

Απειροστικός Λογισμός 1

Παρασκευή 22 Μαρτίου 2024

Ωρα: 18:30–20:30

Θέμα 1.

(α) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και άνω φραγμένα. Δείξτε ότι

$$\sup(A \cup B) = \max \{ \sup(A), \sup(B) \}.$$

(β) Βρείτε το supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο (αν υπάρχουν) των συνόλων

$$A = \left\{ \frac{1}{n 3^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad B = \{ q \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq q \leq 7 \}.$$

Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Θέμα 2.

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$(i) a_n = \frac{4^n}{n!}, \quad (ii) b_n = \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{n}},$$

$$(iii) c_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n, \quad (iv) d_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{[n^{4/3}]}{n + [n^{4/3}]}.$$

Θέμα 3.

Δείξτε ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 4.

(α) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$ αν $x \in \mathbb{Q}$, και $f(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

(β) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συναρτήση. Θέτουμε $A = \{x \in [0, 1] : f(x) = 1\}$. Δείξτε ότι αν το σύνολο A είναι μη κενό, τότε $\inf(A) \in A$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!