Μιχάλης Παπαδημητράκης

Ανάλυση

Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στη Μαρία

και

στα παιδιά μας, Μυρτώ-Ασπασία και Δημήτρη.

Προκαταρκτικά.

Το αντικείμενο αυτού του βιβλίου είναι οι **πραγματικοί αριθμοί** και οι **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**. Αφού αναφερθούν οι βασικές ιδιότητες των (πραγματικών) αριθμών, δηλαδή η **Ιδιότητα Supremum** και τα πορίσματά της, εισάγονται οι έννοιες του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης, η έννοια της συνεχούς συνάρτησης και οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Ακολουθεί η μελέτη των σειρών αριθμών, των ακολουθιών συναρτήσεων, των σειρών συναρτήσεων και των γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Ανάμεσα στις σειρές συναρτήσεων και στα γενικευμένα ολοκληρώματα περιλαμβάνεται μια σύντομη μελέτη των μετρικών χώρων. Το βιβλίο τελειώνει με το ζήτημα της **αξιωματικής θεμελίωσης** των πραγματικών αριθμών.

Το επίπεδο του βιβλίου *δεν είναι στοιχειώδες*, διότι ασχολείται με τη βαθύτερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, την Ιδιότητα Supremum, και αποδεικνύει όλα τα βασικά αποτελέσματα που στηρίζονται στην ιδιότητα αυτή. Για παράδειγμα, αποδεικνύονται η ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών, το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass για ακολουθίες, τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις, θεμελιώνεται η έννοια του ολοκληρώματος και αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων.

Το επίπεδο του βιβλίου *δεν είναι ούτε εύκολο*: είναι αρκετά πυκνογραμμένο και απαιτεί συγκέντρωση και επιμονή. Οι αναγνώστες (κυρίως φοιτητές) πρέπει να δώσουν μεγάλη έμφαση στην ακριβή διατύπωση των εννοιών, στην κατανόηση και, κυρίως, στην αναπαραγωγή των αποδείξεων των κυριότερων αποτελεσμάτων και, οπωσδήποτε, στη μαθηματικά αυστηρή επίλυση θεωρητικών ασκήσεων.

Θα ήθελα να κάνω κάποια σχόλια για το περιεχόμενο.

1. Τονίζεται η έννοια της περιοχής σε σχέση με την έννοια του ορίου ακολουθίας. Επίσης, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις εκφράσεις “από κάποιον n και πέρα” και “για άπειρους n”. Αντιστοίχως, δίνεται έμφαση στις εκφράσεις “κοντά στο ξ” και “σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ” σε σχέση με την έννοια του ορίου συνάρτησης.

2. Οι *αναλυτικοί ορισμοί* των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, μέσω δυναμοσειρών αλλά και μέσω ολοκληρωμάτων, παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 10 και αποδεικνύονται οι γνωστές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται, όμως, ελεύθερα στα προηγούμενα κεφάλαια ως παραδείγματα.

3. Το ολοκλήρωμα Riemann ορίζεται, κατ’ αρχάς, μέσω των αθροισμάτων Darboux και βάσει αυτού του ορισμού αποδεικνύονται οι διάφορες ιδιότητές του. Κατόπιν, παρουσιάζεται και ο ορισμός μέσω των αθροισμάτων Riemann και αποδεικνύεται η ισοδυναμία των δυο ορισμών. Παρά το ότι τα αθροίσματα Riemann συνδέονται πιο άμεσα και φυσιολογικά με τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων, προτάσσω τα αθροίσματα Darboux διότι μου φαίνεται ότι οι αποδείξεις των περισσότερων ιδιοτήτων του ολοκληρώματος είναι λίγο απλούστερες αν βασιστούν στα αθροίσματα Darboux απ’ ότι αν βασιστούν στα αθροίσματα Riemann.

4. Η μελέτη των μετρικών χώρων είναι πολύ σύντομη. Θεωρήθηκε απαραίτητη για δυο λόγους. Κατ’ αρχάς για να παρουσιαστεί η “φυσιολογική” γενίκευση των δυο εννοιών “απόστασης” που εμφανίζονται στα προηγούμενα κεφάλαια: της Ευκλείδειας απόστασης ανάμεσα στα σημεία του $\mathbb{R}$ και της ομοιόμορφης απόστασης ανάμεσα σε συναρτήσεις (στα κεφάλαια για ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων). Η έμφαση δίνεται ακριβώς στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^d$ και στους χώρους συναρτήσεων με την ομοιόμορφη μετρική. Ο δεύτερος λόγος μελέτης των μετρικών χώρων και, ειδικώτερα, των Ευκλείδειων χώρων είναι ότι στα γενικευμένα ολοκληρώματα *με παράμετρο* εμφανίζεται η έννοια της (ομοιόμορφης) συνέχειας συναρτήσεων δυο πραγματικών μεταβλητών. Τέλος, ανάμεσα στα θέματα μετρικών χώρων υπάρχει και μια μικρή ενότητα για την έννοια της συνεκτικότητας η οποία χρειάζεται στα μαθήματα Μιγαδικής Ανάλυσης.

5. Είναι βέβαιο ότι ο χρόνος δεν επαρκεί για να διδαχτούν όλα τα θέματα τα οποία περιέχονται σ’ αυτό το βιβλίο όπως είναι βέβαιο ότι πρέπει να γίνει προσεκτική *επιλογή* ποιών, από όσα διδα-

χτούν, θα γίνουν οι αποδείξεις στον πίνακα. Μάλιστα, μερικά τέτοια θέματα (η διαδοχική άθροιση διπλών σειρών, το θεώρημα του Riemann για αναδιατάξεις σειρών, το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου για τα γενικευμένα ολοκληρώματα, η αξιωματική θεμελίωση κλπ) τα συμπεριέλαβα μόνο και μόνο για να τα δει και να τα διαβάσει όποιος αναγνώστης δείξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

6. Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται λεπτομερώς η *αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών θεωρώντας δεδομένους τους φυσικούς και τα Αξιώματα του Peano*. Αυτή είναι, κατά τη γνώμη μου, η φυσιολογική μέθοδος. Η παρουσίαση βασίζεται στο βιβλίο Foundations of Analysis του E. Landau με πολλές δικές μου παρεμβάσεις και προσαρμογές. Η μετάβαση από τους (θετικούς) ρητούς στους (θετικούς) πραγματικούς γίνεται με τη μέθοδο των *τομών του Dedekind*. Παρουσιάζονται, όμως, και οι μέθοδοι των ακολουθιών Cauchy και των εγκιβωτισμένων διαστημάτων, αλλά συνοπτικά και χωρίς αποδείξεις.

7. Για αρκετά θέματα παρουσιάζονται αρκετές αποδείξεις είτε στο κυρίως κείμενο της θεωρίας είτε υπο μορφή ασκήσεων. Για παράδειγμα, για το κριτήριο του Cauchy για σύγκλιση ακολουθιών υπάρχουν τέσσερις αποδείξεις.

8. Υπάρχουν μερικά θέματα, τα οποία δύσκολα βρίσκει κανείς σε βιβλία και, μάλιστα, τέτοιου επιπέδου. Μερικά από αυτά είναι: η ακριβής αιτιολόγηση του ότι δεν ορίζονται δυνάμεις αρνητικών αριθμών με μη-ακέραιους εκθέτες, η σύνδεση ανάμεσα στις έννοιες της μέσης τιμής συνάρτησης και της μέσης τιμής αριθμών και μια διεξοδική ανάπτυξη της ολοκλήρωσης ρητών παραστάσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Υπάρχουν, επίσης, διάφορα περισσότερο προχωρημένα θέματα στη μορφή ασκήσεων.

9. Τέλος, στο βιβλίο αυτό υπάρχουν εύκολες, μέτριες και δύσκολες ασκήσεις. Όμως, δεν υπάρχουν “εξυπνακίστικες” ασκήσεις (τουλάχιστον, συνειδητά). Δηλαδή, δεν υπάρχουν ασκήσεις τις οποίες σκοτώνεται κανείς για να τις λύσει αλλά που η λύση τους δεν έχει κάτι να προσφέρει πέρα από την “επιβεβαίωση” ενός υψηλού IQ. Προσπάθησα να συμπεριλάβω ασκήσεις οι οποίες λίγο ή πολύ ελέγχουν την κατανόηση των εννοιών και διδάσκουν μεθόδους Ανάλυσης. Τουλάχιστον, όσες από τις ασκήσεις είναι δύσκολες υπάρχουν μόνο διότι πιστεύω ότι έχουν να προσφέρουν κάτι ουσιαστικό.

Τα παρακάτω βιβλία διαμόρφωσαν, άλλο λιγότερο και άλλο περισσότερο, την άποψή μου για τα θέματα αυτού του βιβλίου και κατ’ επέκταση τη μορφή που αυτά πήραν σ’ αυτό το βιβλίο:

Mathematical Analysis, T. Apostol.

Differential and Integral Calculus, R. Courant.

The Theory of Functions of Real Variables, L. Graves.

Foundations of Analysis, E. Landau.

Principles of Mathematical Analysis, W. Rudin.

The Theory of Functions, E. C. Titchmarsh.

Η ευγνωμοσύνη μου στα βιβλία αυτά και στους συγγραφείς τους δεν περιγράφεται με λέξεις. Για παράδειγμα, το βιβλίο του Graves έχει πολύ παλιομοδίτικο και δύσκολο συμβολισμό και μπορεί να θεωρείται πια ξεπερασμένο, αλλά από αυτό έμαθα κάποια λεπτά και πολύ διαφωτιστικά σημεία της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων.

Για να πάρει την παρούσα μορφή του το βιβλίο αυτό έχει γραφτεί, με το χέρι και με τον υπολογιστή, διορθωθεί και ξαναδιορθωθεί άπειρες φορές και συμπυκνώνει εξαιρετικά πολύ κόπο. Επειδή, όμως, είναι σαφές ότι κι αυτή η μορφή απέχει αρκετά από το να είναι βέλτιστη, είναι απείρως ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε επισημάνσεις λαθών αλλά και παρατηρήσεις ως προς το στυλ παρουσίασης ή την επιλογή των θεμάτων.

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης

Σεπτέμβριος 2013.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί.

1.1 Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R}}$.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε $\mathbb{R}$. Τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών τα συμβολίζουμε, αντιστοίχως, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$. Προσέξτε: δεχόμαστε ως σύνολο των φυσικών το $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Δηλαδή, δεν θεωρούμε φυσικό τον ακέραιο 0.

Στο βιβλίο αυτό όταν λέμε "αριθμός" ή "σύνολο" εννοούμε "πραγματικός αριθμός" ή "υποσύνολο του $\mathbb{R}$" εκτός αν υπάρχει διευκρίνηση για κάτι διαφορετικό.[1]

Από τις αλγεβρικές ιδιότητες των αριθμών θα αναφέρουμε μόνο δυο βασικές ταυτότητες και δυο ανισότητες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*
[α] *Για κάθε x, y ισχύει*

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}). \tag{1.1}$$

[β] *Ισχύει*

$$nx^{n-1}(y-x) \leq y^n - x^n \leq ny^{n-1}(y-x) \qquad \text{αν } 0 \leq x \leq y. \tag{1.2}$$

Απόδειξη. [α] Πολλαπλασιάζουμε τις δυο παρενθέσεις και διαγράφουμε όμοιους όρους.
[β] Με την υπόθεση $0 \leq x \leq y$ παρατηρούμε ότι, αν στην δεύτερη παρένθεση στη δεξιά μεριά της (1.1) αντικαταστήσουμε κάθε x με το y, τότε το άθροισμα στην παρένθεση αυξάνεται (με την ευρεία έννοια) και καθένας από τους n όρους της γίνεται y^{n-1} ενώ, αν αντικαταστήσουμε κάθε y με το x, τότε το άθροισμα στην παρένθεση φθίνει (με την ευρεία έννοια) και καθένας από τους n όρους της γίνεται x^{n-1}. $\square$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ BERNOULLI. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει*

$$(a+1)^n \geq na + 1 \qquad \text{αν } a \geq -1.$$

Απόδειξη. [2] Αν $a \geq 0$, θέτουμε $y = a + 1$ και $x = 1$ στην αριστερή ανισότητα (1.2) ενώ, αν $-1 \leq a \leq 0$, θέτουμε $y = 1$ και $x = a + 1$ στην δεξιά ανισότητα (1.2). $\square$

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ NEWTON. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε x, y ισχύει*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

[1] Στο κεφάλαιο 11 θα γίνεται ευρύτερη χρήση του όρου "σύνολο".
[2] Άλλες δυο αποδείξεις της ανισότητας του Bernoulli είναι στην άσκηση 1.1.5 και στο παράδειγμα 5.4.6.

Απόδειξη. [3] Αν αναπτύξουμε το γινόμενο

$$(x+y)^n = (x+y)\cdots(x+y) \qquad (n \ \text{φορές})$$

χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, θα βρούμε ένα άθροισμα όρων καθένας από τους οποίους είναι ένα γινόμενο n όρων το οποίο προκύπτει παίρνοντας από κάθε παρένθεση είτε τον x είτε τον y και πολλαπλασιάζοντάς τους. Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq k \leq n$ σχηματίζουμε το γινόμενο $x^k y^{n-k}$ παίρνοντας τον x από k από τις παρενθέσεις και τον y από τις υπόλοιπες $n-k$ παρενθέσεις. Τώρα, για κάθε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq k \leq n$, το πλήθος των όμοιων όρων $x^k y^{n-k}$ που θα προκύψουν στο συνολικό άθροισμα είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων επιλογής από τις n συνολικές παρενθέσεις εκείνων των k παρενθέσεων που θα μας δώσουν τους k παράγοντες x. Όμως, το πλήθος των τρόπων επιλογής k αντικειμένων από n αντικείμενα ισούται με τον λεγόμενο **διωνυμικό συντελεστή**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq k \leq n$ υπάρχουν $\binom{n}{k}$ όμοιοι όροι $x^k y^{n-k}$. □

Σημειώνουμε, επίσης, ότι η απόλυτη τιμή $|x|$ εκφράζει το *μέγεθος* του x καθώς και την *απόσταση* του x από τον 0. Και, γενικότερα, η $|x-y|$ εκφράζει την *απόσταση*[4] ανάμεσα στους x και y. Όσο μικρότερη είναι η $|x-y|$ τόσο κοντύτερα είναι ο x στον y.

Τέλος, ας θυμηθούμε μερικές βασικές ανισοτικές σχέσεις για την απόλυτη τιμή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2. [α] *Αν $a > 0$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:*

$$|x| \leq a \quad \text{αν και μόνο αν} \quad -a \leq x \leq a.$$

$$|x| < a \quad \text{αν και μόνο αν} \quad -a < x < a.$$

[β] *Για κάθε x, y ισχύει η* **τριγωνική ανισότητα***:*

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε περιπτώσεις σχετικά με το αν οι x και y είναι ≥ 0 ή ≤ 0. Κατά τα άλλα, η απόδειξη είναι στοιχειώδης. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε το* **επεκτεταμένο** $\mathbb{R}$, *δηλαδή το σύνολο*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Κατ' αρχάς, δεχόμαστε ότι το $+\infty$ είναι μεγαλύτερο από κάθε αριθμό, ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από κάθε αριθμό και ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από το $+\infty$. Δηλαδή:

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$$

Ορίζουμε τα αντίθετα

$$-(+\infty) = -\infty\,, \qquad -(-\infty) = +\infty\,.$$

Ορίζουμε τα αθροίσματα

$$(+\infty) + x = +\infty, \qquad x + (+\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

[3] Άλλες δυο αποδείξεις του διωνυμικού τύπου του Newton είναι στην άσκηση 1.1.5 και στο παράδειγμα 5.4.8. Πάντως, η πιο ουσιαστική απόδειξη είναι αυτή εδώ.

[4] Αυτή είναι η λεγόμενη Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία της ευθείας. Η έννοια αυτή επεκτείνεται ως Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία του επιπέδου και ανάμεσα στα σημεία του χώρου και, ακόμη περισσότερο, ανάμεσα στα σημεία του d-διάστατου Ευκλείδειου χώρου. Επίσης, υπάρχει και η έννοια της απόστασης ανάμεσα σε συναρτήσεις την οποία θα δούμε στα κεφάλαια 9 και 10. Όλες αυτές οι έννοιες της απόστασης θα μελετηθούν με ενιαίο τρόπο στη γενικότητά τους στο κεφάλαιο 11 των μετρικών χώρων.

$$(-\infty)+x=-\infty, \qquad x+(-\infty)=-\infty, \qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

Όμως, δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(+\infty)+(-\infty), \qquad (-\infty)+(+\infty)$$

και αυτές οι παραστάσεις χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές αθροίσματος**.
Ορίζουμε τις διαφορές

$$(+\infty)-x=+\infty, \qquad x-(-\infty)=+\infty, \qquad (+\infty)-(-\infty)=+\infty,$$

$$(-\infty)-x=-\infty, \qquad x-(+\infty)=-\infty, \qquad (-\infty)-(+\infty)=-\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(+\infty)-(+\infty), \qquad (-\infty)-(-\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές διαφοράς**.
Ορίζουμε τα γινόμενα

$$(\pm\infty)x=\pm\infty, \quad x(\pm\infty)=\pm\infty \qquad \textit{αν } x>0,$$

$$(\pm\infty)x=\mp\infty, \quad x(\pm\infty)=\mp\infty \qquad \textit{αν } x<0,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty, \qquad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(\pm\infty)0, \qquad 0(\pm\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές γινομένου**.
Ορίζουμε τα αντίστροφα

$$\tfrac{1}{+\infty}=0, \qquad \tfrac{1}{-\infty}=0.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για την παράσταση

$$\tfrac{1}{0}$$

και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή αντιστρόφου**.
Ορίζουμε τους λόγους

$$\tfrac{\pm\infty}{x}=\pm\infty \quad \textit{αν } x>0, \qquad \tfrac{\pm\infty}{x}=\mp\infty \quad \textit{αν } x<0, \qquad \tfrac{x}{\pm\infty}=0.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$\tfrac{x}{0}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{0}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές λόγου**.
Τέλος,[5] *ορίζουμε τις απόλυτες τιμές*

$$|+\infty|=+\infty, \qquad |-\infty|=+\infty.$$

[5]Κάποιοι επιπλέον ανάλογοι ορισμοί σε σχέση με την πράξη της δύναμης υπάρχουν μετά από την πρόταση 1.8, μετά από το παράδειγμα 2.3.28 και μετά από την πρόταση 2.12.

Βάσει της επέκτασης της έννοιας της *ανισότητας* από το $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ αιτιολογείται η χρήση των συμβόλων $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ και $(-\infty,+\infty)$ για τα αντίστοιχα διαστήματα $\{x\,|\,x>a\}$, $\{x\,|\,x\geq a\}$, $\{x\,|\,x<b\}$, $\{x\,|\,x\leq b\}$ και $\mathbb{R}$, δηλαδή για τα λεγόμενα *μη-φραγμένα διαστήματα*. Στο $\overline{\mathbb{R}}$ έχουμε, επιπλέον, και τα διαστήματα $(a,+\infty]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,b)$, $[-\infty,b]$, $[-\infty,+\infty)$, $(-\infty,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$.

Οι επεκτάσεις των αλγεβρικών πράξεων από το $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ δεν είναι αυθαίρετες. Όλοι οι παραπάνω τύποι ανάγονται στην εμπειρική αντίληψή μας για τις έννοιες του "μεγάλου" (θετικού ή αρνητικού) και του "μικρού" (θετικού ή αρνητικού) και για τις μεταξύ τους σχέσεις. Για παράδειγμα, η εμπειρία υπαγορεύει ότι το άθροισμα δυο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων είναι πολύ μεγάλη θετική ποσότητα και αυτό αιτιολογεί το να ορίσουμε ότι $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$. Από την εμπειρία μας, και πάλι, γνωρίζουμε ότι η διαφορά δυο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε *οποιαδήποτε* ενδιάμεση ποσότητα. Αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται συγκεκριμένο αποτέλεσμα για το $(+\infty)-(+\infty)$ και τον χαρακτηρισμό του ως *απροσδιόριστη μορφή*. Επίσης, το γινόμενο μιας πολύ μεγάλης θετικής ποσότητας και μιας πολύ μικρής ποσότητας (θετικής ή αρνητικής) μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε *οποιαδήποτε*, ακόμη και πολύ μικρή, ενδιάμεση ποσότητα. Αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται αποτέλεσμα για το $(+\infty)0$ και τον χαρακτηρισμό του, επίσης, ως *απροσδιόριστη μορφή*.

Σύμβολα όπως το a ή το A δηλώνουν, συνήθως, αριθμούς ή σύνολα αριθμών. Αν, όμως, γράψουμε, για παράδειγμα, $a\in(-3,+\infty]$ θα εννοούμε ότι το a μπορεί να πάρει και την τιμή $+\infty$. Και αν γράψουμε $A\subseteq[-\infty,2]$ θα εννοούμε ότι το σύνολο A μπορεί να περιέχει και το $-\infty$.

Ασκήσεις.

1.1.1. [6] Αν $a\leq x\leq b$ και $a\leq y\leq b$, αποδείξτε ότι $|x-y|\leq b-a$ και διατυπώστε το γεωμετρικό νόημα αυτής της ανισότητας.

1.1.2. Αν $x\leq y<0$ και $z\leq w<0$, αποδείξτε ότι $0<yw\leq xz$.

1.1.3. [α] Έστω $b_1,\dots,b_n>0$. Αν $l\leq\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\leq u$, αποδείξτε ότι $l\leq\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}\leq u$.
[β][7] Έστω $\nu_1,\dots,\nu_n\in\mathbb{N}$. Αν $l\leq y_1,\dots,y_n\leq u$, αποδείξτε ότι $l\leq\frac{\nu_1y_1+\cdots+\nu_ny_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n}\leq u$.
Γενικότερα, έστω $w_1,\dots,w_n>0$ και $w_1+\cdots+w_n=1$. Αν $l\leq y_1,\dots,y_n\leq u$, αποδείξτε ότι $l\leq w_1y_1+\cdots+w_ny_n\leq u$.

1.1.4. Για καθεμιά από τις παρακάτω ανισότητες γράψτε στη μορφή ένωσης διαστημάτων το σύνολο των x για τους οποίους η ανισότητα είναι αληθής: $|x+1|>2$, $|x-1|<|x+1|$, $\frac{x}{x+2}>\frac{x+3}{3x+1}$, $(x-2)^2\geq 4$, $|x^2-7x|>x^2-7x$, $\frac{(x-1)(x+4)}{(x-7)(x+5)}>0$, $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\leq 0$.
Για καθένα από τα επόμενα σύνολα βρείτε *μία* ανισότητα με μεταβλητή x ώστε το σύνολο αυτό να είναι το σύνολο των x για τους οποίους η ανισότητα είναι αληθής: $(-\infty,3]$, $(2,+\infty)$, $(3,7)$, $(-\infty,-2)\cup(1,4)\cup(7,+\infty)$, $[-2,4]\cup[6,+\infty)$, $[-1,4)\cup(4,8]$, $(-\infty,-2]\cup[1,4)\cup[7,+\infty)$.

