Υποδείξεις για τα θέματα 02/09/13 / ⊛ Βιβλίο, Σημειώσεις.

Θ1 (α) Σ: α άνω φράγμα του A, $\sup A =$ ελάχιστο άνω φράγμα του $A \Rightarrow \sup A \leq \alpha$
$\alpha \in A$, $\sup A$ άνω φράγμα του $A \Rightarrow \alpha \leq \sup A$ $\Big\} \Rightarrow \alpha = \sup A$

(β) Σ: $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \dots$

• $\alpha_1 \in A$, α_1 κάτω φράγμα $\overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \alpha_1 = \min A$.

• Έστω ότι $\alpha_{n_0} = \max A$. Τότε $\alpha_n \leq \alpha_{n_0}$, $n \in \mathbb{N}$. Άτοπο διότι $\alpha_{n_0} < \alpha_{n_0+1}$

Άρα δεν υπάρχει το $\max A$.

Θ2 (α) ⊛ (Θεωρία)

(β) $b_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n \underset{(\text{Υποθ})}{\geq} \alpha_n - \alpha_{n-1} = b_{n-1}$, $|b_n| \leq |\alpha_{n+1}| + |\alpha_n| \leq 2M$ όπου M φράγμα της $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Η $(b_n)_n$ είναι αύξουσα + φραγμένη, άρα $\exists \lim_n b_n = b \in \mathbb{R}$.

• Αν $b > 0 \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} b_n > 0$ για $n \geq n_0 \Rightarrow (\alpha_n)_n$ τελικά αύξουσα + φραγμένη, άρα $\exists \lim_n \alpha_n = \lim_n \alpha_{n+1} = x \in \mathbb{R}$. Τότε $b = 0$. Άτοπο.

• Ανάλογα $b < 0$ οδηγεί σε άτοπο.

Τελικά $b = 0$, $\lim_n (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0$.

Θ3 • $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n]{} \ln e = 1 > 0 \Rightarrow n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n]{} (\infty)\cdot 1 = +\infty$.

• $\frac{\eta\mu x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, από Α.Μ., $\frac{\eta\mu\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)}{\frac{1}{(n+1)!}} \xrightarrow[n]{} 1 \Rightarrow n!\,\eta\mu\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left[(n+1)!\,\eta\mu \frac{1}{(n+1)!}\right] \xrightarrow[n]{} 0\cdot 1 = 0$

• $\sqrt[n]{|\gamma_n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow[n]{} 0 < 1 \Rightarrow \gamma_n \to 0$ (Κριτήριο Ρίζας)

• $\frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|} = \frac{(n+1)^5}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^5} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \xrightarrow[n]{} \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \delta_n \to 0$ (Κριτήριο Λόγου)

Θ4 (α) • $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \tau o\xi\varepsilon\varphi x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$. Άρα $\exists\ \delta > 0$ και $M_1 > 0$ (πχ $M_1 = 2$): $f(x) \leq M_1$ για $x \in [\delta, +\infty)$ (1)

• Η $f : [0,\delta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κλειστό + φραγμένο διάστημα $\Rightarrow \exists M_2 > 0$: $f(x) \leq M_2$ για $x \in [0,\delta]$ (2)

Από (1)+(2) $f(x) \leq M = \max\{M_1, M_2\}$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$ έχουμε $0 \leq f(x) \leq M$, $x \in [0,+\infty)$.

δηλ. η f είναι φραγμένη.

(β) $5^n \xrightarrow[n]{} +\infty \overset{A.M.}{\Rightarrow} \alpha_n \xrightarrow[n]{} 1$.

Σημείωση: Εάν $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1 \not\Rightarrow g$ φραγμένη (γενικά)

Εάν ίσχυε: για $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $x \in (0,\infty)$ {συνεχής} θα είχαμε $g\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + n \leq M$ δηλ. το $\mathbb{N}$ φραγμένο.

