Απειροστικός Λογισμός Ι (2009-10)

Ενδιάμεση Εξέταση – 12 Δεκεμβρίου 2009

1. (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$A = \left\{1 + (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n} : \ n = 1, 2, \dots\right\}.$$

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(β) Έστω B μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του B ώστε $x_n \to \sup B$.

(γ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in [a, b] : \ f(x) = 0\}$$

είναι μη κενό. Δείξτε ότι $\sup B \in B$.

(1+1+1μ)

2. (α) Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}, \quad \beta_n = \frac{6^n}{n!}, \quad \gamma_n = \frac{n\,\text{συν}(n!)}{n^2 + 1}.$$

(β) Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = \frac{3}{2}$ και

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Αποδείξτε ότι συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

(2+1μ)

3. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, τότε $a_n \to a$.

(β) Έστω (b_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $b_n \to +\infty$. Τότε, η (b_n) είναι κάτω φραγμένη.

(γ) Έστω (γ_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\gamma_n \to 0$. Τότε, $\gamma_n^n \to 0$.

(δ) Έστω (δ_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\delta_n \to 1$. Τότε, $\delta_n^n \to 1$.

(3μ)

4. (α) Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας, δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{1 + x}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

(β) Αποδείξτε πλήρως ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$ είναι συνεχής.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\right\}$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

(1+1+1μ)

5. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $a, x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $a_n \to a$ και ότι ο x είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε ότι $x = a$.

(1μ)

Καλή επιτυχία!

Υποδείξεις

1. (α) Γράψτε το A στη μορφή

$$A = \left\{ \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 2 - \frac{1}{2k-1} : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Για κάθε $a \in A$ ισχύει $0 < a < 2$. Αν $y > 0$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2k} < y$. Αν $y < 2$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $2 - \frac{1}{2k-1} > y$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\inf A = 0$ και $\sup A = 2$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι το A δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\sup B - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του B, άρα υπάρχει $x_n \in B$ ώστε $\sup B - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup B$. Η ακολουθία (x_n) έχει όρους στοιχεία του B και από το κριτήριο παρεμβολής συγκλίνει στο $\sup B$.

(γ) Αφού $B \subseteq [a, b]$, ισχύει $\sup B \in [a, b]$ (εξηγήστε γιατί). Από το ερώτημα (β) υπάρχει ακολουθία (x_n) στο B ώστε $x_n \to \sup B$. Έχουμε $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διότι $x_n \in B$. Η f είναι συνεχής στο $\sup B$, άρα $f(\sup B) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Συνεπώς, $\sup B \in B$.

2. (α) Για την (α_n) γράφουμε

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}} = \frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \\
&\to \frac{2}{1+1} = 1.
\end{aligned}$$

Για την (β_n) εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{6^{n+1} n!}{6^n (n+1)!} = \frac{6}{n+1} \to 0 < 1,$$

άρα $\beta_n \to 0$.

Για την (γ_n) παρατηρούμε ότι

$$|\gamma_n| = \frac{n\,|\text{συν}(n!)|}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

και $\frac{n}{n^2+1} \to 0$, άρα $\gamma_n \to 0$.

(β) Δείξτε επαγωγικά ότι η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον 2. Έπεται ότι συγκλίνει σε κάποιον $x \in \mathbb{R}$. Ο x ικανοποιεί την εξίσωση $x = \sqrt{3x-2}$, άρα $x = 1$ ή $x = 2$. Αφού $x \geq a_1 = \frac{3}{2} > 1$, συμπεραίνουμε ότι $x = 2$.

3. (α) *Λάθος*. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει στον $a = 1$. Όμως, για κάθε $\varepsilon > 0$ στο $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ περιέχονται άπειροι όροι της (όλοι οι όροι a_{2k}, $k \in \mathbb{N}$).

(β) *Σωστό*. Αφού $b_n \to +\infty$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $b_n > 10$ για κάθε $n > m$. Τότε, ο $s = \min\{10, a_1, \ldots, a_m\}$ είναι κάτω φράγμα της (b_n) (εξηγήστε γιατί).

(γ) *Σωστό*. Έχουμε $\sqrt[n]{\gamma_n^n} = \gamma_n \to 0 < 1$. Από το κριτήριο της ρίζας, $\gamma_n^n \to 0$.

(δ) *Λάθος*. Αν $\delta_n = 1 + \frac{1}{n}$, τότε $\delta_n \to 1$ αλλά $\delta_n^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$.

4. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $0 < \delta < \min\{\varepsilon, 1\}$. Αν $|x-1| < \delta$ τότε $x \in (0, \infty)$ και

$$|f(x) - f(1)| = |\sqrt{1+x} - \sqrt{2}| = \frac{|x-1|}{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}} < |x-1| < \delta < \varepsilon.$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(β) Κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathbb{N}$: ισχύει $\left(m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \{m\}$. Άρα κάθε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε $m \in \mathbb{N}$ (θυμηθείτε την απόδειξη από τη θεωρία).

(γ) Η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ αλλά $f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

5. Υποθέτουμε ότι $a \neq x$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \emptyset$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ για κάθε $n > m$.

Αν λοιπόν $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ τότε $n \leq m$. Δηλαδή, ο a_n είναι κάποιος από τους $a_1, \ldots, a_m$. Αυτό σημαίνει ότι στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ περιέχονται πεπερασμένοι όροι της ακολουθίας, δηλαδή πεπερασμένα στοιχεία του A. Αυτό είναι άτοπο αφού ο x είναι σημείο συσσώρευσης του A.