1.1.5. Αποδείξτε την ανισότητα του Bernoulli και τον διωνυμικό τύπο του Newton με επαγωγή.

---

[6] Το περιεχόμενο αυτής της "ανώδυνης" άσκησης είναι πιο χρήσιμο απ' ό,τι δείχνει.

[7] Η **μέση τιμή** οποιωνδήποτε αριθμών $y_1,\dots,y_n$, όπου ο κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\frac{\nu_1y_1+\cdots+\nu_ny_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n}=\frac{\nu_1}{\nu_1+\cdots+\nu_n}\,y_1+\cdots+\frac{\nu_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n}\,y_n=w_1y_1+\cdots+w_ny_n,$$

όπου κάθε $w_k=\frac{\nu_k}{\nu_1+\cdots+\nu_n}$ είναι η **σχετική συχνότητα** ή **σχετικό βάρος** του αντίστοιχου y_k, δηλαδή η αναλογία του αριθμού εμφανίσεων του y_k προς τον συνολικό αριθμό εμφανίσεων των $y_1,\dots,y_n$. Γενικότερα, αν $w_1,\dots,w_n>0$ και $w_1+\cdots+w_n=1$, οι αριθμοί $w_1,\dots,w_n$ ονομάζονται **βάρη** και ο $w_1y_1+\cdots+w_ny_n$ ονομάζεται **μέση τιμή** των $y_1,\dots\,y_n$ ως προς αυτά τα βάρη.

1.2 Supremum και infimum.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μη-κενό σύνολο A.*

Το A χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει u με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Κάθε u με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται* **άνω φράγμα** *του A.*

Το A χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει l με την ιδιότητα να ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$. Κάθε l με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται* **κάτω φράγμα** *του A.*

Τέλος, το A χαρακτηρίζεται **φραγμένο** *αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχουν l και u με την ιδιότητα να ισχύει $l \leq x \leq u$ για κάθε $x \in A$.*

Προσέξτε: αν ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε $u' \geq u$ είναι κι αυτός άνω φράγμα του A Επίσης, αν ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κι αυτός κάτω φράγμα του A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3. [α] *Έστω ότι ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x > a$. Τότε $l \leq a$.*

[β] *Έστω ότι ισχύει $u \geq x$ για κάθε $x < b$. Τότε $u \geq b$.*

Απόδειξη. [α] Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $a < l$. Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{a+l}{2}$ για τον οποίο ισχύει $a < x < l$. Υπάρχει, επομένως, αριθμός $x > a$ για τον οποίο δεν ισχύει $l \leq x$. Αυτό είναι, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, άτοπο.

[β] Ομοίως, υποθέτουμε ότι $u < b$. Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{u+b}{2}$ για τον οποίο ισχύει $u < x < b$. Υπάρχει, επομένως, αριθμός $x < b$ για τον οποίο δεν ισχύει $u \geq x$. Αυτό είναι άτοπο. □

Παράδειγμα 1.2.1. Είναι προφανές ότι κάθε $l \leq a$ είναι κάτω φράγμα καθενός από τα διαστήματα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$. Αναρωτιόμαστε αν υπάρχουν και άλλοι l οι οποίοι είναι κάτω φράγματα αυτών των διαστημάτων.
Ας δούμε την περίπτωση των διαστημάτων $[a, b]$, $[a, b)$, $[a, +\infty)$. Αν ο l είναι κάτω φράγμα ενός από αυτά τα διαστήματα, τότε πρέπει να ισχύει $l \leq a$, διότι ο a είναι στοιχείο αυτών των διαστημάτων. Άρα τα κάτω φράγματα και των τριών αυτών διαστημάτων είναι οι αριθμοί $l \leq a$ και κανένας άλλος.
Τώρα πάμε στην περίπτωση των διαστημάτων $(a, b]$, (a, b), $(a, +\infty)$. Έστω ότι ο l είναι κάτω φράγμα ενός από αυτά τα διαστήματα. Τώρα ο a δεν είναι στοιχείο κανενός από αυτά τα διαστήματα, οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε *αμέσως* ότι $l \leq a$. Και προχωράμε ως εξής. Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι, όποιο κι αν είναι το διάστημα που έχουμε επιλέξει, ο l είναι αυτομάτως κάτω φράγμα του $(a, +\infty)$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x > a$. Τώρα, όμως, η πρόταση 1.3 λέει ότι $l \leq a$. Άρα τα κάτω φράγματα και των διαστημάτων $(a, b]$, (a, b), $(a, +\infty)$ είναι οι αριθμοί $l \leq a$ και κανένας άλλος.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι καθένα από τα διαστήματα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ έχει ένα *μέγιστο* κάτω φράγμα, τον a, και οι αριθμοί $l \leq a$ είναι όλα τα κάτω φράγματά του. Το σύνολο των κάτω φραγμάτων καθενός από αυτά τα διαστήματα είναι το διάστημα $(-\infty, a]$.

Παράδειγμα 1.2.2. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι προφανές ότι κάθε $u \geq b$ είναι άνω φράγμα καθενός από τα διαστήματα $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$. Μπορούμε να αποδείξουμε, με "συμμετρικό" τρόπο, ότι κανένας άλλος αριθμός δεν είναι άνω φράγμα οποιουδήποτε από αυτά τα διαστήματα. Αυτό είναι άμεσο για τα $[a, b]$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ και είναι πόρισμα της πρότασης 1.3 για τα $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, b)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι καθένα από αυτά τα διαστήματα έχει ένα *ελάχιστο* άνω φράγμα, τον b, και οι αριθμοί $u \geq b$ είναι όλα τα άνω φράγματά του. Το σύνολο των άνω φραγμάτων καθενός από αυτά τα διαστήματα είναι το διάστημα $[b, +\infty)$.

Παράδειγμα 1.2.3. Τα διαστήματα $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένα και τα διαστήματα $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι κάτω φραγμένα.

Παράδειγμα 1.2.4. Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο και, επειδή ο 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του, τα κάτω φράγματα του $\mathbb{N}$ είναι όλοι οι $l \leq 1$ και κανένας άλλος. Δηλαδή, ο 1 είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του $\mathbb{N}$ και το σύνολο των κάτω φραγμάτων του $\mathbb{N}$ είναι το $(-\infty, 1]$.
Στην επόμενη ενότητα θα αποδείξουμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ SUPREMUM. *Κάθε μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Η *ιδιότητα supremum* είναι η σημαντικότερη και βαθύτερη ιδιότητα του $\mathbb{R}$. Η ιδιότητα αυτή, όπως θα βλέπουμε διαρκώς από εδώ και πέρα, *είναι η βάση για να αποδειχτούν όλα τα σημαντικά αποτελέσματα της Ανάλυσης*.

Δεν θα αποδείξουμε τώρα την ιδιότητα supremum. Η απόδειξή της εντάσσεται στο πλαίσιο της *αξιωματικής θεμελίωσης* του $\mathbb{R}$ και προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο *δημιουργείται* το σύνολο $\mathbb{R}$ από το υποσύνολό του $\mathbb{N}$. Με όλα αυτά τα ζητήματα, δηλαδή την δημιουργία του $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{N}$ και την απόδειξη της ιδιότητας supremum, ασχολείται το κεφάλαιο 12.

Τώρα, με βάση την ιδιότητα supremum, θα αποδείξουμε τη "συμμετρική" ιδιότητα infimum. Θα δείτε ότι η απόδειξη βασίζεται σε μια απλή ιδέα: *η "συμμετρία" ως προς τον 0 αντιστρέφει τις ανισοτικές σχέσεις ή, με άλλα λόγια, τα "πάνω" γίνονται "κάτω" και τα "κάτω" γίνονται "πάνω".*

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ INFIMUM. *Κάθε μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο A.
Θεωρούμε το σύνολο
$$-A = \{-x \,|\, x \in A\}.$$
Τα σύνολα A και $-A$ είναι "συμμετρικά" ως προς τον 0. Δηλαδή, τα στοιχεία του ενός συνόλου είναι τα αντίθετα των στοιχείων του άλλου συνόλου.
Το A είναι μη-κενό, οπότε και το $-A$ είναι μη-κενό.
Επίσης, αν l είναι ένα οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A, τότε ο $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$, οπότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο.
Επειδή, λοιπόν, το $-A$ είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, από την ιδιότητα supremum συνεπάγεται ότι έχει ελάχιστο άνω φράγμα και έστω u_0 το ελάχιστο άνω φράγμα του $-A$.
Επειδή ο u_0 είναι άνω φράγμα του $-A$, ο $-u_0$ είναι κάτω φράγμα του A.
Αν υπήρχε κάτω φράγμα l του A μεγαλύτερο του $-u_0$, τότε το $-l$ θα ήταν άνω φράγμα του $-A$ μικρότερο του u_0. Αυτό είναι άτοπο διότι ο u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $-A$. Άρα δεν υπάρχει κάτω φράγμα l του A μεγαλύτερο του $-u_0$.
Άρα ο $-u_0$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το* **μέγιστο κάτω φράγμα** *ενός μη-κενού και κάτω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και* **infimum** *του A.*

Το **ελάχιστο άνω φράγμα** *ενός μη-κενού και άνω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και* **supremum** *του A.*

Το infimum και το supremum του A συμβολίζονται, αντιστοίχως,
$$\inf A \quad \text{ή} \quad \text{g.l.b. } A \qquad\qquad \sup A \quad \text{ή} \quad \text{l.u.b. } A.$$

Παράδειγμα 1.2.5. Όπως είδαμε στα παραδείγματα 1.2.1 και 1.2.2, όλα τα διαστήματα $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ έχουν το ίδιο supremum, τον b, και όλα τα διαστήματα $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ έχουν το ίδιο infimum, τον a.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το ελάχιστο στοιχείο, αν υπάρχει, ενός συνόλου A ονομάζεται και* **minimum** *του A.*

Το μέγιστο στοιχείο, αν υπάρχει, ενός συνόλου A ονομάζεται και **maximum** *του A.*

Το minimum και το maximum του A συμβολίζονται, αντιστοίχως,
$$\min A \qquad \max A.$$

Από τα διαστήματα $[a, b]$ και $[a, b)$ καταλαβαίνουμε ότι κάποια μη-κενά, άνω φραγμένα σύνολα έχουν maximum και κάποια άλλα δεν έχουν maximum. Πάντως, κάθε μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει οπωσδήποτε supremum.

Παράδειγμα 1.2.6. Αν ένα σύνολο A έχει maximum, τότε $\sup A = \max A$, δηλαδή το supremum του A ταυτίζεται με το maximum του A.
Πράγματι, κάθε στοιχείο του A είναι μικρότερο ή ίσο του $\max A$, οπότε το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A. Επίσης, επειδή το $\max A$ είναι *στοιχείο* του A δεν μπορεί να υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο του $\max A$. Άρα το $\max A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν ένα σύνολο A έχει minimum, τότε $\inf A = \min A$, δηλαδή το infimum του A ταυτίζεται με το minimum του A.

Το $A = \{0\} \cup [2,3] \cup \{4\}$ έχει $\min A = 0$ και $\max A = 4$. Άρα $\inf A = 0$ και $\sup A = 4$.

Παράδειγμα 1.2.7. $\min \mathbb{N} = 1$, οπότε $\inf \mathbb{N} = 1$. Όμως, το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο: κανένας $n \in \mathbb{N}$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$ διότι ο $n+1 \in \mathbb{N}$ είναι μεγαλύτερος του n.
Βέβαια, το ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο δεν σημαίνει ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει άνω φράγμα και κατ' επέκταση supremum. Το ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο σημαίνει ότι δεν έχει άνω φράγμα το οποίο να είναι συγχρόνως και στοιχείο του. Θα μπορούσε, όμως, το $\mathbb{N}$ να έχει άνω φράγμα κάποιον μη-φυσικό αριθμό. Αυτό θα το ξεκαθαρίσουμε στην επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα 1.2.8. Το $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\max A = 1$, οπότε $\sup A = 1$. Τώρα, το A *δεν έχει* ελάχιστο στοιχείο: κανένας $\frac{1}{n} \in A$ δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του A διότι ο $\frac{1}{n+1} \in A$ είναι μικρότερος του $\frac{1}{n}$. Όμως, επειδή το A είναι κάτω φραγμένο με κάτω φράγμα, για παράδειγμα, τον 0, το A *έχει* infimum. Θα υπολογίσουμε το $\inf A$ στην επόμενη ενότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε* $\inf A = -\infty$.
Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε $\sup A = +\infty$.

Αιτιολογούμε (προσέξτε: *δεν αποδεικνύουμε*) τον ορισμό. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, δεν έχει ως άνω φράγμα κανέναν *αριθμό*. Όμως, το $+\infty$ συμβολίζει μια "ποσότητα" μεγαλύτερη από κάθε αριθμό, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως το μοναδικό, και, επομένως, το ελάχιστο, "άνω φράγμα" του A.

Παρατηρήστε ότι *κάθε μη-κενό σύνολο A έχει supremum και infimum*. Αν το A είναι άνω φραγμένο, το supremum του είναι αριθμός και, αν δεν είναι άνω φραγμένο, το supremum του είναι $+\infty$. Ομοίως, αν το A είναι κάτω φραγμένο, το infimum του είναι αριθμός και, αν δεν είναι κάτω φραγμένο, το infimum του είναι $-\infty$. Επίσης, για κάθε μη-κενό σύνολο A ισχύει

$$\inf A \leq \sup A.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A \leq x$ και $x \leq \sup A$ επειδή, ακριβώς, το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A.

Γενικά, όταν γράφουμε $\sup A$, χωρίς άλλη ιδιαίτερη διευκρίνηση, θα εννοούμε ότι αυτό είναι αριθμός ή $+\infty$. Επίσης, όταν γράφουμε $\inf A$ θα εννοούμε ότι αυτό είναι αριθμός ή $-\infty$.

Τα επόμενα θα μας βοηθήσουν να σχηματίσουμε καλύτερη "εικόνα" των ποσοτήτων $\sup A$ και $\inf A$.

Το $\sup A$ χαρακτηρίζεται από τις εξής δυο ιδιότητες (i) και (ii):

(i) *Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του A μεγαλύτερο του* $\sup A$.

Αυτό είναι προφανές στην περίπτωση που είναι $\sup A = +\infty$ και, αν το $\sup A$ είναι αριθμός, αυτό προκύπτει από το ότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A.

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\sup A$ *υπάρχει στοιχείο του A.*

Πράγματι, στην περίπτωση $\sup A = +\infty$ πάρτε οποιονδήποτε αριθμό u, όσο μεγάλο θέλετε. Τότε ο u δεν είναι άνω φράγμα του A (διότι το A δεν είναι άνω φραγμένο), οπότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $u < x$. Άρα όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ υπάρχει στοιχείο του A.

Στην περίπτωση που το $\sup A$ είναι αριθμός πάρτε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, όσο μικρό θέλετε. Τότε ο $\sup A - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A (διότι ο $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A), οπότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $\sup A - \epsilon < x$ και, επομένως (λόγω του (i)),

$$\sup A - \epsilon < x \leq \sup A.$$

Άρα υπάρχει x στο A, του οποίου η απόσταση από τον $\sup A$ είναι μικρότερη από τον προεπιλεγμένο ϵ. Άρα όσο θέλουμε κοντά στον $\sup A$ υπάρχει στοιχείο του A.

Ομοίως, το $\inf A$ χαρακτηρίζεται από τις εξής δυο ιδιότητες (i) και (ii):

(i) *Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του A μικρότερο του* $\inf A$.

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\inf A$ *υπάρχει στοιχείο του* A.

Τώρα θα δούμε μια λίγο απρόσμενη εφαρμογή της ύπαρξης των supremum και infimum ενός συνόλου.

Έστω ότι το σύνολο A είναι οποιοδήποτε *διάστημα*. Γνωρίζουμε ότι το A έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x ώστε $x_1 < x < x_2$ ισχύει $x \in A$. Με άλλα λόγια: *ένα διάστημα περιέχει κάθε στοιχείο που είναι ανάμεσα σε δυο στοιχεία του*. Η πρόταση 1.4 λέει ότι, από τα μη-κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει τα διαστήματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4. *Έστω μη-κενό σύνολο A με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x με $x_1 < x < x_2$ ισχύει $x \in A$. Τότε το A είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω

$$u = \sup A, \qquad l = \inf A,$$

οπότε $-\infty \le l \le u \le +\infty$. Τότε, προφανώς, $A \subseteq [l, u]$.
Έστω $x \in (l, u)$. Τότε ο x δεν είναι κάτω φράγμα ούτε άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x < x_2$. Βάσει της υπόθεσης, συνεπάγεται $x \in A$. Επομένως, $(l, u) \subseteq A$.
Από τη διπλή σχέση $(l, u) \subseteq A \subseteq [l, u]$ προκύπτουν ακριβώς τέσσερις περιπτώσεις:

$$A = (l, u) \quad \text{ή} \quad A = [l, u] \quad \text{ή} \quad A = (l, u] \quad \text{ή} \quad A = [l, u).$$

Σε κάθε περίπτωση το A είναι διάστημα και, μάλιστα, με άκρα τα $\inf A$ και $\sup A$. □

Ασκήσεις.

1.2.1. Αποδείξτε ότι $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

1.2.2. Αποδείξτε ότι το διάστημα $(a, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένο και ότι το $[a, b)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

1.2.3. Αν ισχύει $l \le a + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, αποδείξτε ότι $l \le a$.
Αν ισχύει $|a - b| \le \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, αποδείξτε ότι $a = b$.

1.2.4. Αν ισχύει $a \le \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ για κάθε ϵ με $0 < \epsilon < 1$, αποδείξτε ότι $a \le 0$.

1.2.5. Έστω $\inf A = \inf B$ και $\sup A = \sup B$. Συνεπάγεται $A = B$;

1.2.6. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι το κλειστό διάστημα $[\inf A, \sup A]$ είναι το *ελάχιστο* κλειστό διάστημα στο $\overline{\mathbb{R}}$ το οποίο περιέχει το A.

1.2.7. Υπάρχει *ελάχιστο* ανοικτό διάστημα το οποίο να περιέχει ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

1.2.8. Έστω μη-κενό σύνολο A. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει του $\sup A$ το σύνολο των άνω φραγμάτων του A, διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $\sup A = +\infty$ και $\sup A < +\infty$. Κάντε το ίδιο σε σχέση με το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A και με το $\inf A$.

1.2.9. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι $\sup A \in A$ αν και μόνο αν το A έχει μέγιστο στοιχείο. Κάντε το ίδιο για το $\inf A$ και για το ελάχιστο στοιχείο του A.

1.2.10. Έχοντας υπ' όψη και τα παραδείγματα $A = [0, 2]$, $A = [0, 2)$, $A = [0, 1] \cup \{2\}$, απαντήστε, γενικά, για ένα μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο A και για το $u = \sup A$ στα εξής ερωτήματα:
Είναι σωστό ότι ισχύει $A \cap (u - \epsilon, u] \ne \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$;
Είναι σωστό ότι ισχύει $A \cap (u - \epsilon, u) \ne \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$;
Ποιά είναι η απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι $u \notin A$;
Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα στην περίπτωση του $l = \inf A$.

1.2.11. Έστω μη-κενό σύνολο A και αριθμός u.

Αποδείξτε ότι $\sup A \leq u$ αν και μόνο αν ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.

Αποδείξτε ότι $u \leq \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x > \gamma$.

Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα για το $\inf A$ και αριθμό l.

1.2.12. Έστω μη-κενά σύνολα A, B.

[α] Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

[β] Κατ' αρχάς, μερικά παραδείγματα.

Δείτε ότι τα σύνολα $A = (-\infty, 0], B = [0, +\infty)$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Κατόπιν, βρείτε το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

Κάντε το ίδιο για τα $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, +\infty)$, για τα $A = (-4, -2)$, $B = (-2, +\infty)$ και για τα $A = (-\infty, 0)$, $B = [1, 13]$.

Τώρα, γενικά, έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει των $\sup A$, $\inf B$ το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

[γ] Έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$ ώστε $y - x \leq \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$ και ότι υπάρχει *μοναδικός* ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Ποιός είναι αυτός ο ξ;

[δ] Έστω ότι ισχύει $0 < x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$ ώστε $\frac{y}{x} \leq 1 + \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$ και ότι υπάρχει ακριβώς ένας ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

1.2.13. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \cup B = \mathbb{R}$ και ώστε να ισχύει $x < y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Παρατηρήστε ότι τα A, B είναι συμπληρωματικά και ότι το A είναι αριστερά του B. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε είτε $A = (-\infty, \xi), B = [\xi, +\infty)$ είτε $A = (-\infty, \xi], B = (\xi, +\infty)$.

1.2.14. Έστω μη-κενά σύνολα A, B. Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ και κάθε $\gamma < x$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma$.

1.2.15. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

1.2.16. [α] Έστω μη-κενά σύνολα A, B.

Αποδείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Αποδείξτε ότι $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.

[β] Για το μη-κενό σύνολο A ορίζουμε $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$.

Αποδείξτε ότι $\sup(-A) = -\inf A$ και $\inf(-A) = -\sup A$.

[γ] Για μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε $A + B = \{x + y \,|\, x \in A, y \in B\}$.

Ποιό είναι το $A + B$ αν $A = [3, 5]$, $B = [1, 7]$ καθώς και αν $A = (3, 5)$, $B = (1, 7)$;

Αποδείξτε ότι $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ και $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

[δ] Για μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε $A \cdot B = \{xy \,|\, x \in A, y \in B\}$.

Ποιό είναι το $A \cdot B$ αν $A = [3, 5]$, $B = [1, 7]$, αν $A = (3, 5)$, $B = (1, 7)$ αλλά και αν $A = (-1, 5)$, $B = (-2, 7)$;

Αν $A, B \subseteq (0, +\infty)$, αποδείξτε ότι $\inf(A \cdot B) = \inf A \inf B$ και $\sup(A \cdot B) = \sup A \sup B$.

1.3 Άμεσα πορίσματα της Ιδιότητας Supremum.

