

1. (α) Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, τα $\sup$, $\inf$, $\max$ και $\min$ των συνόλων

$$A = \{3^{-n} + (-1)^m : n, m \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, 3 \leq x^2 + 1 \leq 5\}.$$

- (β) Σωστό ή λάθος με αιτιολόγηση: Αν τα A, B είναι μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $a < b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$, τότε $\sup A < \inf B$.

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

3. Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{3^n}{n!}, \quad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}, \quad \gamma_n = \cos(n\pi)(\sqrt[n]{3} - 2)$$

4. Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x^2, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

5. Να αποδειχθεί ότι αν μια ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε συγκλίνει.

6. Αν οι συναρτήσεις $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και έχουν την ίδια μέγιστη τιμή, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ με $f(\xi) = g(\xi)$.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Τα 6 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και έχουν συνολική αξία 12 μονάδες.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

A.M.:

Καλή επιτυχία