

**Απειροστικός Λογισμός Ι – Πρόδος**  
25 Νοεμβρίου 2023

**Όνοματεπώνυμο:** .....

**Αριθμός Μητρώου:** .....

**Θέμα 1.** Έστω  $A$  μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .

(α) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία  $(a_n)$  στοιχείων του  $A$  η οποία συγκλίνει στο supremum του  $A$ .

(β) Δείξτε ότι αν το supremum του  $A$  δεν ανήκει στο  $A$ , τότε υπάρχει γνησιώς αύξουσα ακολουθία  $(a_n)$  στοιχείων του  $A$  η οποία συγκλίνει στο supremum του  $A$ .

**Θέμα 2.** Να βρεθούν τα  $\sup$ ,  $\inf$ ,  $\max$  και  $\min$  (αν αυτά υπάρχουν) των συνόλων

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{2^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}.$$

**Θέμα 2.** Έστω  $(a_n)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε  $a_n \rightarrow 0$ . Δείξτε ότι

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow 0.$$

**Θέμα 4.** Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{4^n n!}{n^n}, \quad \beta_n = \sin(n) \left( \sqrt[n]{n} - \frac{1}{5} \right)^n, \quad \gamma_n = \left( 1 + \frac{2}{5n} \right)^n,$$

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+n} \right).$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**