Ξαναδείτε τα παραδείγματα 1.2.4 και 1.2.7.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1. *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο και, επομένως,* $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\sup \mathbb{N}$ είναι αριθμός.
Ο αριθμός $\sup \mathbb{N} - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sup \mathbb{N} - 1 < n$. Συνεπάγεται $\sup \mathbb{N} < n + 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι $n + 1 \in \mathbb{N}$. □

Το θεώρημα 1.1 συνεπάγεται το εξής:

Η ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ. *Αν $l > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < l$.*

Πράγματι, αν $l > 0$, θεωρούμε τον αριθμό $\frac{1}{l}$ και, επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{l} < n$ ή, ισοδύναμα, $0 < \frac{1}{n} < l$.

Παράδειγμα 1.3.1. Ξαναδείτε το παράδειγμα 1.2.8.
Το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\inf A = 0$.
Πράγματι, αφ' ενός ο 0 είναι κάτω φράγμα του A αφ' ετέρου από την Αρχιμήδεια ιδιότητα προκύπτει ότι κανένας $l > 0$ δεν είναι κάτω φράγμα του A. Επομένως, το μέγιστο κάτω φράγμα του A είναι ο 0.

Η πρόταση 1.5 λέει ότι *κάθε αριθμός είναι ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς ακεραίους*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5. *Για κάθε x υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq x < k + 1$.*

Απόδειξη. Έστω αριθμός x.
Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > x$ και υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m > -x$. Θέτουμε $l = -m$, οπότε οι l, n είναι ακέραιοι και

$$l < x < n.$$

Ας θεωρήσουμε ότι ισχύει η επαγωγική υπόθεση:

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν ισχύει η ανισότητα $k \leq x$, τότε ισχύει και η ανισότητα $k + 1 \leq x$.

Τότε από την αρχή της επαγωγής και από το ότι η ανισότητα $k \leq x$ ισχύει για $k = l$, συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $k \leq x$ ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \geq l$. Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό διότι η ανισότητα $k \leq x$ δεν ισχύει για τον $k = n$.
Επομένως, η αρχική επαγωγική υπόθεση δεν είναι σωστή, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq x$ και $k + 1 > x$, δηλαδή ώστε $k \leq x < k + 1$.
Τώρα θα δούμε ότι ο ακέραιος k με την ιδιότητα $k \leq x < k + 1$ είναι μοναδικός.
Έστω $k \leq x < k+1$ και $k' \leq x < k'+1$ για κάποιους $k, k' \in \mathbb{Z}$. Τότε $k < k'+1$ και $k' < k+1$, οπότε $-1 < k' - k < 1$. Επειδή $k' - k \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται $k' - k = 0$, οπότε $k' = k$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο $k \in \mathbb{Z}$ για τον οποίο ισχύει $k \leq x < k + 1$, η ύπαρξη και η μοναδικότητα του οποίου εξασφαλίζεται από την πρόταση 1.5, ονομάζεται* **ακέραιο μέρος** *του x και συμβολίζεται $[x]$.*

Δηλαδή,

$$[x] \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad [x] \leq x < [x] + 1.$$

Παράδειγμα 1.3.2. $[3] = 3$, $[-3] = -3$, $[3.5] = 3$, $[-3.5] = -4$.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι *κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό*. Η ιδιότητα αυτή των ρητών, δηλαδή το να περιέχει οποιοδήποτε δοσμένο ανοικτό διάστημα κάποιον από αυτούς, ονομάζεται *πυκνότητα των ρητών* (*στο* $\mathbb{R}$) ή *πυκνότητα του* $\mathbb{Q}$ (*στο* $\mathbb{R}$). Λίγο πιο μετά θα δούμε ότι την ίδια ιδιότητα έχουν και οι άρρητοι.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει ρητός r ώστε $a < r < b$.*

Απόδειξη. Επειδή $b - a > 0$, συνεπάγεται, σύμφωνα με την Αρχιμήδεια ιδιότητα, ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < b - a$. Επομένως, $na + 1 < nb$, οπότε

$$na < [na] + 1 \leq na + 1 < nb.$$

Τότε για τον ρητό $r = \frac{[na]+1}{n}$ ισχύει $a < r < b$. □

Ασκήσεις.

1.3.1. Ξαναδείτε την άσκηση 1.2.3.
Αν ισχύει $l \leq a + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $l \leq a$.
Αν ισχύει $|a - b| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $a = b$.

1.3.2. Βρείτε τα infimum και supremum των συνόλων $\{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [2n - 1, 2n]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

1.3.3. Βρείτε το infimum και το supremum του $(a, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$.

1.3.4. Ξαναδείτε την άσκηση 1.2.12.
Τα σύνολα $A = \{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ικανοποιούν την υπόθεση ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Βρείτε το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Κάντε το ίδιο για τα $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < 0\}$, $B = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > 0\}$.

1.3.5. Αν ισχύει $r \leq a$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < b$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > a\} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > b\}$, αποδείξτε ότι $a = b$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} \cap \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > b\} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $a \leq b$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leq a\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq b\} = \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.

1.4 Ρίζες, δυνάμεις, λογάριθμοι.

Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς των δυνάμεων με *ακέραιο* εκθέτη.
Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ (δηλαδή, αν $n \in \mathbb{N}$), ορίζουμε τη δύναμη a^n με τον γνωστό τρόπο:

$$a^n = a \cdots a \quad (n \text{ φορές}).$$

Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$ και $a \neq 0$, ορίζουμε:

$$a^n = \frac{1}{a \cdots a \ \ (-n \text{ φορές})}.$$

Τέλος, αν $n = 0$ και $a \neq 0$, ορίζουμε:

$$a^0 = 1.$$

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες εκτίθενται στην άσκηση 1.4.3 και όλες έχουν απλές αλγεβρικές αποδείξεις γνωστές από το λύκειο. Το μοναδικό ουσιαστικό στοιχείο αυτών των αποδείξεων είναι το σωστό μέτρημα των παραγόντων των διαφόρων γινομένων. Θα τις θεωρήσουμε γνωστές.

Ρίζες.

Όμως, δεν θα θεωρήσουμε γνωστές τις δυνάμεις με μη-ακέραιους εκθέτες και, ειδικώτερα, τις ρίζες παρά το ότι στο λύκειο μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αλγεβρικά όλες αυτές τις παραστάσεις. Ο λόγος είναι ότι στον ορισμό τους παίζει ουσιαστικό ρόλο η ιδιότητα supremum.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Για κάθε $y \geq 0$ υπάρχει μοναδικός $x \geq 0$ ώστε $x^n = y$.*

Απόδειξη. [8] Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $y \geq 0$.
Θεωρούμε το σύνολο
$$X = \{x \mid x \geq 0, x^n \leq y\}.$$
Κατ' αρχάς, είναι προφανές ότι $0 \in X$, οπότε το X είναι μη-κενό. Κατόπιν, από το $y + 1 \geq 1$ συνεπάγεται $(y+1)^n \geq y+1 > y$. Άρα για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^n \leq y < (y+1)^n$ και, επομένως, $x < y + 1$. Άρα το X είναι άνω φραγμένο με άνω φράγμα τον $y + 1$.
Επειδή το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, το $\sup X$ είναι αριθμός. Θέτουμε
$$\xi = \sup X.$$
Προφανώς, $\xi \geq 0$, διότι $0 \in X$. Θα αποδείξουμε ότι $\xi^n = y$.
Έστω $\xi^n < y$. Τότε $\frac{y-\xi^n}{n(\xi+1)^{n-1}} > 0$ και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\epsilon \leq 1$ και $\epsilon \leq \frac{y-\xi^n}{n(\xi+1)^{n-1}}$. Από την ανισότητα (1.2) συνεπάγεται
$$(\xi + \epsilon)^n - \xi^n \leq n(\xi + \epsilon)^{n-1}\big((\xi + \epsilon) - \xi\big) = n(\xi + \epsilon)^{n-1}\epsilon \leq n(\xi + 1)^{n-1}\epsilon \leq y - \xi^n.$$
Άρα $(\xi + \epsilon)^n \leq y$, οπότε $\xi + \epsilon \in X$. Άτοπο, διότι ο ξ είναι άνω φράγμα του X. Άρα $\xi^n \geq y$.
Έστω $\xi^n > y$. Τότε $\frac{\xi^n-y}{n\xi^{n-1}} > 0$ και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\epsilon \leq \frac{\xi^n-y}{n\xi^{n-1}}$. Με λίγες πράξεις βλέπουμε ότι συνεπάγεται $\epsilon \leq \xi$ και, πάλι από την ανισότητα (1.2), συνεπάγεται
$$\xi^n - (\xi - \epsilon)^n \leq n\xi^{n-1}\big(\xi - (\xi - \epsilon)\big) = n\xi^{n-1}\epsilon \leq \xi^n - y.$$
Άρα $y \leq (\xi - \epsilon)^n$. Άρα για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^n \leq y \leq (\xi - \epsilon)^n$ και, επομένως, $x \leq \xi - \epsilon$. Άρα ο $\xi - \epsilon$ είναι άνω φράγμα του X. Αυτό είναι άτοπο, διότι ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X. Άρα $\xi^n \leq y$.
Από τις ανισότητες $\xi^n \geq y$ και $\xi^n \leq y$ συνεπάγεται $\xi^n = y$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, την ύπαρξη μη-αρνητικής λύσης της $x^n = y$ στη γενική περίπτωση $y \geq 0$.
Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της μη-αρνητικής λύσης της $x^n = y$. Αυτό είναι εύκολο: αν $\xi_1, \xi_2 \geq 0$, $\xi_1{}^n = y$ και $\xi_2{}^n = y$, τότε $\xi_1{}^n = \xi_2{}^n$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Για κάθε $y \geq 0$, η μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$, την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της οποίας εξασφαλίζει το θεώρημα 1.2, ονομάζεται n-**οστή ρίζα** του y και συμβολίζεται*
$$\sqrt[n]{y}.$$
Αν $n = 2$, τότε η $\sqrt[2]{y}$ συμβολίζεται και $\sqrt{y}$.

Τονίζουμε ότι *η $\sqrt[n]{y}$ ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς αριθμούς y*. Επίσης, είναι σαφές από τον ορισμό της n-οστής ρίζας (ως μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$) ότι $\sqrt[n]{0} = 0$ και ότι ισχύει $\sqrt[n]{y} > 0$ για κάθε $y > 0$.

Τώρα, θεωρώντας δεδομένη την ύπαρξη μοναδικής μη-αρνητικής λύσης της εξίσωσης $x^n = y$ για $y \geq 0$, θεωρούμε γνωστά από το λύκειο τα εξής. Αν ο n είναι άρτιος, τότε η εξίσωση $x^n = y$ έχει (i) ακριβώς δυο λύσεις, τους $\sqrt[n]{y}$ και $-\sqrt[n]{y}$, αν $y > 0$, (ii) ακριβώς μια λύση, τον 0, αν $y = 0$, και (iii) καμία λύση, αν $y < 0$. Αν ο n είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^n = y$ έχει (i) ακριβώς μια λύση, τον $\sqrt[n]{y}$, αν $y > 0$, (ii) ακριβώς μια λύση, τον 0, αν $y = 0$, και (iii) ακριβώς μια λύση, τον $-\sqrt[n]{-y}$, αν $y < 0$. Όλα αυτά αποδεικνύονται πολύ εύκολα.

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να συνειδητοποιήσουμε το εξής. *Στο λύκειο δεν αποδεικνύεται η ύπαρξη των ριζών $\sqrt[n]{y}$.* Ο λόγος είναι ότι στο λύκειο δεν μαθαίνουμε τίποτα για την βάση αυτής της απόδειξης, δηλαδή την ιδιότητα supremum. Στο λύκειο απλώς *δεχόμαστε* ότι οι ρίζες υπάρχουν και απλώς μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αλγεβρικά αυτούς τους αριθμούς. Όποιος επιθυμεί μπορεί

[8] Αργότερα, στο παράδειγμα 4.4.20 του κεφαλαίου 4 θα ξανααποδείξουμε την ύπαρξη της n-οστής ρίζας $\sqrt[n]{y}$ ενός οποιουδήποτε μη-αρνητικού αριθμού y. Άλλη μια απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.4.12.

να δει την άσκηση 1.4.4 και να αποδείξει εύκολα, με αλγεβρικό τρόπο, τις βασικές ιδιότητες των ριζών. Στα παρακάτω αυτές τις ιδιότητες θα τις θεωρούμε γνωστές.

Το θεώρημα 1.2 μπορεί να "διαβαστεί" και με άλλο τρόπο. Γνωρίζουμε ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση με τύπο x^n είναι γνησίως αύξουσα (και, επομένως, ένα-προς-ένα) στο $[0, +\infty)$ και έχει τιμές στο $[0, +\infty)$. Αυτά είναι στοιχειώδη. Το θεώρημα 1.2 λέει ότι η συνάρτηση x^n με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ είναι και *επί* του $[0, +\infty)$. Δηλαδή, η $y = x^n$ εκφράζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο πεδίο ορισμού της, το $[0, +\infty)$, και στο σύνολο τιμών της, το $[0, +\infty)$. Τώρα, σύμφωνα με τον ορισμό των ριζών, η $x = \sqrt[n]{y}$ εκφράζει την αντίστροφη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Δηλαδή, οι συναρτήσεις $y = x^n$ (περιορισμένη στο $[0, +\infty)$) και $x = \sqrt[n]{y}$ είναι αντίστροφες. Και, επειδή η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα, η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα.

Ας δούμε τώρα ένα χρήσιμο - και βαθύ - κριτήριο για το αν μια ρίζα είναι ρητός ή άρρητος. Το περιλαμβάνουμε αν και η απόδειξή του είναι καθαρά αλγεβρικής φύσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6. *Έστω φυσικοί n, k. Τότε ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός αν και μόνο αν ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού. Με άλλα λόγια, αν ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός, τότε είναι φυσικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού, δηλαδή ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $k = m^n$. Τότε ο $\sqrt[n]{k} = m$ είναι φυσικός και, επομένως, ρητός.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός, δηλαδή $\sqrt[n]{k} = \frac{m}{l}$, όπου $m, l \in \mathbb{N}$. Κάνοντας απλοποίηση, αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι m, l δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1.
Από την $\sqrt[n]{k} = \frac{m}{l}$ συνεπάγεται $l^n k = m^n$. Γνωρίζουμε ότι, αν ένας φυσικός διαιρεί το γινόμενο δυο φυσικών και δεν έχει κοινούς διαιρέτες > 1 με έναν από τους δυο αριθμούς, τότε διαιρεί τον άλλον. Τώρα, ο l διαιρεί τον $l^n k$, οπότε διαιρεί τον $m^n = m^{n-1}m$. Επειδή ο l δεν έχει κοινούς διαιρέτες > 1 με τον m, ο l διαιρεί τον $m^{n-1} = m^{n-2}m$. Για το ίδιο λόγο, ο l διαιρεί τον $m^{n-2} = m^{n-3}m$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, καταλήγουμε στο ότι ο l διαιρεί τον $m^0 = 1$. Άρα $l = 1$, οπότε $k = m^n$ και ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού. □

Τώρα θα δούμε, επιτέλους, ότι το $\mathbb{R}$ δεν αποτελείται μόνο από ρητούς.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7. *Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι κενό.*

Απόδειξη. Επειδή, προφανώς, ο 2 δεν είναι τετράγωνο φυσικού, από την πρόταση 1.6 συνεπάγεται ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. □

Παρατηρήστε ότι η ύπαρξη έστω και ενός αρρήτου βασίζεται στο θεώρημα 1.2 του οποίου η απόδειξη βασίζεται, με τη σειρά της, στην ιδιότητα supremum.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι *κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν άρρητο*. Η ιδιότητα αυτή των αρρήτων ονομάζεται *πυκνότητα των αρρήτων* (*στο* $\mathbb{R}$) ή *πυκνότητα του* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (*στο* $\mathbb{R}$).

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει άρρητος x ώστε $a < x < b$.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε *άρρητο* c, για παράδειγμα τον $c = \sqrt{2}$. Επειδή $a - c < b - c$, υπάρχει ρητός r ώστε $a - c < r < b - c$. Τότε ο $r + c$ είναι άρρητος και $a < r + c < b$. □

Δυνάμεις με ρητούς μη-ακέραιους εκθέτες.

Τώρα θα ασχοληθούμε για λίγο με τον ορισμό των δυνάμεων με μη-ακέραιο εκθέτη αρχίζοντας με την περίπτωση *ρητού μη-ακέραιου* εκθέτη.

ΛΗΜΜΑ 1.1. *Έστω $y > 0$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n, l \in \mathbb{N}$, $n, l \geq 2$ ώστε $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$. Τότε $(\sqrt[n]{y})^m = (\sqrt[l]{y})^k$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $c = (\sqrt[n]{y})^m$ και $d = (\sqrt[l]{y})^k$, οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $c = d$. Τώρα, λόγω ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες,

$$c^{nk} = (\sqrt[n]{y})^{mnk} = \big((\sqrt[n]{y})^n\big)^{mk} = y^{mk}, \qquad d^{ml} = (\sqrt[l]{y})^{kml} = \big((\sqrt[l]{y})^l\big)^{mk} = y^{mk}$$

και, επομένως,

$$c^{nk} = d^{ml}. \tag{1.3}$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι $nk = ml$.
Αν $nk = ml \neq 0$, από την (1.3) συνεπάγεται $c = d$.
Αν $nk = ml = 0$ ή, ισοδύναμα, $m = k = 0$, τότε η ισότητα $(\sqrt[n]{y})^m = (\sqrt[l]{y})^k = 1$ είναι προφανής. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τώρα, έστω $y > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$ ώστε ο r να μην είναι ακέραιος. Υπάρχουν άπειρα ζεύγη αριθμών $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Όμως, σύμφωνα με το λήμμα 1.1, ο αριθμός $(\sqrt[n]{y})^m$ είναι ο ίδιος για κάθε τέτοιο ζεύγος. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε και ορίζουμε*

$$y^r = (\sqrt[n]{y})^m,$$

χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε ζεύγος $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ώστε $r = \frac{m}{n}$.
Τέλος, αν $r \in \mathbb{Q}$ με $r > 0$, ορίζουμε

$$0^r = 0.$$

Από τον ορισμό είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ισχύει $y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$ για κάθε $y \geq 0$. Άρα οι ρίζες είναι ειδικές περιπτώσεις δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

Επίσης, είναι σαφές ότι ισχύει $y^r > 0$ για κάθε $y > 0$ και για κάθε ρητό r.

Στην άσκηση 1.4.5 διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες. Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται με αλγεβρικό τρόπο, εύκολα, με χρήση των αντίστοιχων ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες και των ιδιοτήτων των ριζών. Κι αυτές τις ιδιότητες θα τις θεωρούμε γνωστές.

Όπως και στην περίπτωση των ριζών, τονίζουμε ότι *η δύναμη y^r με ρητό μη-ακέραιο εκθέτη r ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς αριθμούς y και, μάλιστα, αν $r \leq 0$, η δύναμη y^r ορίζεται μόνο για θετικούς y.*

Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Τέλος, έστω ότι ο x είναι άρρητος και έστω $y > 1$. Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{y^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Το X είναι μη-κενό αφού μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε ρητό $r < x$ (για παράδειγμα, τον $r = [x]$) και τότε ο αντίστοιχος y^r ανήκει στο X. Είναι εύκολο να δούμε ότι το X είναι και άνω φραγμένο. Πράγματι, για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x$ ισχύει $r < [x] + 1$ και, επομένως, $y^r < y^{[x]+1}$ (λόγω των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες). Άρα ο $y^{[x]+1}$ είναι άνω φράγμα του X. Άρα το $\sup X$ είναι αριθμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ. [9] *Αν $y > 1$ και ο x είναι άρρητος, ορίζουμε*

$$y^x = \sup\{y^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Κατόπιν, αν $y = 1$ και ο x είναι άρρητος, ορίζουμε

$$1^x = 1.$$

[9] Δεύτερος ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη υπάρχει στην άσκηση 2.4.20.

Αν $0 < y < 1$ και ο x είναι άρρητος, τότε $\frac{1}{y} > 1$, οπότε έχει ορισθεί ο $(\frac{1}{y})^x$ και ορίζουμε

$$y^x = \tfrac{1}{(1/y)^x}.$$

Τέλος, αν ο x είναι άρρητος και $x > 0$, ορίζουμε

$$0^x = 0.$$

Επομένως, συνυπολογίζοντας τους προηγούμενους σχετικούς ορισμούς, έχουμε τα εξής. *Αν $y < 0$, τότε ο y^x ορίζεται αν και μόνο αν ο x είναι ακέραιος.*[10] *Αν $y = 0$, τότε ο y^x ορίζεται αν και μόνο αν ο x είναι θετικός. Αν $y > 0$, τότε ο y^x ορίζεται για κάθε x.*

ΛΗΜΜΑ 1.2. *Έστω $y > 1$. Για κάθε $b > 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1 < y^{1/n} < b$.*

Απόδειξη. Αν $y > 1$ και $b > 1$, τότε, επειδή $\frac{b-1}{y-1} > 0$, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < \frac{b-1}{y-1}$. Από την ανισότητα (1.2) συνεπάγεται, για έναν τέτοιον n, ότι

$$b^n - 1 \geq n(b-1) > y - 1$$

και, επομένως, $y^{1/n} < b$. Η ανισότητα $1 < y^{1/n}$ είναι προφανής. □

ΛΗΜΜΑ 1.3. *Έστω $x \in \mathbb{Q}$ και $y > 1$. Τότε $y^x = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{Q}$ και $y > 1$.
Αν $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x$, τότε $y^r < y^x$. Άρα ο y^x είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Έστω a οποιοδήποτε άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Επειδή τα στοιχεία του συνόλου είναι θετικοί αριθμοί, συνεπάγεται $a > 0$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $a < y^x$, οπότε $\frac{y^x}{a} > 1$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα 1.2, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1 < y^{1/n} < \frac{y^x}{a}$ και, επομένως, $a < y^{x-(1/n)}$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $x - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ και $x - \frac{1}{n} < x$ και, επομένως, ο $y^{x-(1/n)}$ ανήκει στο $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Άρα $y^x \leq a$.
Άρα ο y^x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$. □

Παρατηρήστε ότι το λήμμα 1.3 *αποδεικνύει* την ισότητα $y^x = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ στην περίπτωση που ο x είναι ρητός. Όμως, στην περίπτωση που ο x είναι άρρητος η ίδια ισότητα *δεν αποδεικνύεται*: απλώς χρησίμευσε για να *οριστεί* ο αριθμός y^x.