Θ5 16x1: Η f <u>α</u>συνεχής για $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,+1,-1\}$ (με αρχή μεταφοράς)
16x2: Η f συνεχής για $x_0 \in \{0,+1,-1\}$.
Ορίζουμε $g(x)=x$, $h(x)=x^3$ <u>$x \in \mathbb{R}$</u> και συνεχίζουμε όπως (*) με <u>ε-δ</u>.
<u>16x1'</u> Η f δεν έχει παράγωγο για $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,+1,-1\}$ (Παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ συνεχής)
<u>16x2'</u> Η f δεν έχει παράγωγο για $x_0 \in \{0,+1,-1\}$.
$x_0=0$. Ορίζουμε $\begin{cases} g_0(x)=\frac{x-0}{x-0}=1 & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \ \lim\limits_{x\to 0} g_0(x)=1 \ (1) \\ h_0(x)=\frac{x^3-0}{x-0}=x^2 & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \ \lim\limits_{x\to 0} h_0(x)=0. \ (2) \end{cases}$
Έστω $q_n \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ με $q_n \to 0$. $\lim\limits_n \frac{f(q_n)-f(0)}{q_n-0} = \lim\limits_n g_0(q_n) \underset{AM}{\overset{(1)}{=}} 1$
Έστω $\alpha_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ με $\alpha_n \to 0$ $\lim\limits_n \frac{f(\alpha_n)-f(0)}{\alpha_n-0} = \lim\limits_n h_0(\alpha_n) \underset{AM}{\overset{(2)}{=}} 0$ $\Big\}$ $1 \neq 0$.
Άρα (AM) <u>δεν</u> υπάρχει το όριο της $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ για $x \to 0$, δηλ. η f <u>δεν</u> έχει παρ. στο $x_0=0$
Ανάλογα για $x_1=1$, $x_{-1}=-1$ (περιττή συνάρτηση αρκεί για $x_1=1$.) / (Δεν υπάρχει η δεξιά, ούτε η αριστερή παράγωγος για $x_0 \in \mathbb{R}$)

Θ6 (α) Έστω $f''(\xi)>0$. (*) (θεωρία)
$\xi \in (\alpha,\beta)$, ξ σ. μεγίστου $\overset{\text{Fermat}}{\Rightarrow}$ $f'(\xi)=0$. $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} = f''(\xi)>0$
Άρα $\exists\ \delta>0$: $\frac{f'(x)}{x-\xi}>0$ για $x \in [\xi-\delta,\xi+\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$ $(\xi \in (\alpha,\beta))$
δηλ. $\Big\langle$ $x \in [\xi-\delta,\xi) \Rightarrow f'(x)<0$. Άρα η f <u>γνήσια</u> φθίνουσα στο $[\xi-\delta,\xi]$
$x \in (\xi,\xi+\delta] \Rightarrow f'(x)>0$. Άρα η f <u>γνήσια</u> αύξουσα στο $(\xi,\xi+\delta]$
Άρα το ξ είναι <u>γνήσιο</u> σ. ελαχίστου της f. Άτοπο (ξ = σ. μεγίστου).
Άρα $f''(\xi) \leq 0$.

<u>Σημείωση</u> (*) (αντιπαράδειγμα) $\Big\{$ Εάν το ξ σ. μεγίστου $\not\Rightarrow \exists\ \delta>0$: f αύξουσα στο $[\xi-\delta,\delta)$, f φθίνουσα στο $[\xi,\xi+\delta]$
Επίσης $\not\Rightarrow \exists\ \delta>0$: f <u>κοίλη</u> στο $[\xi-\delta,\xi+\delta]$

(β) Έστω ότι $\exists\ x_1' \in [\alpha,\beta]$: $g(x_1')>0$. Απο ΘΜΕΤ $\exists\ x_1 \in [\alpha,\beta]$:
$g(x_1)=\max g([\alpha,\beta]) \geq g(x_1')>0$. Επειδή $g(\alpha)=g(\beta)=0$ το $x_1 \in (\alpha,\beta)$
$\overset{\text{Fermat}}{\Longrightarrow}$ $g'(x_1)=0$.
Υπόθεση : $g''(x_1)+g'(x_1)g(x_1)=g(x_1) \Rightarrow g''(x_1)=g(x_1)>0$
<u>δηλ.</u> το x_1 = σ. μεγίστου με $g''(x_1)>0$. Άτοπο από το (α). Άρα $g \leq 0$
<u>Ομοίως</u> : $g \geq 0$. Τελικά $g(x)=0$, $x \in [\alpha,\beta]$.

Κάθε άλλη λύση, μαθηματικά τεκμηριωμένη, είναι <u>δεκτή</u>.