbrace{\int |g_n - g|\,d\mu}_{\downarrow\, 0} + M\underbrace{\int |f_n - f|\,d\mu}_{\downarrow\, 0}.$$

(*) Αν $|f_n| \le M$ σ.π. και $f_n \to f$ κατά μέσο

τότε: $|f| \le M$ σχεδόν παντού

Απόδ. Από Riesz,

$\exists$ υπακ. (f_{k_n}) της (f_n)

ώστε $f_{k_n} \to f$ σ.π.

αλλά $\forall$ $|f_{k_n}| \le M$ σ.π. $\forall n$, άρα $|f| \le M$ σ.π.

Συμφωνώ όλοι ότι αν $\exists M : |g_n| \le M$ σπ

και $g_n \to g$ σπ τότε $|g| \le M$ σπ.

Παρόλα αυτά, ας προσπαθήσουμε να το δείξουμε:

$|g_n| \le M$ σπ. $\iff$ $\exists N_n \in \mathcal{A}$, $\mu(N_n) = 0$
ώστε $\forall x \notin N_n$ ισχύει
$|g_n(x)| \le M$

Τώρα θέτω $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ οπότε $N \in \mathcal{A}$ και $\mu(N) = 0$

και: $\forall x \notin N$ τότε $\forall n$, $x \notin N_n$, άρα

$$\forall n, \ |g_n(x)| \le M$$

Τώρα, $g_n \to g$ μ-σπ

σημαίνει $\exists N' \in \mathcal{A}$, $\mu(N') = 0$ τ.ω. $\forall x \notin N'$
ισχύει ότι $g_n(x) \to g(x)$

Θεωρώ τώρα $K = N \cup N' \in \mathcal{A}$ και $\mu(K) = 0$
και $\forall x \notin K$ έχω (i) όλα τα $|g_n(x)| \le M$
(ii) $g_n(x) \to g(x)$

$$\Downarrow$$

$$|g(x)| = \lim_n |g_n(x)| \le M.$$

OK