ΛΗΜΜΑ 1.4. [α] *Έστω $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x_1 + x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$.*
[β] *Έστω $x_1, x_2 > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ και $0 < r < x_1x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1r_2 = r$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x_1 + x_2$.
Τότε $r - x_1 < x_2$, οπότε υπάρχει $r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r - x_1 < r_2 < x_2$. Θέτουμε $r_1 = r - r_2$, οπότε $r_1 \in \mathbb{Q}$. Προφανώς, $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$.
[β] Έστω $x_1, x_2 > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ και $0 < r < x_1x_2$.
Τότε $0 < \frac{r}{x_1} < x_2$, οπότε υπάρχει $r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < \frac{r}{x_1} < r_2 < x_2$. Θέτουμε $r_1 = \frac{r}{r_2}$, οπότε $r_1 \in \mathbb{Q}$. Προφανώς, $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1r_2 = r$. □

Στην πρόταση 1.8 αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων. Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

[10] Αργότερα, στην ενότητα 4.3, θα δούμε γιατί δεν ορίζονται οι δυνάμεις y^x με μη-ακέραιο εκθέτη όταν $y < 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8. [α] *Έστω* $y, y_1, y_2 > 0$. *Τότε* ${y_1}^x {y_2}^x = (y_1y_2)^x$, $y^{x_1}y^{x_2} = y^{x_1+x_2}$, $(y^{x_1})^{x_2} = y^{x_1x_2}$.
[β] *Έστω* $x_1 < x_2$. *Αν* $y > 1$, *τότε* $y^{x_1} < y^{x_2}$. *Αν* $0 < y < 1$, *τότε* $y^{x_1} > y^{x_2}$.
[γ] *Έστω* $0 < y_1 < y_2$. *Αν* $x > 0$, *τότε* ${y_1}^x < {y_2}^x$. *Αν* $x < 0$, *τότε* ${y_1}^x > {y_2}^x$.

Απόδειξη. [α] Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα τις εξής δυο παρατηρήσεις.
(i) *Αν* $y > 1$, *τότε ισχύει* $y^r \leq y^x$ *για κάθε* $r \in \mathbb{Q}$ *με* $r < x$.
(Διότι γνωρίζουμε ότι ο y^x είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.)
(ii) *Αν* $y > 1$ *και ισχύει* $y^r \leq a$ *για κάθε* $r \in \mathbb{Q}$ *με* $r < x$, *τότε* $y^x \leq a$.
(Διότι, βάσει της υπόθεσης, ο a είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ και διότι γνωρίζουμε ότι ο y^x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του ίδιου συνόλου.)
Απόδειξη της πρώτης ισότητας.
Έστω $y_1, y_2 > 1$.
Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x$. Τότε $(y_1y_2)^r = {y_1}^r {y_2}^r \leq {y_1}^x {y_2}^x$. Άρα $(y_1y_2)^x \leq {y_1}^x {y_2}^x$.
Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1, r_2 < x$. Θέτουμε $r = \max\{r_1, r_2\} \in \mathbb{Q}$, οπότε $r < x$, και τότε ${y_1}^{r_1} {y_2}^{r_2} \leq {y_1}^r {y_2}^r = (y_1y_2)^r \leq (y_1y_2)^x$. Άρα ισχύει ${y_1}^{r_1} \leq \frac{(y_1y_2)^x}{{y_2}^{r_2}}$. Άρα ${y_1}^x \leq \frac{(y_1y_2)^x}{{y_2}^{r_2}}$.
Συνεπάγεται ${y_2}^{r_2} \leq \frac{(y_1y_2)^x}{{y_1}^x}$ και, επομένως, ${y_2}^x \leq \frac{(y_1y_2)^x}{{y_1}^x}$. Άρα ${y_1}^x {y_2}^x \leq (y_1y_2)^x$.
Από τις $(y_1y_2)^x \leq {y_1}^x {y_2}^x$ και ${y_1}^x {y_2}^x \leq (y_1y_2)^x$ προκύπτει ${y_1}^x {y_2}^x = (y_1y_2)^x$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.
Απόδειξη της δεύτερης ισότητας.
Έστω $y > 1$.
Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$. Τότε $y^{r_1}y^{r_2} = y^{r_1+r_2} \leq y^{x_1+x_2}$ και, επομένως, $y^{r_1} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{r_2}}$. Άρα $y^{x_1} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{r_2}}$. Συνεπάγεται $y^{r_2} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{x_1}}$ και, επομένως, $y^{x_2} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{x_1}}$. Άρα $y^{x_1}y^{x_2} \leq y^{x_1+x_2}$.
Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1 + x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$. Άρα ισχύει $y^r = y^{r_1+r_2} = y^{r_1}y^{r_2} \leq y^{x_1}y^{x_2}$. Άρα $y^{x_1+x_2} \leq y^{x_1}y^{x_2}$.
Από τις $y^{x_1}y^{x_2} \leq y^{x_1+x_2}$ και $y^{x_1+x_2} \leq y^{x_1}y^{x_2}$ προκύπτει $y^{x_1}y^{x_2} = y^{x_1+x_2}$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.
Απόδειξη της τρίτης ισότητας.
Έστω $y > 1$ και $x_1, x_2 > 0$.
Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$. Θεωρούμε $r_1', r_2' \in \mathbb{Q}$ με $r_1 \leq r_1'$ και $r_2 \leq r_2'$ και $0 < r_1' < x_1$ και $0 < r_2' < x_2$. Τότε $(y^{r_1'})^{r_2'} = y^{r_1'r_2'} \leq y^{x_1x_2}$ και, επομένως, $y^{r_1} \leq y^{r_1'} \leq (y^{x_1x_2})^{1/r_2'}$. Άρα $y^{x_1} \leq (y^{x_1x_2})^{1/r_2'}$. Επειδή $y^{x_1} \geq y^{r_1'} > 1$, συνεπάγεται $(y^{x_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{r_2'} \leq y^{x_1x_2}$ και, επομένως, $(y^{x_1})^{x_2} \leq y^{x_1x_2}$.
Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1x_2$. Θεωρούμε $r' \in \mathbb{Q}$ με $r \leq r'$ και $0 < r' < x_1x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1r_2 = r'$. Άρα $y^r \leq y^{r'} = y^{r_1r_2} = (y^{r_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$. Άρα $y^{x_1x_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$.
Από τις $(y^{x_1})^{x_2} \leq y^{x_1x_2}$ και $y^{x_1x_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$ προκύπτει $(y^{x_1})^{x_2} = y^{x_1x_2}$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.
[β] Έστω $x_1 < x_2$ και $y > 1$.
Θεωρούμε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Τότε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1$ ισχύει $y^r \leq y^{r_1}$. Άρα $y^{x_1} \leq y^{r_1}$. Από την άλλη μεριά, ισχύει $y^{r_1} < y^{r_2} \leq y^{x_2}$. Άρα $y^{x_1} < y^{x_2}$.
Η περίπτωση $0 < y < 1$ προκύπτει αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.
[γ] Έστω $0 < y_1 < y_2$ και $x > 0$.
Τότε $1 < \frac{y_2}{y_1}$ και, από το [β], $1 = (\frac{y_2}{y_1})^0 < (\frac{y_2}{y_1})^x$ και, από το [α], ${y_1}^x < {y_1}^x(\frac{y_2}{y_1})^x = (y_1\frac{y_2}{y_1})^x = {y_2}^x$.
Η περίπτωση $x < 0$ προκύπτει αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε. □

Ξεχωρίζουμε δυο από τις ιδιότητες των δυνάμεων.
Η πρώτη είναι η εξής. Αν $y > 1$, τότε η y^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x στο $\mathbb{R}$

και, αν $0 < y < 1$, τότε η y^x είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x στο $\mathbb{R}$.

Η δεύτερη, ανάλογη ιδιότητα είναι η εξής. Αν $x > 0$, τότε η y^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του y στο $[0, +\infty)$ και, αν $x < 0$, τότε η y^x είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε τις δυνάμεις*

$$a^{+\infty} = +\infty \quad \text{αν } a > 1, \qquad a^{+\infty} = 0 \quad \text{αν } 0 \leq a < 1,$$

$$a^{-\infty} = 0 \quad \text{αν } a > 1, \qquad a^{-\infty} = +\infty \quad \text{αν } 0 < a < 1,$$

$$(+\infty)^b = +\infty \quad \text{αν } b > 0 \text{ ή } b = +\infty, \qquad (+\infty)^b = 0 \quad \text{αν } b < 0 \text{ ή } b = -\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$0^0, \qquad 1^{+\infty}, \qquad 1^{-\infty}, \qquad (+\infty)^0, \qquad 0^{-\infty}$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές δύναμης**.

Οι παραπάνω απροσδιόριστες μορφές δύναμης δεν είναι τόσο γνωστές όσο οι απροσδιόριστες μορφές των πιο απλών πράξεων και τις οποίες είδαμε στην ενότητα 1.1. Όμως, παρουσιάζονται, όπως θα δούμε, συχνά στον υπολογισμό ορίων και η επιπόλαιη χρήση αυτών των παραστάσεων καταλήγει σε λάθη.

Λογάριθμοι.

Εδώ, στο τελευταίο μέρος αυτής της ενότητας, θα δούμε τον ορισμό των λογαρίθμων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Τότε για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικός x ώστε $a^x = y$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, έστω $a > 1$ και $y > 1$.
Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{x \,|\, a^x \leq y\}.$$

Προφανώς, $0 \in X$. Επίσης, σύμφωνα με το λήμμα 1.2, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^n > y$. Τότε, για κάθε $x \in X$ ισχύει $a^x \leq y \leq a^n$, οπότε $x \leq n$. Άρα το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, οπότε το $\sup X$ είναι αριθμός.
Θέτουμε

$$\xi = \sup X.$$

Θα αποδείξουμε ότι $a^\xi = y$.
Έστω $a^\xi < y$. Σύμφωνα με το λήμμα 1.2 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{1/n} < \frac{y}{a^\xi}$. Τότε $a^{\xi+(1/n)} < y$, οπότε $\xi + \frac{1}{n} \in X$. Αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι άνω φράγμα του X. Άρα $a^\xi \geq y$.
Έστω $a^\xi > y$. Από το λήμμα 1.2, και πάλι, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{1/n} < \frac{a^\xi}{y}$. Τότε $y < a^{\xi-(1/n)}$, οπότε για κάθε $x \in X$ ισχύει $a^x \leq y < a^{\xi-(1/n)}$ και, επομένως, $x < \xi - \frac{1}{n}$. Άρα ο $\xi - \frac{1}{n}$ είναι άνω φράγμα του X. Αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X. Άρα $a^\xi \leq y$.
Από τις $a^\xi \geq y$ και $a^\xi \leq y$ συνεπάγεται $a^\xi = y$.
Οι αποδείξεις στις άλλες περιπτώσεις ανάγονται στο αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης ως εξής.
Αν $a > 1$ και $y = 1$, τότε η $a^x = y$ έχει την προφανή λύση $x = 0$.
Αν $a > 1$ και $0 < y < 1$, τότε, επειδή $\frac{1}{y} > 1$, υπάρχει η ώστε $a^\eta = \frac{1}{y}$ και, επομένως, για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.
Τέλος, αν $0 < a < 1$ και $y > 0$, τότε, επειδή $\frac{1}{a} > 1$, υπάρχει η ώστε $(\frac{1}{a})^\eta = y$, οπότε για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.
Απομένει να αποδείξουμε ότι η λύση της εξίσωσης $a^x = y$ είναι μοναδική: αν $a^{\xi_1} = y$ και $a^{\xi_2} = y$, τότε $a^{\xi_1} = a^{\xi_2}$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. [11] *Αν $y > 0$ και $a > 0$, $a \neq 1$, τότε η λύση της $a^x = y$, η ύπαρξη και η μοναδικότητα της οποίας εξασφαλίζεται από το θεώρημα 1.3, ονομάζεται* **λογάριθμος** *του y με* **βάση** *a και συμβολίζεται*

$$\log_a y.$$

Έστω $a > 1$. Τότε, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συνάρτηση $y = a^x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Οι τιμές της $y = a^x$ είναι θετικές. Τώρα, το θεώρημα 1.3 λέει ότι το σύνολο τιμών της είναι ακριβώς το $(0, +\infty)$. Δηλαδή, η $y = a^x$ εκφράζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο $(-\infty, +\infty)$ και στο $(0, +\infty)$. Και, σύμφωνα με τον ορισμό των λογαρίθμων, η $x = \log_a y$ εκφράζει την αντίστροφη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο $(0, +\infty)$ και στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδή η $y = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x στο $(-\infty, +\infty)$, η $x = \log_a y$ είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$.

Αν $0 < a < 1$, ισχύουν όσα είπαμε για την περίπτωση $a > 1$ με μια διαφορά. Η $y = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και η $x = \log_a y$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Και πάλι, οι δυο συναρτήσεις είναι αντίστροφες.

Η πρόταση 1.9 περιγράφει όλες τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9. *Έστω $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.*
[α] $\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$ *για κάθε* $y_1, y_2 > 0$.
[β] $\log_a(y^z) = z \log_a y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
[γ] $\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$ *για κάθε* $y > 0$.
[δ] $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
[ε] *Έστω* $0 < y_1 < y_2$. *Αν* $a > 1$, *τότε* $\log_a y_1 < \log_a y_2$. *Αν* $0 < a < 1$, *τότε* $\log_a y_1 > \log_a y_2$.

Απόδειξη. [α] Ορίζουμε $x_1 = \log_a y_1$ και $x_2 = \log_a y_2$, οπότε $a^{x_1} = y_1$ και $a^{x_2} = y_2$. Τότε $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} = y_1 y_2$, οπότε $\log_a(y_1 y_2) = x_1 + x_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2$.
[β] Ορίζουμε $x = \log_a y$, οπότε $a^x = y$. Τότε $a^{zx} = (a^x)^z = y^z$ και, επομένως, $\log_a(y^z) = zx = z \log_a y$.
[γ] Ορίζουμε $x = \log_b y$ και $w = \log_a b$, οπότε $b^x = y$ και $a^w = b$. Άρα $a^{wx} = (a^w)^x = b^x = y$. Άρα $\log_a y = wx = \log_a b \log_b y$.
[δ] Η $\log_a 1 = 0$ προκύπτει από την $a^0 = 1$ και η $\log_a a = 1$ από την $a^1 = a$.
[ε] Ορίζουμε $x_1 = \log_a y_1$ και $x_2 = \log_a y_2$, οπότε $y_1 = a^{x_1}$ και $y_2 = a^{x_2}$. Τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$ και, αν $a > 1$, συνεπάγεται $x_1 < x_2$ ενώ, αν $0 < a < 1$, συνεπάγεται $x_1 > x_2$. □

Ασκήσεις.

1.4.1. Βρείτε το infimum και το supremum του $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$.

1.4.2. Έστω οποιοσδήποτε *άρρητος* a και το σύνολο $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\}$. Παρατηρήστε ότι $A \subseteq \mathbb{Q}$ και ότι το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο στο $\mathbb{Q}$. Δηλαδή, υπάρχει $u \in \mathbb{Q}$ (για παράδειγμα, ο $u = [a] + 1$) ώστε να ισχύει $r \leq u$ για κάθε $r \in A$.
Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμός στο $\mathbb{Q}$, ο οποίος να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Συμπεράνατε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα supremum.

1.4.3. [α] Αν $a, b > 0$ και $m, n \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι $a^n b^n = (ab)^n$, $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$.
[β] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ και $m < n$. Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι $a^m < a^n$. Αν $0 < a < 1$, αποδείξτε ότι $a^n < a^m$.
[γ] Έστω $0 < a < b$ και $n \in \mathbb{Z}$. Αν $n > 0$, αποδείξτε ότι $0 < a^n < b^n$. Αν $n < 0$, αποδείξτε ότι $0 < b^n < a^n$.

[11] Δεύτερος ορισμός του λογαρίθμου υπάρχει στην άσκηση 2.4.21.

1.4.4. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και $n, m \geq 2$.
[α] Αν $y, y_1, y_2 \geq 0$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y_1 y_2} = \sqrt[n]{y_1}\,\sqrt[n]{y_2}$ και $\sqrt[n]{\sqrt[m]{y}} = \sqrt[nm]{y}$.
[β] Έστω $n < m$. Αν $y > 1$, αποδείξτε ότι $\sqrt[m]{y} < \sqrt[n]{y}$. Αν $0 < y < 1$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y} < \sqrt[m]{y}$.
[γ] Έστω $0 \leq y_1 < y_2$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y_1} < \sqrt[n]{y_2}$.

1.4.5. Έστω $r, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.
[α] Αν $y, y_1, y_2 > 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r {y_2}^r = (y_1 y_2)^r$, $y^{r_1} y^{r_2} = y^{r_1 + r_2}$, $(y^{r_1})^{r_2} = y^{r_1 r_2}$.
[β] Έστω $r_1 < r_2$. Αν $y > 1$, αποδείξτε ότι $y^{r_1} < y^{r_2}$. Αν $0 < y < 1$, αποδείξτε ότι $y^{r_1} > y^{r_2}$.
[γ] Έστω $0 < y_1 < y_2$. Αν $r > 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r < {y_2}^r$. Αν $r < 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r > {y_2}^r$.

1.4.6. Έστω $y > 1$. Αποδείξτε ότι $y^x = \inf\{y^r \mid r \in \mathbb{Q}, x < r\}$.

1.4.7. Αποδείξτε ότι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt[7]{129}$ και $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

1.4.8. [12] [α] Έστω $n, k, m \in \mathbb{N}$ ώστε οι k, m να μην έχουν κοινό διαιρέτη > 1. Αποδείξτε ότι ο $\sqrt[n]{k/m}$ είναι ρητός αν και μόνο αν καθένας από τους k, m είναι n-οστή δύναμη φυσικού.
[β] Έστω $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ και έστω ότι οι $k, m \in \mathbb{Z}$ δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1. Αν ο $\frac{k}{m}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, αποδείξτε ότι ο k διαιρεί τον a_0 και ο m διαιρεί τον a_n.

1.4.9. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Βρείτε συνθήκη, σχετική με τους πρώτους παράγοντες των m, n, η οποία να είναι ισοδύναμη με το ότι ο $\log_m n$ είναι ρητός.

---

[12] Δυο γενικεύσεις της πρότασης 1.6.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες και όρια ακολουθιών.

2.1 Ακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Χαρακτηρίζουμε* **ακολουθία (πραγματικών αριθμών)** *κάθε συνάρτηση* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{N}$ *και πραγματικές τιμές. Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *η αντίστοιχη τιμή* $x(n)$ *της συνάρτησης συμβολίζεται, παραδοσιακά,* x_n*. Δηλαδή, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*

$$x_n = x(n).$$

Μπορούμε να πούμε, κάπως απλοϊκά, ότι ακολουθία είναι οποιαδήποτε άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά ο καθένας: ο πρώτος αριθμός x_1, ο δεύτερος x_2, ο τρίτος x_3 κλπ. Οι επιλεγμένοι αριθμοί, δηλαδή οι τιμές της ακολουθίας/συνάρτησης ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας. Ο όρος x_{n+1} χαρακτηρίζεται **επόμενος** του x_n και ο x_{n-1} **προηγούμενος** του x_n. Η ανεξάρτητη μεταβλητή n, η οποία διατρέχει το $\mathbb{N}$, ονομάζεται **δείκτης** και *δείχνει* τη σειρά επιλογής των όρων της ακολουθίας. Αντί του συναρτησιακού συμβόλου $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε, παραδοσιακά, τα σύμβολα

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad \text{ή} \quad (x_n) \quad \text{ή} \quad (x_n)_{n=1}^{+\infty}.$$

Μπορούμε, φυσικά, να χρησιμοποιούμε κι άλλα γράμματα, εκτός των x, n, για να συμβολίσουμε ακολουθίες: (y_n), (x_k), (z_m) κλπ.

Στο εξής θα κάνουμε, χάριν συντομίας, μια άτυπη σύμβαση. *Κάθε φορά που κάποιο σύμβολο, όπως τα* n*,* m*,* k*, εμφανίζεται ως δείκτης όρου οποιασδήποτε ακολουθίας, θα εννοείται ότι το σύμβολο αυτό δηλώνει φυσικό αριθμό (μερικές φορές θα επιτρέπεται και η τιμή* 0*), έστω κι αν δεν αναφέρουμε ρητά ότι* $n \in \mathbb{N}$ *ή* $m \in \mathbb{N}$ *ή* $k \in \mathbb{N}$*.*

Παράδειγμα 2.1.1. Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ ή $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.2. Η ακολουθία (n) ή $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.3. Η ακολουθία (1) ή $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.4. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ ή $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.5. Η ακολουθία $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ ή $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.6. Η ακολουθία με n-οστό όρο ίσο με το πλήθος των θετικών διαιρετών του n, δηλαδή η ακολουθία $(1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots)$. Δεν υπάρχει απλός τύπος για τον n-οστό όρο της ακολουθίας.

Παράδειγμα 2.1.7. Η ακολουθία $(m - n)_{n=1}^{+\infty}$ ή $(m - 1, m - 2, m - 3, \dots, m - n, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.8. Η ακολουθία $(m - n)_{m=1}^{+\infty}$ ή $(1 - n, 2 - n, 3 - n, \dots, m - n, \dots)$.

Στα δυο τελευταία παραδείγματα βλέπουμε ότι μερικές φορές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, αντί του απλούστερου (x_n), για να δηλώσουμε ποιός, ανάμεσα σε διάφορα γράμματα, είναι ο δείκτης της ακολουθίας.

Προσέξτε: μια ακολουθία είναι συνάρτηση και όχι το σύνολο τιμών της. Με πιο απλά λόγια, μια ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών και όχι το σύνολο των αριθμών αυτών. Το σύνολο των όρων της ακολουθίας $(1)_{n=1}^{+\infty}$ είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η ακολουθία, όμως, είναι η διαδοχική επιλογή $(1, 1, 1, \dots)$. Το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι πάντοτε άπειρο, ενώ άλλες ακολουθίες έχουν άπειρο σύνολο όρων και άλλες έχουν πεπερασμένο σύνολο όρων. Επίσης, δυο διαφορετικές ακολουθίες μπορεί να έχουν το ίδιο σύνολο όρων. Για παράδειγμα, οι $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, $(1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots)$ είναι διαφορετικές ακολουθίες αλλά και οι δυο έχουν σύνολο όρων το $\{-1, 1\}$. Οι $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$, $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots)$ είναι διαφορετικές ακολουθίες αλλά και οι δυο έχουν σύνολο όρων το $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **αύξουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε n,* **γνησίως αύξουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} > x_n$ για κάθε n,* **φθίνουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε n και* **γνησίως φθίνουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} < x_n$ για κάθε n.*

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **μονότονη** *αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και* **γνησίως μονότονη** *αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **σταθερή** *αν όλοι οι όροι της είναι ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή αν υπάρχει c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για κάθε n. Φυσικά, μια τέτοια ακολουθία συμβολίζεται (c) ή $(c, c, c, \dots, c, \dots)$.*

Μια σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα. Στα παραδείγματα 2.1.1, 2.1.5, 2.1.7 οι ακολουθίες είναι γνησίως φθίνουσες, στα παραδείγματα 2.1.2, 2.1.8 οι ακολουθίες είναι γνησίως αύξουσες, στο παράδειγμα 2.1.3 η ακολουθία είναι σταθερή και στα παραδείγματα 2.1.4, 2.1.6 οι ακολουθίες δεν είναι μονότονες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **άνω φραγμένη** *αν το σύνολο των όρων της είναι άνω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει u με την ιδιότητα: ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n. Κάθε τέτοιος u χαρακτηρίζεται* **άνω φράγμα** *της (x_n).*

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** *αν το σύνολο των όρων της είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει l με την ιδιότητα: ισχύει $l \leq x_n$ για κάθε n. Κάθε τέτοιος l χαρακτηρίζεται* **κάτω φράγμα** *της (x_n).*

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **φραγμένη** *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l και u με την ιδιότητα: ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n.*

Παρατηρούμε ότι, αν ο u είναι άνω φράγμα της ακολουθίας (x_n), τότε κάθε $u' \geq u$ είναι άνω φράγμα της και, αν ο l είναι κάτω φράγμα της (x_n), τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κάτω φράγμα της.

Παράδειγμα 2.1.9. Κάθε σταθερή ακολουθία (c) είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.10. Οι ακολουθίες $(\frac{1}{n})$, $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$, $(\frac{n-1}{n})$, $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένες αφού όλοι οι όροι τους ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 2.1.11. Η ακολουθία $\big(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\big)$ ή $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots)$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη. Προφανώς, κάθε $l \leq 0$ είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Από την άλλη μεριά, αν υπήρχε άνω φράγμα της ακολουθίας αυτής, το σύνολο των περιττών φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο. Αυτό δεν ισχύει και η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.12. Η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \dots)$, δηλαδή η αντίθετη της προηγούμενης, είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη. Αν κάποιος l ήταν κάτω φράγμα της, δηλαδή αν όλοι οι όροι της ήταν $\geq l$, τότε όλοι οι όροι της προηγούμενης ακολουθίας θα ήταν $\leq -l$, οπότε η προηγούμενη ακολουθία θα ήταν άνω φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.13. Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ ή $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη. Πράγματι, αν η ακολουθία ήταν άνω φραγμένη, το σύνολο των περιττών φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο και, αν η ακολουθία ήταν κάτω φραγμένη, το σύνολο των άρτιων φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο.

Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή ότι υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει

$$l \leq x_n \leq u$$

για κάθε n. Με άλλα λόγια, ισχύει $x_n \in [l, u]$ για κάθε n. Τώρα, όμως, μπορούμε να βρούμε ένα συμμετρικό ως προς τον 0 διάστημα $[-M, M]$ το οποίο να περιέχει το διάστημα $[l, u]$, οπότε ισχύει

$$-M \leq x_n \leq M$$

ή, ισοδύναμα, $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Δηλαδή, αν μια ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, τότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Το αντίστροφο είναι κι αυτό σωστό: αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n, τότε ισχύει $-M \leq x_n \leq M$ για κάθε n, οπότε ο M είναι άνω φράγμα και ο $-M$ είναι κάτω φράγμα της (x_n). Επομένως:
Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n.

Ας υποθέσουμε ότι κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο φυσικός n. Για παράδειγμα: "ο n διαιρεί τον 234" ή "ο 4 διαιρεί τον n" ή "$n^2 - n > 8$" ή "$x_n < x_{n+1}$" για κάποια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι μια συγκεκριμένη ιδιότητα, η οποία εξαρτάται από τον φυσικό n,* ***ισχύει τελικά*** *ή, ισοδύναμα, ότι* **ισχύει από κάποιον** n **και πέρα** *αν υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει η ιδιότητα αυτή για κάθε $n \geq n_0$.*

Αν ο n είναι ο δείκτης μιας συγκεκριμένης ακολουθίας (x_n) και η ιδιότητα για την οποία μιλάμε αναφέρεται στους όρους της (x_n), τότε λέμε ότι η (x_n) έχει *τελικά* ή, ισοδύναμα, *από κάποιον n και πέρα* την ιδιότητα αυτή. Τέτοιες ιδιότητες είναι για παράδειγμα οι: $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} > x_n$, $x_n \leq u$, $x_n = c$. Αν μια από αυτές ισχύει τελικά, λέμε ότι η (x_n) είναι, αντιστοίχως, *τελικά φθίνουσα, τελικά γνησίως αύξουσα, τελικά άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον u, τελικά σταθερή c.*

Παράδειγμα 2.1.14. Η ακολουθία $(1, \frac{2}{3}, 7, -2, -1, -1, -1, -1, \dots)$ είναι τελικά σταθερή, διότι είναι σταθερή από τον πέμπτο όρο και πέρα.

Παράδειγμα 2.1.15. Η ακολουθία $(n^2 - 14n + 8)$ είναι τελικά γνησίως αύξουσα. Πράγματι, ο $n^2 - 14n + 8 = (n-7)^2 - 41$ αυξάνεται γνησίως για $n \geq 7$ ενώ, αντιθέτως, οι αρχικοί επτά όροι φθίνουν γνησίως.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο ιδιότητες που εξαρτώνται από τον φυσικό n και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n_0', n_0'' ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \geq n_0'$ και η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \geq n_0''$. Θεωρούμε τον

$$n_0 = \max\{n_0', n_0''\}.$$

Επειδή $n_0 \geq n_0'$, η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$. Επίσης, επειδή $n_0 \geq n_0''$, η δεύτερη ιδιότητα ισχύει κι αυτή για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύουν *και οι δυο* ιδιότητες για κάθε $n \geq n_0$. Το σχήμα που περιγράψαμε διατυπώνεται ως εξής:
Αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά και μια άλλη ιδιότητα ισχύει τελικά κι αυτή, τότε ισχύουν τελικά και οι δυο, ταυτόχρονα, ιδιότητες.

Παράδειγμα 2.1.16. Ισχύει $n^2 - 3n \geq 37$ για κάθε $n \geq 8$. Επίσης, ισχύει $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{25}{13}$ για κάθε $n \geq 13$. Άρα ισχύει $n^2 - 3n \geq 37$ *και* $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{25}{13}$ για κάθε $n \geq \max\{8, 13\} = 13$.

Το προηγούμενο συμπέρασμα αληθεύει και για τρεις ή τέσσερις ή, γενικά, *πεπερασμένου πλήθους* ιδιότητες: αντί να θεωρήσουμε τον μέγιστο από δυο φυσικούς, τους $n_0{}'$, $n_0{}''$, θα θεωρήσουμε τον μέγιστο από τρεις ή τέσσερις αντίστοιχους φυσικούς, έναν για κάθε ιδιότητα. Δεν μπορούμε, όμως, να επεκτείνουμε το παραπάνω επιχείρημα σε άπειρες ιδιότητες διότι άπειροι φυσικοί μπορεί να μην έχουν μέγιστο!

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το νόημα του ότι μια ιδιότητα* **ισχύει για άπειρους** n *είναι σαφές.*

Παράδειγμα 2.1.17. Ισχύει $(-1)^{n-1} > 0$ για άπειρους n, αφού ισχύει για κάθε περιττό n. Ομοίως, ισχύει και η αντίθετη ιδιότητα $(-1)^{n-1} \leq 0$ για άπειρους n, αφού ισχύει για κάθε άρτιο n.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι μπορεί μια ιδιότητα να ισχύει για άπειρους n αλλά να μην είναι σωστό ότι ισχύει από κάποιον n και πέρα. Από την άλλη μεριά, αν μια ιδιότητα ισχύει από κάποιον n και πέρα, τότε, προφανώς, αυτή ισχύει για άπειρους n.

Ασκήσεις.

2.1.1. Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα, αποδείξτε ότι είναι σταθερή.

2.1.2. Βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\big(\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\big)$.
Αν $m \in \mathbb{N}$, βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\big(n - m[\frac{n}{m}]\big)_{n=1}^{+\infty}$. Θεωρήστε πρώτα τις περιπτώσεις $m = 1, 2, 3$.

2.1.3. Οι έξι πρώτοι όροι μιας άγνωστης ακολουθίας είναι: $1, 4, 9, 16, 25, 36$. Ο έβδομος πρέπει να είναι ο 49; ο 24; ή μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός;

2.1.4. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

2.1.5. Το *άθροισμα δυο ακολουθιών* (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n + y_n)$. Αποδείξτε ότι το άθροισμα δυο αυξουσών ή δυο φθινουσών ακολουθιών είναι, αντιστοίχως, αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία. Αποδείξτε ότι το άθροισμα δυο άνω φραγμένων ή δυο κάτω φραγμένων ακολουθιών είναι, αντιστοίχως, άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη ακολουθία.
Το *γινόμενο δυο ακολουθιών* (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n y_n)$. Διατυπώστε και αποδείξτε τα ανάλογα με τα παραπάνω αποτελέσματα, υποθέτοντας, επιπλέον, ότι ισχύει $x_n, y_n \geq 0$ για κάθε n.

2.1.6. Ποιές από τις $((-1)^{n-1}n)$, $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$, $\big(\frac{18-n}{n^2+n+1}\big)$, $\big(\frac{13^n}{n!}\big)$, $\big(\frac{n^{30}}{2^n}\big)$, $\big(2[\frac{n}{2}]\big)$, $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$ είναι *τελικά* μονότονες; τελικά άνω φραγμένες; τελικά κάτω φραγμένες ακολουθίες;

2.1.7. Αποδείξτε ότι μια ιδιότητα ισχύει για άπειρους n αν και μόνο αν για κάθε k υπάρχει κάποιος $n > k$ για τον οποίο η ιδιότητα ισχύει.
Αποδείξτε ότι μια ιδιότητα ισχύει για άπειρους n αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει τελικά.

2.1.8. Αποδείξτε ότι, αν μια ακολουθία είναι τελικά άνω φραγμένη ή τελικά κάτω φραγμένη, τότε είναι, αντιστοίχως, άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη. Με άλλα λόγια, το να είναι ή όχι μια ακολουθία άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη δεν εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της.

2.1.9. Έστω ότι το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχει c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n.

2.1.10. [1] Έστω a, b, p, q, όπου οι p, q δεν είναι και οι δυο 0, και ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τους δυο πρώτους όρους $x_1 = a$ και $x_2 = b$ και από τον αναδρομικό τύπο $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$.

[1] Εδώ περιγράφεται ο υπολογισμός του n-οστού όρου ακολουθίας που ορίζεται με τον γενικό *γραμμικό αναδρομικό τύπο* δεύτερης τάξης.

(i) Έστω $p \neq 0$, $q = 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n = bp^{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.
(ii) Έστω $p = 0$, $q \neq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n = aq^{\frac{n-1}{2}}$ για κάθε περιττό n και $x_n = bq^{\frac{n-2}{2}}$ για κάθε άρτιο n.
(iii) Έστω $p \neq 0$, $q \neq 0$.
Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει δυο πραγματικές λύσεις, τις ρ_1, ρ_2, βρείτε κ, λ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa{\rho_1}^{n-1} + \lambda{\rho_2}^{n-1}$ για κάθε n.
Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, την ρ, βρείτε κ, λ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}$ για κάθε n.
Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, βρείτε κ, λ, ρ και $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa\rho^{n-1}\cos(n-1)\theta + \lambda\rho^{n-1}\sin(n-1)\theta$ για κάθε n.
Υπολογίστε τον n-οστό όρο καθεμιάς από τις τέσσερις ακολουθίες[2] που ορίζονται με πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και με τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$.

2.1.11. Ποιοί αρχικοί όροι (και με τι περιορισμούς) χρειάζονται για να ορισθεί η ακολουθία (x_n) με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n$; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για καθέναν από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2}}{x_{n+1}}$, $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}$ και $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$.

2.2 Όρια ακολουθιών, περιοχές.

Παράδειγμα 2.2.1. Οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$ είναι οι:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \ldots, \frac{1}{100000}, \ldots, \frac{1}{100000000}, \ldots.$$

Είναι σαφές ότι, αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", το μέγεθος του αντίστοιχου όρου $\frac{1}{n}$ της ακολουθίας θα γίνει "όσο θέλουμε μικρό" ή, πιο παραστατικά, το σημείο $\frac{1}{n}$ θα πλησιάσει "όσο θέλουμε κοντά" το σημείο 0.

Παράδειγμα 2.2.2. Οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $(\frac{n-1}{n})$ είναι οι:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \ldots, \frac{99999}{100000}, \ldots, \frac{99999999}{100000000}, \ldots.$$

Πάλι, αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", τότε η απόσταση του αντίστοιχου όρου $\frac{n-1}{n}$ από τον αριθμό 1 θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή". Πράγματι, η απόσταση του $\frac{n-1}{n}$ από τον 1 είναι ίση με $|\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$ και, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, αν ο n γίνει "αρκετά μεγάλος", ο αντίστοιχος $\frac{1}{n}$ θα γίνει "όσο θέλουμε μικρός".

Στα παραδείγματα αυτά είδαμε δυο ακολουθίες (x_n) με την εξής κοινή ιδιότητα:
Αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", η απόσταση του x_n από κάποιον x θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή".
Επεξήγηση. Όταν λέμε ότι η απόσταση του x_n από τον x θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή" εννοούμε ότι η $|x_n - x|$ θα γίνει "μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό". Όταν λέμε "αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος" εννοούμε "αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό". Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε πιο καθαρά την ιδιότητα που εξετάζουμε ως εξής:
Η $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό.

Ας δούμε ξανά το:

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω η ακολουθία $(\frac{1}{n})$.
Η απόσταση του $\frac{1}{n}$ από τον 0 είναι ίση με $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ και, όπως έχουμε ήδη πει, θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό.

[2] Η δεύτερη ακολουθία είναι η γνωστή ακολουθία Fibonnaci και οι εφτά αρχικοί όροι της είναι οι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

Τί σημαίνει αυτό;
Ας πάρουμε έναν οποιονδήποτε μικρό θετικό αριθμό, για παράδειγμα τον 0.000132. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει μικρότερη από τον 0.000132 αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό; Με άλλα λόγια, ρωτάμε: *μεγαλύτερος από ποιόν φυσικό πρέπει να γίνει ο n ώστε η απόσταση $\frac{1}{n}$ να γίνει μικρότερη από τον* 0.000132; Αυτό είναι εύκολο: για να γίνει $\frac{1}{n} < 0.000132$ αρκεί να γίνει $n > \frac{1000000}{132} = 7575.75\ldots$. Ποιοί φυσικοί αριθμοί n είναι $> \frac{1000000}{132}$; Παρατηρούμε ότι ο φυσικός 7576 είναι $> \frac{1000000}{132}$ και, επομένως, αν ο n γίνει ≥ 7576, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.000132. Ας πάρουμε, για δεύτερο παράδειγμα τον μικρό θετικό αριθμό 0.0000000000132. Με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι, αν ο n γίνει ≥ 75757575758, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.0000000000132. Αυτήν την διαδικασία μπορούμε, αν θέλουμε, να την επαναλάβουμε πολλές φορές: κάθε φορά θα επιλέγουμε έναν πολύ μικρό θετικό αριθμό (όπως τους 0.000132 και 0.0000000000132) και κατόπιν θα βρίσκουμε έναν κατάλληλο φυσικό (όπως τους 7576 και 75757575758). Δεν θέλουμε, όμως, κάτι τέτοιο. Αυτό που χρειάζεται είναι να αποδείξουμε ότι για *κάθε* θετικό αριθμό υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός. Οι θετικοί αριθμοί είναι άπειροι και, όσες φορές κι αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία, ποτέ δεν θα τελειώσουμε. Γι αυτό πρέπει να θεωρήσουμε όχι συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς αλλά τον *γενικό θετικό αριθμό* με ένα γενικό σύμβολο, για παράδειγμα το σύμβολο ϵ, και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός, ας τον συμβολίσουμε n_0, ώστε, αν ο n γίνει $\geq n_0$, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει $< \epsilon$. Αυτό, όμως, είναι ακριβώς το περιεχόμενο της Αρχιμήδειας ιδιότητας: *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε ο $\frac{1}{n_0}$ και, επομένως, όλοι οι $\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+2}, \ldots$ να είναι $< \epsilon$.*
Είναι φανερό (και από τα παραδείγματα με τους δυο συγκεκριμένους ϵ που εξετάσαμε) ότι η τιμή του n_0 εξαρτάται από την τιμή του ϵ. Μπορούμε να υπολογίσουμε έναν n_0 (συναρτήσει του ϵ) από τον οποίο και πέρα ισχύει $\frac{1}{n} < \epsilon$; Θα κάνουμε ό,τι κάναμε για τα συγκεκριμένα παραδείγματα. Γράφουμε την $\frac{1}{n} < \epsilon$ ισοδύναμα ως $n > \frac{1}{\epsilon}$ (δηλαδή, λύνουμε ως προς n) και χρησιμοποιούμε το εξής απλό λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 2.1. *Αν $a \geq 0$, τότε ο $n_0 = [a] + 1$ είναι ο ελάχιστος φυσικός $n > a$. Αν $a < 0$, τότε ο $n_0 = 1$ είναι ο ελάχιστος φυσικός $n > a$.*

Απόδειξη. Προφανής. □

Για παράδειγμα: ο ελάχιστος φυσικός $n > -3$ είναι ο 1, ο ελάχιστος φυσικός $n > \frac{8}{3}$ είναι ο $3 = [\frac{8}{3}] + 1$ και ο ελάχιστος φυσικός $n > 2$ είναι και πάλι ο $3 = 2 + 1 = [2] + 1$.
Άρα (επειδή $\frac{1}{\epsilon} \geq 0$) ο n_0 που ψάχνουμε είναι ο $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Εργαζόμενοι με τον γενικό θετικό ϵ, (εκτός από το ότι αυτό είναι το σωστό) έχουμε καταφέρει να βρούμε και έναν γενικό τύπο για έναν κατάλληλο n_0 συναρτήσει του ϵ, οπότε για κάθε συγκεκριμένο ϵ μπορούμε να υπολογίζουμε αμέσως έναν αντίστοιχο κατάλληλο n_0.

Βάσει της προηγούμενης συζήτησης, δίνουμε τον εξής γενικό ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η ακολουθία (x_n)* **συγκλίνει** *στον αριθμό x ή ότι η (x_n)* **τείνει** *στον x ή ότι ο x είναι* **όριο** *της (x_n) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.*
Συνοπτικά: η (x_n) συγκλίνει στον x αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$.
Το ότι η (x_n) συγκλίνει στον x το συμβολίζουμε

$$x_n \to x \quad ή \quad \lim x_n = x \quad ή \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Αν η (x_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, λέμε ότι η (x_n) **αποκλίνει**.

Μπορούμε να πούμε, κάπως πιο παραστατικά, ότι *η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στον x αν ο n-οστός όρος x_n πλησιάζει απεριόριστα τον x όταν ο n γίνεται κατάλληλα μεγάλος.*

Αξίζει να διατυπώσουμε τον προηγούμενο ορισμό με τα σύμβολα της μαθηματικής λογικής:

$$x_n \to x \ \Leftrightarrow \ \big[\ \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |x_n - x| < \epsilon)\ \big]$$

Για να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$ θεωρούμε τον τυχόντα και γενικό $\epsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός n_0 (ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ) τέτοιου ώστε

$$\text{το } n \geq n_0 \text{ συνεπάγεται } (\Rightarrow) \text{ το } |x_n - x| < \epsilon$$

ή, ισοδύναμα, ώστε

$$\text{το } |x_n - x| < \epsilon \text{ συνεπάγεται } \textit{από } (\Leftarrow) \text{ το } n \geq n_0.$$

Η ιδέα είναι να ξεκινήσουμε από τη σχέση $|x_n - x| < \epsilon$ και να περάσουμε σε μια επόμενη σχέση και από αυτήν να περάσουμε σε μια επόμενη σχέση και ούτω καθ' εξής μέχρι να φτάσουμε στην τελική σχέση $n \geq n_0$. Με άλλα λόγια: *να λύσουμε ως προς n την αρχική σχέση*. Το λογικό σχήμα έχει ως εξής:

$$|x_n - x| < \epsilon \;\Leftarrow\; P_1 \;\Leftarrow\; \cdots\cdots \;\Leftarrow\; P_n \;\Leftarrow\; n \geq n_0,$$

όπου $P_1, \ldots, P_n$ είναι οι ενδιάμεσες σχέσεις. Κάθε φορά που περνάμε από μια προηγούμενη σχέση σε μια επόμενη σχέση πρέπει να προσέχουμε δυο πράγματα: η προηγούμενη σχέση να συνεπάγεται *από* την επόμενη σχέση και η επόμενη σχέση να είναι απλούστερη από την προηγούμενη σχέση. Πολλές φορές συμβαίνει δυο διαδοχικές σχέσεις να είναι ισοδύναμες, αλλά αυτό δεν πειράζει. Το να συνεπάγεται η προηγούμενη σχέση την επόμενη μας είναι αδιάφορο. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να ισχύει οπωσδήποτε η αντίστροφη συνεπαγωγή.

Ας ξαναδούμε το παράδειγμα 2.2.1 πιο συνοπτικά.

Παράδειγμα 2.2.1. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{1}{n} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Ή, με άλλη διατύπωση, το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ να συνεπάγεται από το $n \geq n_0$.
Τώρα, το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{1}{n} < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{1}{\epsilon}$. Με σύμβολα:

$$|\tfrac{1}{n} - 0| < \epsilon \;\Leftarrow\; \tfrac{1}{n} < \epsilon \;\Leftarrow\; n > \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Τώρα, το θεώρημα 1.1 αποδεικνύει ότι *πράγματι υπάρχει* n_0 ώστε $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Φυσικά, τότε η ανισότητα $n > \frac{1}{\epsilon}$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \geq n_0$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε από το $n \geq n_0$ να συνεπάγεται το $n > \frac{1}{\epsilon}$ και από αυτό να συνεπάγεται το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; n > \tfrac{1}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{n} < \epsilon \;\Rightarrow\; |\tfrac{1}{n} - 0| < \epsilon.$$

Μπορούμε (αν και δεν είναι υποχρεωτικό) να βρούμε *συγκεκριμένο* n_0. Πράγματι, επειδή $\frac{1}{\epsilon} \geq 0$, ο $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ είναι ο ελάχιστος $n > \frac{1}{\epsilon}$. Άρα, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 2.2.3. Θα αποδείξουμε ότι η σταθερή ακολουθία (c) συγκλίνει στον c. Δηλαδή

$$c \to c.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε το $|c - c| < \epsilon$ να συνεπάγεται από το $n \geq n_0$. Το $|c-c| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $0 < \epsilon$. Προφανώς, το $0 < \epsilon$ ισχύει για κάθε n (ακριβώς επειδή είναι σωστό και επειδή είναι ανεξάρτητο του n). Επομένως, με οποιονδήποτε n_0 (για παράδειγμα, τον $n_0 = 1$), ισχύει $|c - c| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 2.2.4. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η $((-1)^{n-1})$ συγκλίνει σε κάποιον x. Τότε για *κάθε* $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε από το $n \geq n_0$ να συνεπάγεται το $|(-1)^{n-1} - x| < \epsilon$. Όμως, όποιος κι αν είναι ο

n_0, υπάρχουν *άρτιοι και περιττοί* $n \geq n_0$. Άρα, από τους άρτιους $n \geq n_0$ συνεπάγεται $|-1-x| < \epsilon$ και από τους περιττούς $n \geq n_0$ συνεπάγεται $|1-x| < \epsilon$. Το $|-1-x| < \epsilon$ ισοδυναμεί με το $-1 \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ και το $|1-x| < \epsilon$ ισοδυναμεί με το $1 \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$. Άρα, για κάθε $\epsilon > 0$ οι -1, 1 ανήκουν και οι δυο στο διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο αν $0 < \epsilon \leq 1$, διότι τότε το συγκεκριμένο ανοικτό διάστημα έχει μήκος ≤ 2, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 2.2.5. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$.

Έστω $\epsilon > 0$. Το $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{1}{n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{1}{\epsilon}$. Τώρα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Με έναν τέτοιο n_0, από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $n > \frac{1}{\epsilon}$ και από αυτό συνεπάγεται το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα 2.2.6. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{n^2+1}{2n^3-n} \to 0$.

Έστω $\epsilon > 0$. Το $\left|\frac{n^2+1}{2n^3-n} - 0\right| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{n^2+1}{2n^3-n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $2n^3 - n > \frac{1}{\epsilon}(n^2+1)$. Τώρα, αντιλαμβανόμαστε ότι η τελευταία ανισότητα είναι δύσκολο να λυθεί ως προς n, οπότε κάνουμε κάτι λίγο διαφορετικό. Παρατηρούμε (μεγαλώνοντας τον αριθμητή και μικραίνοντας τον παρονομαστή) ότι

$$\frac{n^2+1}{2n^3-n} \leq \frac{n^2+n^2}{2n^3-n^3} = \frac{2}{n},$$

οπότε το $\frac{n^2+1}{2n^3-n} < \epsilon$ συνεπάγεται από (όμως, *δεν είναι ισοδύναμο* με) το $\frac{2}{n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{2}{\epsilon}$. Και τελειώνουμε όπως σε προηγούμενα παραδείγματα. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Με έναν τέτοιον n_0, από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $n > \frac{2}{\epsilon}$ και από αυτό συνεπάγεται το $\left|\frac{n^2+1}{2n^3-n} - 0\right| < \epsilon$.

Προσέξτε την "αντικατάσταση" του $\frac{n^2+1}{2n^3-n}$ με το μεγαλύτερό του, *αλλά απλούστερο*, $\frac{2}{n}$. Αυτό αποτελεί συγκεκριμένη υλοποίηση μιας γενικότερης τεχνικής, πολύ χρήσιμης σε τέτοιες καταστάσεις, η οποία βασίζεται στο ότι:

$$\text{Αν } a \leq b, \text{ τότε το } a < \epsilon \text{ συνεπάγεται από το } b < \epsilon.$$

Η τεχνική συνίσταται στη μετάβαση από την ανισότητα $a < \epsilon$ στην ανισότητα $b < \epsilon$. Εφαρμόζουμε αυτήν την τεχνική, προσέχοντας το b να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του a αλλά και απλούστερο από το a.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η ακολουθία* (x_n) ***αποκλίνει*** *στο* $+\infty$ *ή ότι η* (x_n) ***τείνει*** *στο* $+\infty$ *ή ότι το* $+\infty$ *είναι* ***όριο*** *της* (x_n) *αν για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* n_0 *ώστε να ισχύει* $x_n > M$ *για κάθε* $n \geq n_0$. *Πιο συνοπτικά: η* (x_n) *αποκλίνει στο* $+\infty$ *αν για κάθε* $M > 0$ *ισχύει τελικά* $x_n > M$.
Αν η (x_n) *αποκλίνει στο* $+\infty$, *γράφουμε*

$$x_n \to +\infty \quad \text{ή} \quad \lim x_n = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Επίσης, λέμε ότι η ακολουθία (x_n) ***αποκλίνει*** *στο* $-\infty$ *ή ότι η* (x_n) ***τείνει*** *στο* $-\infty$ *ή ότι το* $-\infty$ *είναι* ***όριο*** *της* (x_n) *αν για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* n_0 *ώστε να ισχύει* $x_n < -M$ *για κάθε* $n \geq n_0$. *Πιο συνοπτικά: η* (x_n) *αποκλίνει στο* $-\infty$ *αν για κάθε* $M > 0$ *ισχύει τελικά* $x_n < -M$.
Αν η (x_n) *αποκλίνει στο* $-\infty$, *γράφουμε*

$$x_n \to -\infty \quad \text{ή} \quad \lim x_n = -\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Μπορούμε να πούμε, πιο παραστατικά, ότι: *η ακολουθία* (x_n) *αποκλίνει στο* $+\infty$ *αν ο* n*-οστός όρος* x_n *πλησιάζει απεριόριστα το* $+\infty$ *όταν ο* n *γίνεται κατάλληλα μεγάλος*. Ανάλογη διατύπωση υπάρχει για την απόκλιση στο $-\infty$.

Ας διατυπώσουμε και αυτούς τους ορισμούς με τα σύμβολα της μαθηματικής λογικής:

$$x_n \to +\infty \;\Leftrightarrow\; \big[\ \forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n > M)\ \big]$$

$$x_n \to -\infty \;\Leftrightarrow\; \big[\ \forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n < -M)\ \big]$$

Παράδειγμα 2.2.7. Θα αποδείξουμε ότι

$$n \to +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε το $n > M$ να συνεπάγεται από το $n \geq n_0$.
Η κατάσταση είναι ξεκάθαρη. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1, υπάρχει $n_0 > M$. Προφανώς, η ανισότητα $n > M$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \geq n_0$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε από το $n \geq n_0$ να συνεπάγεται το $n > M$.
Μπορούμε (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) να θεωρήσουμε τον $n_0 = [M] + 1$ και βλέπουμε ότι, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 2.2.8. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ ή $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$ ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ούτε αποκλίνει στο $-\infty$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε το $(-1)^{n-1}n > M$ να συνεπάγεται από το $n \geq n_0$. Όμως, όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν άρτιοι και περιττοί $n \geq n_0$. Τότε από τους άρτιους $n \geq n_0$ συνεπάγεται $-n > M$ και από τους περιττούς $n \geq n_0$ συνεπάγεται $n > M$. Τώρα, το $-n > M$ είναι, προφανώς, αδύνατο, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Με τον ίδιο τρόπο, το ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$ οδηγεί σε άτοπο.

Παράδειγμα 2.2.9. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{n^2+n}{n+3} \to +\infty$.
Έστω $M > 0$. Το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ συνεπάγεται από το $n^3+n > Mn^2+3M$. Επειδή η ανισότητα αυτή είναι δύσκολο να λυθεί ως προς n, επιστρέφουμε στην $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ και αντικαθιστούμε το $\frac{n^3+n}{n^2+3}$ με κάτι *μικρότερο*. Παρατηρούμε (μικραίνοντας τον αριθμητή και μεγαλώνοντας τον παρονομαστή) ότι

$$\frac{n^3+n}{n^2+3} \geq \frac{n^3}{n^2+3n^2} = \frac{n}{4}.$$

Άρα το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ συνεπάγεται από το $\frac{n}{4} > M$ και αυτό συνεπάγεται από το $n > 4M$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε $n_0 > 4M$ και, τότε, με έναν τέτοιο n_0, από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $n > 4M$ και από αυτό συνεπάγεται το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$.
Προσέξτε την "αντικατάσταση" του $\frac{n^3+n}{n^2+3}$ με τον μικρότερό του, *αλλά απλούστερο*, $\frac{n}{4}$. Αυτό είναι συγκεκριμένο παράδειγμα μιας γενικότερης τεχνικής, η οποία βασίζεται στο ότι:

$$\text{Αν } \ a \geq b, \ \text{ τότε το } \ a > M \ \text{ συνεπάγεται από το } \ b > M.$$

Η τεχνική συνίσταται στη μετάβαση από την ανισότητα $a > M$ στην ανισότητα $b > M$. Εφαρμόζουμε αυτήν την τεχνική, προσέχοντας το b να είναι μικρότερο ή ίσο του a αλλά και απλούστερο από το a.[3]

Χρησιμοποιούμε τη λέξη "όριο" και τα σύμβολα $\to$, lim, $\lim_{n\to+\infty}$ σε όλες τις περιπτώσεις που η ακολουθία έχει όριο, είτε συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Χρησιμοποιούμε το ρήμα "συγκλίνει" όταν το όριο είναι αριθμός και το ρήμα "αποκλίνει" σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν το όριο δεν υπάρχει ή υπάρχει και είναι ένα από τα $\pm\infty$. Όταν γράφουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n$, χωρίς άλλη διευκρίνηση, εννοούμε ότι το όριο είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$.

Τώρα θα ξαναδιατυπώσουμε τους ορισμούς του ορίου ακολουθίας με διαφορετικό τρόπο, αφού εισαγάγουμε την έννοια της *περιοχής*.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $\epsilon > 0$. Το διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του x.*
*Το $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του $+\infty$ και το $[-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του $-\infty$.*
Συμβολίζουμε

$$N_x(\epsilon) = (x-\epsilon, x+\epsilon), \qquad N_{+\infty}(\epsilon) = (\tfrac{1}{\epsilon}, +\infty], \qquad N_{-\infty}(\epsilon) = [-\infty, -\tfrac{1}{\epsilon}).$$

[3] Παρατηρήστε ότι συναντήσαμε την ίδια ακριβώς τεχνική στο παράδειγμα 2.2.6.

Μέσω των αντίστροφων τύπων $M = \frac{1}{\epsilon}$, $\epsilon = \frac{1}{M}$ βλέπουμε ότι μπορούμε να γράφουμε τις περιοχές του $+\infty$ είτε με τη μορφή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είτε με τη μορφή $(M, +\infty]$ και τις περιοχές του $-\infty$ να τις γράφουμε είτε με τη μορφή $[-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ είτε με τη μορφή $[-\infty, -M)$.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι:

Όταν ο ϵ μικραίνει και το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ μένει αμετάβλητο, τότε η αντίστοιχη περιοχή $N_x(\epsilon)$ μικραίνει.

Ο ϵ αποτελεί το “μέτρο” της εγγύτητας στο x των στοιχείων της περιοχής $N_x(\epsilon)$. Όσο πιο μικρός είναι ο ϵ τόσο πιο μικρή είναι η $N_x(\epsilon)$ και τόσο πιο κοντά στο x είναι τα στοιχεία της $N_x(\epsilon)$. Μάλιστα, μπορούμε να δούμε εύκολα τα εξής.

Αν $l < x$, δηλαδή το x (αριθμός ή $+\infty$) είναι δεξιά του l, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του l.

Συμμετρικά, αν $x < u$, δηλαδή το x (αριθμός ή $-\infty$) είναι αριστερά του u, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του u.

Και, τέλος, αν $l < x < u$, δηλαδή ο x (αριθμός) είναι ανάμεσα στους l, u, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους l, u.

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα $|x_n - x| < \epsilon$ στον ορισμό του $x_n \to x$ γράφεται, ισοδύναμα, $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in N_x(\epsilon)$.

Ομοίως, οι ανισότητες $x_n > M$ και $x_n < -M$ που αναφέρονται στους ορισμούς των $x_n \to \pm\infty$ γράφονται, ισοδύναμα, $x_n \in (M, +\infty]$ και $x_n \in [-\infty, -M)$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon)$ και $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon)$, όπου $\epsilon = \frac{1}{M}$.[4]

Μετά από αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να διατυπώσουμε *και τους τρεις* ορισμούς ορίων ως *έναν ενιαίο* ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $x_n \to x$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.*

Βλέπουμε, λοιπον, ότι με την έννοια της περιοχής μπορούμε να ενοποιήσουμε τους τρεις ορισμούς ορίων σε έναν. Αν, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, η φύση των επιχειρημάτων δεν απαιτεί να διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το αν ένα όριο είναι αριθμός ή ένα από τα $\pm\infty$, τότε θα χρησιμοποιούμε τις περιοχές.[5]

Ασκήσεις.

2.2.1. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς, αποδείξτε τα όρια: $\frac{1}{n+8} \to 0$, $\frac{3n+1}{2n+5} \to \frac{3}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}+5} \to 0$, $n^2 - 7n \to +\infty$, $\frac{n}{2n^2-1} \to 0$, $\frac{n^4-n^2+1}{n^2+3} \to +\infty$, $2^n - 2^{n/2} \to +\infty$, $\frac{3+\log_2 n}{1+3\log_2 n} \to \frac{1}{3}$.

2.2.2. Αποδείξτε τους ισχυρισμούς μετά από τον ορισμό της έννοιας της περιοχής.

2.2.3. Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \cap N_y(\epsilon) = \emptyset$.

2.2.4. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Αποδείξτε ότι, αν $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2$, τότε $N_x(\epsilon_1) \subseteq N_x(\epsilon_2)$.

Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n ώστε $N_x(\frac{1}{n}) \subseteq N_x(\epsilon)$.

Αποδείξτε ότι $\bigcap_{\epsilon>0} N_x(\epsilon) = \{x\}$ ή, με άλλα λόγια, το μοναδικό στοιχείο που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι το ίδιο το x.

Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} N_x(\frac{1}{n}) = \{x\}$.

2.2.5. Έστω $x_n \to x$. Για κάθε $\epsilon > 0$ έστω $n_0(\epsilon)$ ο *ελάχιστος* n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι, αν $0 < \epsilon' < \epsilon$, τότε $n_0(\epsilon') \geq n_0(\epsilon)$.

[4] Είναι δεδομένο ότι οι όροι μιας ακολουθίας είναι αριθμοί, οπότε δεν κινδυνεύουμε να θεωρήσουμε ότι ο x_n μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$ ή την τιμή $-\infty$ όταν γράφουμε $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon) = (\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ ή $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon) = [-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$.

[5] Κάπως πιο σημαντικό ρόλο θα παίξουν οι περιοχές στο επόμενο κεφάλαιο σε σχέση με τα όρια συναρτήσεων, όπου οι περιπτώσεις ορίων είναι πολύ περισσότερες.

2.2.6. [6] Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) *δεν συγκλίνει* στο x αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.

2.2.7. [7] Έστω $\epsilon_0 > 0$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.

2.2.8. Έστω ότι για την ακολουθία (x_n) και τον x ισχύει ότι: υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Να αντιπαραβάλετε με τον ορισμό του $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή.

2.2.9. [α] Έστω ότι το σύνολο των όρων της ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι, αν $x_n \to x$, τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι ο x είναι ένας από τους όρους της.

[β] Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε n. Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι $x \in \mathbb{Z}$.

2.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια ακολουθιών.

Η πρόταση 2.1 λέει ότι *το αν έχει όριο ή όχι μια ακολουθία καθώς και η τιμή του ορίου της, στην περίπτωση που αυτή έχει όριο, δεν εξαρτώνται από τους αρχικούς όρους της.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1. *Έστω δυο ακολουθίες οι οποίες ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Αν η μια από τις δυο ακολουθίες έχει κάποιο όριο, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Το ότι οι ακολουθίες (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα σημαίνει ότι υπάρχουν k_0, m_0 ώστε να ισχύει

$$x_{k_0} = y_{m_0}, \;\; x_{k_0+1} = y_{m_0+1}, \;\; x_{k_0+2} = y_{m_0+2}, \; \ldots \, . \tag{2.1}$$

Υποθέτουμε ότι $x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από κάποιον δείκτη και πέρα. Λόγω της (2.1) είναι προφανές ότι ισχύει και $y_n \in N_a(\epsilon)$ από κάποιον δείκτη και πέρα. Πράγματι, έστω ότι ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από τον n_0 και πέρα. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση. Αν $n_0 \leq k_0$, τότε ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από τον k_0 και πέρα και, επομένως, ισχύει $y_n \in N_a(\epsilon)$ από τον m_0 και πέρα.
Δεύτερη περίπτωση. Αν $n_0 > k_0$, τότε γράφουμε $n_0 = k_0 + p$ και βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει $y_n \in N_a(\epsilon)$ από τον $m_0 + p$ και πέρα.
Άρα $y_n \to a$. □

Παράδειγμα 2.3.1. Δείτε τις ακολουθίες $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots)$, $(-2, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots)$. Έχουμε αποδείξει ότι η πρώτη συγκλίνει στον 0. Τώρα παρατηρούμε ότι οι δυο ακολουθίες ταυτίζονται, ξεκινώντας από τον τέταρτο όρο της πρώτης και από τον τρίτο όρο της δεύτερης. Άρα και η δεύτερη ακολουθία συγκλίνει στον 0.

Παράδειγμα 2.3.2. Η ακολουθία (x_n) γράφεται $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Η ακολουθία (x_{n+1}) γράφεται $(x_2, x_3, x_4, \ldots)$ και η ακολουθία (x_{n+2}) γράφεται $(x_3, x_4, x_5, \ldots)$. Γενικότερα, η ακολουθία (x_{n+m}) γράφεται $(x_{1+m}, x_{2+m}, x_{3+m}, \ldots)$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.1,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n\to+\infty} x_{n+m} = x.$$

Για παράδειγμα: $\frac{1}{n+3} \to 0$ επειδή $\frac{1}{n} \to 0$.

[6] Η αναλυτική διατύπωση της *άρνησης* του ορίου.

[7] Ισοδύναμος ορισμός ορίου. Το συμπέρασμα είναι ότι *στον ορισμό του ορίου μπορούμε να περιοριστούμε σε $\epsilon > 0$ οι οποίοι δεν ξεπερνούν έναν αυθαίρετα προεπιλεγμένο $\epsilon_0 > 0$.*

Από ανισότητες ορίων σε ανισότητες όρων.

Η πρόταση 2.2 είναι απλή αλλά βασική: *συμπεραίνει ανισοτικές σχέσεις για τους όρους μιας ακολουθίας από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις για το όριο της ακολουθίας.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και αριθμοί u, l.*
[α] *Αν $x > u$, τότε ισχύει τελικά $x_n > u$.*
[β] *Αν $x < l$, τότε ισχύει τελικά $x_n < l$.*
[γ] *Αν $u < x < l$, τότε ισχύει τελικά $u < x_n < l$.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του u. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > u$.
[β] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του l. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n < l$.
[γ] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους u, l. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $u < x_n < l$.
Με δεύτερο τρόπο. Από τα [α] και [β] συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > u$ και ότι ισχύει τελικά $x_n < l$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > u$ και $x_n < l$ και, επομένως, $u < x_n < l$. □

Η πρόταση 2.3 εκφράζει τη **μοναδικότητα του ορίου**. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο μιας ακολουθίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3. *Καμιά ακολουθία δεν έχει δυο διαφορετικά όρια.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει δυο διαφορετικά όρια a, b.
Τότε μπορούμε να βρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε οι περιοχές $N_a(\epsilon)$ και $N_b(\epsilon)$ να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Τότε ισχύει τελικά $x_n \in N_a(\epsilon)$ και, επίσης, ισχύει τελικά $x_n \in N_b(\epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in N_a(\epsilon)$ και $x_n \in N_b(\epsilon)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Με δεύτερο τρόπο. Υποθέτουμε πάλι ότι η (x_n) έχει δυο διαφορετικά όρια a, b και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε c ανάμεσα στους a, b. Από τα [α] και [β] της πρότασης 2.2 συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n < c$ και ότι ισχύει τελικά $x_n > c$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < c$ και $x_n > c$ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4. [α] *Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη.*
[β] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε η (x_n) είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*
[γ] *Αν $x_n \to -\infty$, τότε η (x_n) είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε μια οποιαδήποτε περιοχή του x, για παράδειγμα την $(x-1, x+1)$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(x-1, x+1)$. Τώρα, από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(x-1, x+1)$ μόνο κάποιοι από τους $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(x-1, x+1)$ και να βρούμε ένα διάστημα $[l, u]$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι φραγμένη.
[β] Θεωρούμε μια οποιαδήποτε περιοχή του $+\infty$, για παράδειγμα την $(1, +\infty]$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(1, +\infty]$. Άρα από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(1, +\infty]$ μόνο κάποιοι από τους $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(1, +\infty]$ και να βρούμε ένα διάστημα $[l, +\infty]$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι κάτω φραγμένη.
Τέλος, για κάθε l ισχύει τελικά $x_n > l$. Άρα κανένας l δεν είναι άνω φράγμα της (x_n), οπότε η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
[γ] Όπως στο [β]. □

Παράδειγμα 2.3.3. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει. Άρα δεν αληθεύει το αντίστροφο στην πρόταση 2.4[α].

Παράδειγμα 2.3.4. Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $\big(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\big)$, δηλαδή η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots)$, είναι κάτω φραγμένη και όχι άνω φραγμένη. Όμως, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$, διότι τότε θα έπρεπε, σύμφωνα με την πρόταση 2.2, να είναι τελικά οι όροι της > 1, το οποίο δεν είναι σωστό. Ομοίως, η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, \dots)$ είναι άνω φραγμένη, όχι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$. Άρα τα αντίστροφα στην πρόταση 2.4[β,γ] δεν αληθεύουν.

Από ανισότητες όρων σε ανισότητες ορίων.

Η πρόταση 2.5 είναι κι αυτή απλή αλλά βασική: *συμπεραίνει ανισοτικές σχέσεις για το όριο μιας ακολουθίας από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις για τους όρους της ακολουθίας*. Τα πρώτα δύο συμπεράσματα της πρότασης 2.5 είναι ακριβώς ισοδύναμα με τα πρώτα δυο συμπεράσματα της πρότασης 2.2. Τα αναφέρουμε σε ξεχωριστή πρόταση με τη νέα μορφή τους, διότι με αυτήν τη μορφή προκύπτει πολλές φορές η ανάγκη εφαρμογής τους. Το τρίτο συμπέρασμα της πρότασης 2.5 αποτελεί ένα χρήσιμο κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου: *αν δυο συγκεκριμένοι αριθμοί χωρίζουν κάποιους άπειρους όρους μιας ακολουθίας από κάποιους άλλους άπειρους όρους της ίδιας ακολουθίας, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.*[8]

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5. [α] *Αν ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \geq l$.*

[β] *Αν ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq u$.*

[γ] *Αν $u < l$ και ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n, τότε η (x_n) δεν έχει όριο.*

Απόδειξη. [α] Αν ήταν $x < l$, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 2.2, θα ίσχυε τελικά $x_n < l$, οπότε θα ίσχυε $x_n \geq l$ για το πολύ πεπερασμένους n και έτσι θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα $x \geq l$.

[β] Ομοίως.

[γ] Αν η (x_n) είχε όριο, τότε, λόγω των [α] και [β], το όριο αυτό θα ήταν $\leq u$ και $\geq l$ και, επομένως, θα ίσχυε $l \leq u$ και θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα η (x_n) δεν έχει όριο. ☐

Παράδειγμα 2.3.5. Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει $x_n \in [l, u]$ για άπειρους n, τότε $x \in [l, u]$.

Παράδειγμα 2.3.6. Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$, δηλαδή η $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$, δεν έχει όριο, αφού άπειροι όροι της είναι ≥ 1 και άπειροι όροι της είναι ≤ -1.

Παράδειγμα 2.3.7. Η ακολουθία $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$, δηλαδή η $(1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots)$, δεν έχει όριο, διότι άπειροι όροι της είναι ≥ 2 και άπειροι όροι της είναι ≤ 0.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6. *Αν ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq y$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $y < x$.
Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a ώστε $y < a < x$. Τότε ισχύει τελικά $y_n < a$ και ισχύει τελικά $a < x_n$. Επομένως, ισχύει τελικά $y_n < a$ και $a < x_n$. Άρα ισχύει τελικά $y_n < x_n$ και, επομένως, ισχύει $x_n \leq y_n$ για το πολύ πεπερασμένους n. Άτοπο.
Άρα $x \leq y$. ☐

Παράδειγμα 2.3.8. Ισχύει $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε n και $-\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι, αν ισχύει $x_n < y_n$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε *δεν* συνεπάγεται $x < y$. Από το ότι ισχύει $x_n < y_n$ για άπειρους n συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n και συμπεραίνουμε ότι $x \leq y$. Άρα $x < y$ ή $x = y$ και δεν μπορούμε να αποκλείσουμε καμιά από τις δυο αυτές περιπτώσεις.

[8] Ισχύει και το αντίστροφο. Δείτε την άσκηση 2.5.15.

Οι προτάσεις 2.7 και 2.8 είναι πολύ χρήσιμες για την απόδειξη ύπαρξης αλλά και τον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας: η μέθοδος είναι να συγκρίνουμε την ακολουθία με άλλες κατάλληλες ακολουθίες των οποίων γνωρίζουμε (ή βρίσκουμε πιο εύκολα) τα όρια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$.*
[α] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε $y_n \to +\infty$.*
[β] *Αν $y_n \to -\infty$, τότε $x_n \to -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επειδή ισχύει τελικά $y_n \geq x_n$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > M$ και $y_n \geq x_n$. Άρα ισχύει τελικά $y_n > M$. Επομένως, $y_n \to +\infty$.
[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 2.3.9. Ισχύει $2n + (-1)^n n = 2n \pm n \geq n$ για κάθε n και $n \to +\infty$. Επομένως, $2n + (-1)^n n \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.3.10. Ισχύει $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \geq n$ για κάθε n και $n \to +\infty$. Άρα $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.3.11. Ισχύει $n! \geq n$ για κάθε n. Άρα $n! \to +\infty$.

Η πρόταση 2.8 εκφράζει τη λεγόμενη **ιδιότητα παρεμβολής**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n \leq z_n$. Αν $x_n \to a$ και $z_n \to a$, τότε $y_n \to a$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και, επίσης, ισχύει τελικά $z_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n, z_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και, επειδή ο y_n είναι ανάμεσα στους x_n, z_n, ισχύει τελικά $y_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Άρα $y_n \to a$. □

Παράδειγμα 2.3.12. Ισχύει $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n. Επειδή $-\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$, συνεπάγεται $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$.

Παράδειγμα 2.3.13. Ισχύει $0 \leq \frac{n-2[n/2]}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n. Επειδή $0 \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$, συνεπάγεται $\frac{n-2[n/2]}{n} \to 0$.

Αλγεβρικοί κανόνες ορίων.

Ο επόμενος ορισμός περιγράφει κάποιους βασικούς τρόπους με τους οποίους δημιουργούμε νέες ακολουθίες από ήδη υπάρχουσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η* **αντίθετη** *ακολουθία μιας ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία $(-x_n)$.*
Το **άθροισμα** *δυο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n + y_n)$.*
Η **διαφορά** *δυο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n - y_n)$. Επειδή $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$, η διαφορά των (x_n) και (y_n) είναι η ίδια ακολουθία με το άθροισμα της (x_n) και της αντίθετης της (y_n).*
Το **γινόμενο** *δυο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n y_n)$.*
Το **γινόμενο** *αριθμού λ και ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία (λx_n). Προφανώς, η ακολουθία (λx_n) είναι η ίδια με το γινόμενο της σταθερής ακολουθίας (λ) και της (x_n)*
Η **αντίστροφη** *μιας ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία $\left(\frac{1}{x_n}\right)$.*
Για να ορίζεται η ακολουθία $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ πρέπει να ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n.
Ο **λόγος** *δυο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Επειδή $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$, ο λόγος των (x_n) και (y_n) είναι η ίδια ακολουθία με το γινόμενο της (x_n) και της αντίστροφης της (y_n).*
Για να ορίζεται η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ πρέπει να ισχύει $y_n \neq 0$ για κάθε n.
Η **απόλυτη τιμή** *μιας ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία $(|x_n|)$.*

Η επόμενη πρόταση περιέχει τους λεγόμενους **αλγεβρικούς κανόνες ορίων**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.9. *Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αριθμός λ.*

[α] *Αν $x_n \to x$, τότε $-x_n \to -x$.*

[β] *Αν $x_n \to x$, τότε $|x_n| \to |x|$.*

[γ] *Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και το $x + y$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n + y_n \to x + y$.*

[δ] *Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και το $x - y$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n - y_n \to x - y$.*

[ε] *Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και το xy δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n y_n \to xy$.*

[στ] *Αν $x_n \to x$ και το λx δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lambda x_n \to \lambda x$.*

[ζ] *Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n. Αν $x_n \to x$ και το $\frac{1}{x}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή, αν $x \neq 0$), τότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.*

[η] *Έστω ότι ισχύει $y_n \neq 0$ για κάθε n. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και το $\frac{x}{y}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|(-x_n) - (-x)| = |x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα $-x_n \to -x$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επομένως, $-x_n < -M$. Άρα $-x_n \to -\infty$, οπότε $-x_n \to -(+\infty)$.
Έστω $x_n \to -\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$ και, επομένως, $-x_n > M$. Άρα $-x_n \to +\infty$, οπότε $-x_n \to -(-\infty)$.

[β] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$ και, επομένως,

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα $|x_n| \to |x|$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επομένως, $|x_n| > M$. Άρα $|x_n| \to +\infty$, οπότε $|x_n| \to |+\infty|$.
Έστω $x_n \to -\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$ και, επομένως, $|x_n| > M$. Άρα $|x_n| \to +\infty$, οπότε $|x_n| \to |-\infty|$.

[γ] Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε ισχύουν τελικά και οι δυο αυτές ανισότητες, οπότε ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $x_n + y_n \to x + y$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to y$ και $y \in (-\infty, +\infty]$. Τότε η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε υπάρχει l ώστε να ισχύει $y_n > l$ για κάθε n. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M - l$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$x_n + y_n > (M - l) + l = M.$$

Άρα $x_n + y_n \to +\infty$, οπότε $x_n + y_n \to x + y$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[δ] Άμεση συνέπεια των [α] και [γ].

[ε] Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε η (y_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|y_n| \leq M$ για κάθε n. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2M+1}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2|x|+1}$, οπότε ισχύουν τελικά και οι δυο αυτές ανισότητες, οπότε ισχύει τελικά

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \leq |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| \leq \tfrac{\epsilon M}{2M+1} + \tfrac{|x|\epsilon}{2|x|+1} < \epsilon.$$

Άρα $x_ny_n \to xy$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to y$ και $y \in (0,+\infty]$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < y$. Τότε ισχύει τελικά $l < y_n$. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$x_ny_n > \tfrac{M}{l}l = M.$$

Άρα $x_ny_n \to +\infty$, οπότε $x_ny_n \to xy$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[στ] Άμεση συνέπεια του [ε].

[ζ] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n. Τότε $|x_n| \to |x|$. Επειδή $|x| > 0$, θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < |x|$ και τότε ισχύει τελικά $|x_n| > l$. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < |x|l\epsilon$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$\big|\tfrac{1}{x_n} - \tfrac{1}{x}\big| = \tfrac{|x_n-x|}{|x||x_n|} < \tfrac{|x|l\epsilon}{|x|l} = \epsilon.$$

Άρα $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως,

$$\big|\tfrac{1}{x_n} - 0\big| = \tfrac{1}{x_n} < \epsilon.$$

Άρα $\frac{1}{x_n} \to 0$, οπότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{+\infty}$.
Η περίπτωση $x_n \to -\infty$ προκύπτει από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[η] Άμεση συνέπεια των [ε] και [ζ]. □

Παράδειγμα 2.3.14. Αν $x_n \to x$, $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}$, τότε ${x_n}^k \to x^k$.
Πράγματι, ${x_n}^k = x_n \cdots x_n\,(k \text{ φορές}) \to x \cdots x\,(k \text{ φορές}) = x^k$.
Για παράδειγμα, από το $\frac{n-1}{n} \to 1$ συνεπάγεται το $(\frac{n-1}{n})^3 \to 1^3 = 1$.
Αν $x_n \to +\infty$, τότε, με την ίδια απόδειξη, ${x_n}^k \to +\infty$. Ομοίως, αν $x_n \to -\infty$, τότε ${x_n}^k \to +\infty$, αν ο k είναι άρτιος, και ${x_n}^k \to -\infty$, αν ο k είναι περιττός.
Τέλος, από τα δυο τελευταία και από τον κανόνα αντιστρόφου (ή από τον κανόνα αντιστρόφου και από το πρώτο), συμπεραίνουμε ότι, αν $x_n \to \pm\infty$, τότε σε κάθε περίπτωση $\frac{1}{{x_n}^k} \to 0$.
Ειδικότερα:

$$n^k \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z},\, k > 0 \\ 0, & \text{αν } k \in \mathbb{Z},\, k < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3.15. $\big|(-1)^{n-1}\big| = 1 \to 1$ ενώ η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν έχει όριο. Δηλαδή, το αντίστροφο της πρότασης 2.9[β] δεν ισχύει.
Αν, όμως, $x = 0$, τότε το αντίστροφο ισχύει: $x_n \to 0$ αν και μόνο αν $|x_n| \to |0| = 0$.
Πράγματι, οι ανισότητες $|x_n - 0| < \epsilon$ και $\big||x_n| - 0\big| < \epsilon$ που εμφανίζονται στους ορισμούς των ορίων $x_n \to 0$ και $|x_n| \to 0$ είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 2.3.16. Έστω πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ τουλάχιστον πρώτου βαθμού. Δηλαδή, έστω $k \geq 1$ και $a_k \neq 0$.
Τότε γράφουμε

$$a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k = n^k\big(a_0\tfrac{1}{n^k} + a_1\tfrac{1}{n^{k-1}} + \cdots + a_{k-1}\tfrac{1}{n} + a_k\big).$$

Το όριο της παρένθεσης είναι a_k, διότι κάθε όρος της εκτός του τελευταίου έχει όριο 0. Επίσης, $n^k \to +\infty$. Άρα

$$a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k \to a_k(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολυωνύμου. Δηλαδή, $\lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) = \lim_{n\to+\infty} a_k n^k$.
Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα: $3n^2 - 5n + 2 \to +\infty$ και $-\frac{1}{2}n^5 + 4n^4 - n^3 \to -\infty$.
Ακόμη: $-2n^5 - 2n^2 + n - 7 \to -\infty$, οπότε $(-2n^5 - 2n^2 + n - 7)^8 \to +\infty$.
Επίσης: $-n^3 + 2n - 1 \to -\infty$, οπότε $(-n^3 + 2n - 1)^5 \to -\infty$.

Παράδειγμα 2.3.17. Έστω ρητή παράσταση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_k \neq 0$, $b_m \neq 0$.
Γράφουμε

$$\tfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m} = \tfrac{n^k}{n^m}\big(a_0\tfrac{1}{n^k} + \cdots + a_{k-1}\tfrac{1}{n} + a_k\big)\big/\big(b_0\tfrac{1}{n^m} + \cdots + b_{m-1}\tfrac{1}{n} + b_m\big).$$

Είδαμε προηγουμένως ότι τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή του τελευταίου λόγου είναι ίσα με a_k και b_m. Επειδή $\frac{n^k}{n^m} = n^{k-m}$, προκύπτει ότι

$$\tfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m} \to \begin{cases} (a_k/b_m)(+\infty), & \text{αν } k > m \\ a_k/b_m, & \text{αν } k = m \\ 0, & \text{αν } k < m \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή.
Για παράδειγμα: $\frac{n^3-2n^2+n+1}{2n^2-3n-1} \to +\infty$, $\frac{-n^2+n}{n+2} \to -\infty$, $\frac{n^4-n^3}{n^4+1} \to 1$ και $\frac{-n^2+n+4}{n^3+n^2+5n+6} \to 0$.
Επίσης: $\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3} \to -\infty$, οπότε $\left(\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3}\right)^7 \to -\infty$.
Και: $\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1} \to -\frac{1}{3}$, οπότε $\left(\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1}\right)^3 \to -\frac{1}{27}$.

Παράδειγμα 2.3.18. Θα αποδείξουμε ότι

$$n^a \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ 0, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Έστω $a > 0$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $n^a > M$ για κάθε $n \geq n_0$.
Τώρα, το $n^a > M$ συνεπάγεται από το $n > M^{1/a}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1, υπάρχει $n_0 > M^{1/a}$. Προφανώς, η ανισότητα $n > M^{1/a}$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, με έναν τέτοιο n_0, ισχύει $n > M^{1/a}$ και, επομένως, $n^a > M$ για κάθε $n \geq n_0$.
Μπορούμε (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) να θεωρήσουμε τον $n_0 = [M^{1/a}] + 1$ και βλέπουμε ότι, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $n > M^{1/a}$ για κάθε $n \geq n_0$.
Έστω $a < 0$. Μπορούμε, όπως πριν, να αποδείξουμε ότι $n^a \to 0$ βάσει του ορισμού, αλλά μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο όριο: είναι $-a > 0$ και, επομένως, $n^a = \frac{1}{n^{-a}} \to \frac{1}{+\infty} = 0$.

Παράδειγμα 2.3.19. Θεωρούμε την ακολουθία $(a, a^2, a^3, a^4, \dots)$, δηλαδή την (a^n). Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή από το λύκειο: είναι η **γεωμετρική πρόοδος** με λόγο a.
Αν $a = 1$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (1) η οποία συγκλίνει στον 1. Επίσης, αν $a = 0$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (0) η οποία συγκλίνει στον 0.
Αν $a \leq -1$, οι όροι της (a^n) είναι $a \leq -1$, $a^2 \geq 1$, $a^3 \leq -1$, $a^4 \geq 1$, $\dots$. Δηλαδή, η ακολουθία έχει άπειρους όρους ≤ -1 και άπειρους όρους ≥ 1 και, επομένως, δεν έχει όριο.
Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli στην ενότητα 1.1 συνεπάγεται ότι ισχύει

$$a^n \geq n(a-1) + 1$$

για κάθε n. Επειδή $n(a-1) + 1 \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to +\infty$.
Μπορούμε, επίσης, να βασιστούμε στον ορισμό του ορίου. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε n_0

ώστε να ισχύει $a^n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Τώρα, το $a^n > M$ συνεπάγεται από το $n > \log_a M$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \log_a M$ και, με έναν τέτοιο n_0, συνεπάγεται ότι ισχύει $n > \log_a M$ και, επομένως, $a^n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.
Τέλος, έστω $0 < |a| < 1$. Τότε $\frac{1}{|a|} > 1$, οπότε από την προηγούμενη περίπτωση συνεπάγεται $|a^n| = \frac{1}{(1/|a|)^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$. Άρα $a^n \to 0$.
Συμπέρασμα:[9]

$$a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ \to 1, & \text{αν } a = 1 \\ \to 0, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3.20. Η ακολουθία $(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$ ονομάζεται ακολουθία των **γεωμετρικών αθροισμάτων** με λόγο a. Το αποτέλεσμα είναι:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ \to 1/(1-a), & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Αν $a \geq 1$, τότε

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n \geq 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1.$$

Επειδή $n + 1 \to +\infty$, συνεπάγεται $1 + a + a^2 + \cdots + a^n \to +\infty$.
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις βασίζονται στο όριο της γεωμετρικής προόδου. Αν $-1 < a < 1$, τότε

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \tfrac{a^{n+1}-1}{a-1} \to \tfrac{0-1}{a-1} = \tfrac{1}{1-a}.$$

Έστω $a \leq -1$. Είδαμε ότι ισχύει $a^{n+1} = 1 + (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$ για κάθε n. Αν υποθέσουμε ότι $1 + a + a^2 + \cdots + a^n \to x \in \mathbb{R}$, τότε $a^{n+1} \to 1 + (a-1)x$. Όμως, η (a^{n+1}) δεν έχει όριο. Άρα η $(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$ δεν έχει όριο.

Παράδειγμα 2.3.21. Θα αποδείξουμε ότι

$$\log_a n \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ -\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα δούμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\log_a n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $a > 1$, το $\log_a n > M$ συνεπάγεται από το $n > a^M$. Όμως, γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε $n_0 > a^M$ και, τότε, με έναν τέτοιο n_0, ισχύει $\log_a n > M$ και, επομένως, $n > a^M$ για κάθε $n \geq n_0$.
Έστω $0 < a < 1$. Τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\log_a n = -\log_{1/a} n \to -(+\infty) = -\infty$.

Ας δούμε τώρα μερικά λίγο πιο δύσκολα - αλλά χρήσιμα - παραδείγματα ορίων.

Παράδειγμα 2.3.22. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad \text{αν } \ a > 0.$$

Η περίπτωση $a = 1$ είναι απλή: $\sqrt[n]{1} = 1 \to 1$.
Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται ότι ισχύει $(1+\frac{a-1}{n})^n \geq 1+n\frac{a-1}{n} = a$ και, επομένως, $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$ για κάθε n. Με παρεμβολή, $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \to \frac{1}{1} = 1$.

[9] Η άσκηση 2.4.9 περιέχει δεύτερη απόδειξη του ορίου της γεωμετρικής προόδου καθώς και των ακολουθιών στα παραδείγματα 2.3.22 έως 2.3.25.

Παράδειγμα 2.3.23. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται ότι ισχύει $(1 + \frac{\sqrt{n}-1}{n})^n \geq 1 + n\frac{\sqrt{n}-1}{n} = \sqrt{n}$ και, επομένως, $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq (1 + \frac{\sqrt{n}-1}{n})^2 < (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2$ για κάθε n. Άρα $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Η πρόταση 2.10 εκφράζει το λεγόμενο **κριτήριο λόγου για ακολουθίες** και είναι πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό κάποιων "περίεργων" ορίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.10. [10] *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.*
[α] *Αν $0 < b < 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$, τότε $x_n \to 0$.*
[β] *Αν $b > 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$, τότε $x_n \to +\infty$.*
[γ] *Αν $0 \leq a < 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to 0$.*
[δ] *Αν $a > 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to +\infty$.*

Απόδειξη. Όπως θα φανεί στην απόδειξη, *πίσω και από τα τέσσερα όρια κρύβεται μια "σύγκριση" με κατάλληλη γεωμετρική πρόοδο.*
[α] Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} x_{n_0} \leq b\,b \cdots b\,b\,x_{n_0} = b^{n-n_0} x_{n_0} = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}} b^n = c\,b^n,$$

όπου $c = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$. Επειδή $0 < b < 1$, συνεπάγεται $b^n \to 0$. Άρα $x_n \to 0$.
[β] Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} x_{n_0} \geq b\,b \cdots b\,b\,x_{n_0} = b^{n-n_0} x_{n_0} = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}} b^n = c\,b^n,$$

όπου $c = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$. Επειδή $b > 1$, συνεπάγεται $b^n \to +\infty$. Άρα $x_n \to +\infty$.
[γ] Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε b ώστε $a < b < 1$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$ και από το [α] συνεπάγεται $x_n \to 0$.
[δ] Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε b ώστε $a > b > 1$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$ και από το [β] συνεπάγεται $x_n \to +\infty$. □

Παράδειγμα 2.3.24. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{a^n}{n^k} \to +\infty \qquad \text{αν } \ a > 1 \ \text{ και } \ k \in \mathbb{N}.$$

Είναι $\frac{a^{n+1}/(n+1)^k}{a^n/n^k} = a\big(\frac{n}{n+1}\big)^k \to a$ και $a > 1$. Άρα $\frac{a^n}{n^k} \to +\infty$.
Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:
Οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδος (a^n) με λόγο $a > 1$ αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη (n^k).

Παράδειγμα 2.3.25. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{a^n}{n!} \to 0.$$

Αν $a = 0$, τότε, προφανώς, $\frac{a^n}{n!} = 0 \to 0$.
Έστω $a \neq 0$. Τότε $\frac{|a|^{n+1}/(n+1)!}{|a|^n/n!} = \frac{|a|}{n+1} \to 0$. Άρα $\frac{|a|^n}{n!} \to 0$ και, επομένως, $\frac{a^n}{n!} \to 0$. Δηλαδή:
Οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδος (a^n) με λόγο $a > 1$ αυξάνεται πιο αργά από το παραγοντικό $(n!)$.

[10] Μια χρήσιμη επέκταση αυτής της πρότασης είναι στην άσκηση 2.4.11.

Τα αποτελέσματα στην πρόταση 2.11 είναι κάπως γενικότερα από ανάλογα αποτελέσματα της πρότασης 2.9 και είναι χρήσιμο να τα έχουμε υπ' όψη μας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.11. [α] *Αν $x_n \to +\infty$ και η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, τότε $x_n + y_n \to +\infty$.*
Αν $x_n \to -\infty$ και η (y_n) είναι άνω φραγμένη, τότε $x_n + y_n \to -\infty$.
[β] *Αν $x_n \to 0$ και η (y_n) είναι φραγμένη, τότε $x_n y_n \to 0$.*
[γ] *Αν $x_n \to +\infty$ και η (y_n) έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, τότε $x_n y_n \to +\infty$.*
Αν $x_n \to -\infty$ και η (y_n) έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, τότε $x_n y_n \to -\infty$.
[δ] *Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n.*
Αν $x_n \to 0$ και η (x_n) είναι τελικά θετική, τότε $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.
Αν $x_n \to 0$ και η (x_n) είναι τελικά αρνητική, τότε $\frac{1}{x_n} \to -\infty$.
[ε] *Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n. Αν $|x_n| \to +\infty$, τότε $\frac{1}{x_n} \to 0$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x_n \to +\infty$ και έστω ότι η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε υπάρχει αριθμός l ώστε να ισχύει $y_n \geq l$ για κάθε n. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M - l$ και, επομένως, $x_n + y_n > (M - l) + l = M$. Άρα $x_n + y_n \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[β] Έστω $x_n \to 0$ και έστω ότι η (y_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|y_n| \leq M$ για κάθε n. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n| < \frac{\epsilon}{M+1}$ και, επομένως,

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq \tfrac{\epsilon M}{M+1} < \epsilon.$$

Άρα $x_n y_n \to 0$.
[γ] Έστω $x_n \to +\infty$ και έστω ότι η (y_n) έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, οπότε υπάρχει αριθμός $l > 0$ ώστε να ισχύει τελικά $y_n \geq l$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και, επομένως, ισχύει τελικά $x_n y_n > \frac{M}{l} l = M$. Άρα $x_n y_n \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[δ] Έστω $x_n \to 0$ και έστω ότι ισχύει τελικά $x_n > 0$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - 0| < \frac{1}{M}$. Άρα ισχύει τελικά $0 < x_n < \frac{1}{M}$ και, επομένως, $\frac{1}{x_n} > M$. Άρα $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[ε] Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και $|x_n| \to +\infty$. Τότε $\frac{1}{|x_n|} \to 0$ και, επομένως, $\frac{1}{x_n} \to 0$. □

Παράδειγμα 2.3.26. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε $\frac{x_n}{n} \to 0$.
Για παράδειγμα, $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} \to 0$. Επίσης: $\frac{n-3[n/3]}{n} \to 0$ και $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

Παράδειγμα 2.3.27. Για την ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ ισχύει $\big|(-1)^{n-1}n\big| = n \to +\infty$. Άρα $\frac{1}{(-1)^{n-1}n} \to 0$. Πράγματι, $\frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$. Παρατηρήστε ότι η αρχική ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν έχει όριο.

Τι γίνεται αν $x = 0$ στην πρόταση 2.9[ζ]; Θα δούμε το επόμενο παράδειγμα ως ευκαιρία για να κάνουμε κάποια σχόλια για τη φύση της απροσδιόριστης μορφής $\frac{1}{0}$.

Παράδειγμα 2.3.28. Ισχύει $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$, αλλά η αντίστροφη ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν έχει όριο.

Ποιό ακριβώς είναι το πρόβλημα με το παράδειγμα 2.3.28; Το πρόβλημα είναι η εναλλαγή προσήμων των όρων της ακολουθίας $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$ και, μάλιστα, όχι ακριβώς η εναλλαγή προσήμων των διαδοχικών όρων αλλά το ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί όροι και άπειροι αρνητικοί όροι.
Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο μηδέν και είναι τελικά θετική, τότε γνωρίζουμε ότι η $(\frac{1}{x_n})$ έχει όριο $+\infty$. Ομοίως, αν μια (x_n) έχει όριο μηδέν και είναι τελικά αρνητική, τότε η $(\frac{1}{x_n})$ έχει όριο $-\infty$. Από την άλλη μεριά, έστω ότι η (x_n) δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική, δηλαδή ότι έχει άπειρους θετικούς όρους και άπειρους αρνητικούς όρους. Από το $x_n \to 0$ συνεπάγεται το

$|x_n| \to 0$ και από αυτό συνεπάγεται το $\frac{1}{|x_n|} \to +\infty$. Άρα ισχύει τελικά $\frac{1}{|x_n|} \geq 1$, οπότε, λόγω της υπόθεσης για τα πρόσημα των όρων, ισχύει $\frac{1}{x_n} \geq 1$ για άπειρους n και ισχύει $\frac{1}{x_n} \leq -1$ για άπειρους n. Άρα η ακολουθία $(\frac{1}{x_n})$ δεν έχει όριο.

Μπορούμε, επομένως, να συμπεράνουμε ότι:

Η παράσταση $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή αν και μόνο αν το 0 εκφράζει το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική.

Αν με το σύμβολο $0+$ εκφράσουμε το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και είναι τελικά θετική και με το σύμβολο $0-$ εκφράσουμε το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και είναι τελικά αρνητική, τότε μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό, ο οποίος *εκφράζει συμβολικά το περιεχόμενο της πρότασης 2.11[δ].*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε*

$$\frac{1}{0+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0-} = -\infty.$$

Ο ορισμός αυτός θα μπορούσε να βρίσκεται μαζί με τους άλλους παρόμοιους ορισμούς στην ενότητα 1.1 και συμφωνεί απολύτως με την εμπειρία: αν μια ποσότητα είναι πολύ μικρή θετική, τότε η αντίστροφη ποσότητα είναι πολύ μεγάλη θετική και, αν μια ποσότητα είναι πολύ μικρή αρνητική, τότε η αντίστροφη ποσότητα είναι πολύ μεγάλη αρνητική.

Τέλος, θα διατυπώσουμε την πρόταση 2.12, αλλά θα την αποδείξουμε στην ενότητα 4.3. Η τυπική θέση της είναι εδώ, αλλά η απόδειξή της (αν και θα μπορούσε να γίνει στο σημείο αυτό) ταιριάζει καλύτερα στο πλαίσιο των εννοιών του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης. Ας θυμηθούμε από την ενότητα 1.4 τις απροσδιόριστες μορφές της δύναμης a^b. Αυτές είναι οι 0^0, $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, $(+\infty)^0$ και $0^{-\infty}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η* **δύναμη** *ακολουθίας (x_n) με εκθέτη την ακολουθία (y_n) είναι η ακολουθία $\big({x_n}^{y_n}\big)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.12. *Έστω $x_n > 0$ για κάθε n. Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν η δύναμη x^y δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε ${x_n}^{y_n} \to x^y$. Ακόμη, αν $x_n \to 0$ και $y_n \to -\infty$, τότε ${x_n}^{y_n} \to +\infty$.*

Παράδειγμα 2.3.29. Βάσει της πρότασης 2.12, μπορεί να αποδειχθεί το όριο $\sqrt[n]{a} \to 1$ όταν $a > 0$. Πράγματι, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και την ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Τότε $a \to a$ και $\frac{1}{n} \to 0$, οπότε $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \to a^0 = 1$.

Παράδειγμα 2.3.30. Η γεωμετρική πρόοδος (a^n) στις περιπτώσεις $a > 1$ και $0 < a < 1$ μπορεί, επίσης, να ενταχθεί στο πλαίσιο της πρότασης 2.12. Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και την ακολουθία (n). Επειδή $a \to a$ και $n \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to a^{+\infty}$, το οποίο είναι ίσο είτε με $+\infty$, αν $a > 1$, είτε με 0, αν $0 < a < 1$.

Παράδειγμα 2.3.31. Το όριο $\sqrt[n]{n} \to 1$ *δεν* αποδεικνύεται με την πρόταση 2.12. Αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες (n) και $(\frac{1}{n})$, τότε $n \to +\infty$ και $\frac{1}{n} \to 0$, αλλά η δύναμη $(+\infty)^0$ είναι απροσδιόριστη μορφή.

Παρά το ότι η παράσταση $0^{-\infty}$ είναι, όπως είπαμε, απροσδιόριστη μορφή, η τελευταία περίπτωση της πρότασης 2.12 μας οδηγεί στο επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε*

$$(0+)^{-\infty} = +\infty.$$

Ασκήσεις.

2.3.1. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(2n+1)^{106}}\big)$, $\big(\frac{-n^3+(-1)^n n^2+1}{3n^2+2(-1)^{n-1}n}\big)$, $\big(\frac{n(n+1)}{n+4} - \frac{4n^3}{4n^2+1}\big)$, $((1-n)^5 + n^4)$, $\big((\frac{-n^3+n+1}{3n^2+3n+1})^9\big)$, $\big(\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}\big)$, $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})$.

2.3.2. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών $(1+2+2^2+\cdots+2^n)$, $\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\big)$, $(1-2+2^2+\cdots+(-1)^n 2^n)$, $\big(\frac{2^7}{3^7}+\frac{2^8}{3^8}+\cdots+\frac{2^{n+6}}{3^{n+6}}\big)$, $\big(\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{2^{2n}}{3^{2n}}\big)$.

2.3.3. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\frac{2-1}{2+1}\,\frac{3-1}{3+1}\cdots\frac{n-1}{n+1}\big)$, $\big(\frac{2^3-1}{2^3+1}\,\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\big)$.

2.3.4. Αποδείξτε ότι για κάθε $x\neq -1$ η ακολουθία $\big(\frac{x^n-1}{x^n+1}\big)$ έχει όριο και υπολογίστε το.
Αποδείξτε ότι για κάθε x η ακολουθία $\big(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\big)$ έχει όριο και υπολογίστε το.

2.3.5. Για ποιές τιμές του x υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n}$;

2.3.6. Έστω $x\neq 1$ και έστω ότι ισχύει $x_n\neq 1$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $x_n\to x$ αν και μόνο αν $\frac{x_n}{1-x_n}\to\frac{x}{1-x}$.

2.3.7. [11] Αποδείξτε ότι $\frac{3+(-1)^n}{2n}\to 0$, ότι ισχύει $\frac{3+(-1)^n}{2n}>0$ για κάθε n και ότι η ακολουθία $\big(\frac{3+(-1)^n}{2n}\big)$ δεν είναι φθίνουσα.
Αποδείξτε ότι $\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}\to+\infty$ και ότι η ακολουθία $\big(\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}\big)$ δεν είναι αύξουσα.

2.3.8. Βρείτε το όριο της (x_n) αν ισχύει τελικά $n^2-2n<n^2x_n\leq n^2+3$.
Κάντε το ίδιο για καθεμιά από τις σχέσεις: $n+1\leq 2nx_n\leq n+2x_n+3$, $n^2+nx_n\leq 15n$ και $n^2{x_n}^2-2n(n-1)x_n+n^2-2n-3\leq 0$.

2.3.9. Έστω $x_n\to x\in\overline{\mathbb{R}}$ και $y_n\to y\in\overline{\mathbb{R}}$. Αν $x<y$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $x_n<y_n$.

2.3.10. Έστω $x_n\to x\in\overline{\mathbb{R}}$ και $y_n\to y\in\overline{\mathbb{R}}$ και $x\neq y$. Αν $|x-y|>a$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $|x_n-y_n|>a$.

2.3.11. Γνωρίζουμε ότι, αν ισχύει $x_n\in[l,u]$ για άπειρους n και $x_n\to x$, τότε $x\in[l,u]$. Υπάρχει παρόμοιο συμπέρασμα για το όριο x της (x_n), αν ισχύει $x_n\in(l,u)$ για άπειρους n; Ποιό είναι το γενικό συμπέρασμα σ' αυτήν την περίπτωση;

2.3.12. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.5[γ], αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών $\big(2^{(-1)^{n-1}}\big)$, $\big(\big(1+\frac{(-1)^{n-1}}{2}\big)^n\big)$, $\big((-1)^{n-1}+\frac{10}{n^3}\big)$, $\big((-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\big)$.

2.3.13. Αποδείξτε ότι $2n+(-1)^{n-1}n\to+\infty$, $2^{-2n+(-1)^{n-1}n}\to 0$, $\big(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{4}\big)^n\to 0$.

2.3.14. Αποδείξτε ότι $\big[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\big]\to+\infty$, $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}\to 1$ και $\frac{n+2}{3n^2-n+1}\big[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\big]\to 1$.

2.3.15. Αποδείξτε ότι $(1+\frac{1}{n})^{n^2}\to+\infty$, $(1-\frac{1}{n^2})^n\to 1$, $(1+\frac{1}{n^2})^n\to 1$.

2.3.16. [12] Αποδείξτε ότι $[nx]\to\begin{cases}+\infty, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x=0\\ -\infty, & \text{αν } x<0\end{cases}$ $[nx]-[ny]\to\begin{cases}+\infty, & \text{αν } x>y\\ 0, & \text{αν } x=y\\ -\infty, & \text{αν } x<y\end{cases}$

$$nx-[ny]\begin{cases}\to+\infty, & \text{αν } x>y\\ \to 0, & \text{αν } x=y\in\mathbb{Z}\\ \to-\infty, & \text{αν } x<y\\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } x=y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$$

2.3.17. Αποδείξτε ότι $\frac{(2n)!}{(n!)^2}\to+\infty$.

2.3.18. Έστω $0\leq a\leq b\leq c$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n+b^n}\to b$, $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\to c$.

[11] Αν κάποιοι θετικοί αριθμοί πλησιάζουν τον 0 ή απομακρύνονται προς το $+\infty$, έχουμε την *αυθόρμητη* αλλά *εσφαλμένη* τάση να θεωρούμε ότι αυτοί, αντιστοίχως, φθίνουν ή αυξάνονται.

[12] Με την περίπτωση $x=y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ του τελευταίου ορίου ασχολείται η άσκηση 2.7.18.

2.3.19. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{n^3} \to 1$, $\sqrt[n]{n^4 + 3n^2 + n + 1} \to 1$.

2.3.20. Για κάθε a, αποδείξτε ότι $\frac{[a]+[2a]+\cdots+[na]}{n^2} \to \frac{a}{2}$.

2.3.21. Αποδείξτε ότι $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \to 1$ και $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1$.

2.3.22. Αποδείξτε ότι $\lim_{m\to+\infty}\big(\lim_{n\to+\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}\big) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

2.3.23. Ποιά είναι τα πιθανά όρια της ακολουθίας (x_n) αν ικανοποιεί οποιονδήποτε από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους: $x_{n+1} = -x_n+2$, $x_{n+3} = x_n-3$, $x_{n+1} = {x_n}^2-2$, $x_{n+2} = -{x_n}^2+2$, $x_{n+1} = {x_n}^2 + 3$, $x_{n+2} = x_{n+1} + {x_n}^3$;

2.3.24. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, αποδείξτε ότι $\max\{x_n, y_n\} \to \max\{x, y\}$ και $\min\{x_n, y_n\} \to \min\{x, y\}$.

2.3.25. Βρείτε το λάθος: $n\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ (n φορές) $\to 0 + \cdots + 0$ (n φορές) $= n0 = 0$.
Βρείτε το λάθος: $(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})\cdots(1 + \frac{1}{n})$ (n φορές) $\to 1\cdots 1$ (n φορές) $= 1^n = 1$.
Ποιά είναι η σχέση των δυο “ορίων” με την πρόταση 2.9[γ,ε];

2.3.26. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} \geq x_1 + \cdots + x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $0 < a < 2$, αποδείξτε ότι $\frac{x_n}{a^n} \to +\infty$. Για την περίπτωση $a = 2$ εξετάστε την ακολουθία (2^n).

2.3.27. Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n + y_n)$ να έχει όριο.
Βρείτε (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η (x_ny_n) να έχει όριο.

2.3.28. Αν η $(x_n + y_n)$ έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.
Αν η (x_ny_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.

2.3.29. [13] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ και η $(x_n + y_n)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.
Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η (x_ny_n) (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.
Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ και η $(\frac{x_n}{y_n})$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.
Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και η $(\frac{x_n}{y_n})$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $(\frac{x_n}{y_n})$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

2.3.30. [14] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;
Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;
Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to -\infty$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \{+\infty, -\infty\}$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in \mathbb{R}$;

2.3.31. Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε να ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n, $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η (x_ny_n) να μην έχει όριο.

---

[13] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών.

[14] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών δύναμης. Συνεχίζεται στην άσκηση 2.4.10.

2.3.32. Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$.
Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία αρρήτων (t_n) ώστε $t_n \to x$.
Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία ρητών (r_n) και *γνησίως φθίνουσα* ακολουθία ρητών (s_n) ώστε $r_n \to x$ και $s_n \to x$. Τα ίδια γίνονται και με ακολουθίες αρρήτων.

2.3.33. Έστω μη-κενό σύνολο A.
Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$ και ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μεγαλύτερο του $\sup A$. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα για το $\inf A$.
Για καθένα από τα $[0,2]$, $[0,2)$, $\{2\}$, $[0,1]\cup\{2\}$ βρείτε διάφορες ακολουθίες στο σύνολο οι οποίες συγκλίνουν στο supremum του συνόλου. Παρατηρήστε ότι για το πρώτο, το τρίτο και το τέταρτο σύνολο υπάρχει ως επιλογή ο απλούστερος τύπος ακολουθίας (δηλαδή μια σταθερή ακολουθία) η οποία, όμως, δεν υφίσταται ως επιλογή για το δεύτερο σύνολο. Παρατηρήστε, επίσης, ότι για το τρίτο σύνολο υπάρχει μια μόνο επιλογή ακολουθίας, ενώ για το τέταρτο σύνολο οι μόνες επιλογές είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες.
Για καθένα από τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, $(0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $(0,2)\cap\mathbb{Q}$ βρείτε δυο όσο το δυνατό πιο απλές ακολουθίες στο σύνολο, μια με όριο το supremum και μια με όριο το infimum του συνόλου.

2.3.34. Έστω μη-κενό σύνολο A και u άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $u = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο τον u. Προσαρμόστε το συμπέρασμα αυτό για το $\inf A$ και για κάτω φράγμα l του A.

2.3.35. Έστω μη-κενό σύνολο A.
Αν $\sup A \in A$ βρείτε μια όσο το δυνατό πιο απλή ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.
Αν $\sup A \notin A$, αποδείξτε ότι υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.
Προσαρμόστε τα προηγούμενα για το $\inf A$.

2.3.36. Έστω $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$ και έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n.
Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to \sqrt[k]{x}$.
Αν $x_n \to +\infty$, αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to +\infty$.
Μην χρησιμοποιήσετε την πρόταση 2.12.

2.3.37. Έστω ότι ισχύει $|x_n - x_m| \geq 1$ για κάθε n,m με $n\neq m$. Αποδείξτε ότι $|x_n| \to +\infty$. Έχει η (x_n) όριο; Εξετάστε ως παραδείγματα τις ακολουθίες (n), $(-n)$, $((-1)^{n-1}n)$.

2.3.38. Αν $x_n \to x$ και ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\} = x$.
Αν $x < y$ και ισχύει $x_n < y$ για κάθε n και $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n|n\in\mathbb{N}\} < y$.

2.3.39. Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι για κάθε k ισχύει $\inf\{x_n\,|\,n\geq k\} \leq x \leq \sup\{x_n\,|\,n\geq k\}$.

2.3.40. Έστω $x_n \to x$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει μέγιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \geq x$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει ελάχιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \leq x$.

2.3.41. [15] [α] Αποδείξτε το **θεώρημα του Cesáro**: *Αν* $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to x$.
Αν ισχύει $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$.
Αν ισχύει $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to +\infty$.
Και οι δυο προηγούμενες ακολουθίες (x_n) δεν έχουν όριο. Συμπεράνατε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Cesáro.
[β] Αν $a_{n+1} - a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{n} \to a$.

[15] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 2.7.13.

[γ] Αποδείξτε την γενίκευση του θεωρήματος του Cesáro: [16] *Έστω ακολουθίες* (x_n), (y_n) *ώστε να ισχύει* $y_n > 0$ *για κάθε* n *και* $y_1 + \cdots + y_n \to +\infty$. *Αν* $\frac{x_n}{y_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $\frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \to l$.
[δ] Αν ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και $x_n \to x \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \to x$.
[ε] Αν ισχύει $a_n > 0$ για κάθε n και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to a$.
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $(\sqrt[n]{n})$, $(\sqrt[n]{n!})$ και $(\sqrt[n]{(2n)!/(n!)^2})$.

2.4 Μονότονες ακολουθίες.

Το θεώρημα 2.1 είναι πολύ σημαντικό. Το κυριότερο συμπέρασμά του είναι ότι κάθε *μονότονη* ακολουθία *έχει* όριο και ότι, αν μια μονότονη ακολουθία είναι φραγμένη, τότε το όριό της είναι αριθμός και, αν μια μονότονη ακολουθία δεν είναι φραγμένη, τότε το όριό της είναι ένα από τα $\pm\infty$. Τέτοιο συμπέρασμα δεν ισχύει για μη-μονότονες ακολουθίες: η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αν και είναι φραγμένη δεν έχει όριο και η $((-1)^{n-1}n)$ αν και δεν είναι φραγμένη δεν έχει όριο.

Βάσει του θεωρήματος 2.1 μπορούμε να συμπεράνουμε για μια δοσμένη ακολουθία ότι έχει όριο αρκεί μόνο να ελέγξουμε ότι είναι μονότονη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. [17] *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Πιο συγκεκριμένα:*
[α] *Αν η ακολουθία* (x_n) *είναι αύξουσα, τότε* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Δηλαδή: η (x_n) *είτε δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο* $+\infty$, *είτε είναι άνω φραγμένη, οπότε συγκλίνει. Και στις δυο περιπτώσεις το όριό της ισούται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της.*
[β] *Αν η ακολουθία* (x_n) *είναι φθίνουσα, τότε* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Δηλαδή: η (x_n) *είτε δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο* $-\infty$, *είτε είναι κάτω φραγμένη, οπότε συγκλίνει. Και στις δυο περιπτώσεις το όριό της ισούται με το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε το μη-κενό σύνολο $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Αν αυτό είναι άνω φραγμένο (δηλαδή αν η ακολουθία είναι άνω φραγμένη) τότε το supremum του είναι αριθμός ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο (δηλαδή αν η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη) τότε το supremum του είναι το $+\infty$.
Έστω ότι η ακολουθία (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε

$$\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to +\infty$.
Έστω $M > 0$. Επειδή ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, υπάρχει n_0 ώστε $x_{n_0} > M$.
Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x_n \geq x_{n_0} > M$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n \to +\infty$.
Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι άνω φραγμένη. Ορίζουμε

$$x = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x - \epsilon < x$, ο $x - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε $x - \epsilon < x_{n_0}$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n$$

[16] Έχουμε το θεώρημα του Cesáro όταν $y_n = 1$ για κάθε n.
[17] Για την ακριβή σχέση αυτού του θεωρήματος με την ιδιότητα supremum δείτε την άσκηση 2.4.17.

για κάθε $n \geq n_0$. Ακόμη, επειδή ο x είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ισχύει

$$x_n \leq x < x + \epsilon$$

για κάθε n. Άρα ισχύει

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n \to x$.
[β] Ομοίως. □

Ας δούμε ένα χρήσιμο συμπλήρωμα του θεωρήματος 2.1. Αν μια ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 2.1, η (x_n) συγκλίνει και το όριό της, έστω x, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της. Επομένως, ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή, τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Πράγματι, αν ήταν $x_{n_0} = x$ για κάποιον n_0, τότε (επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα) θα ίσχυε $x = x_{n_0} \leq x_n \leq x$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, η ακολουθία θα ήταν τελικά σταθερή. Ειδικώτερα, αν η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Τα ανάλογα ισχύουν για φθίνουσες ακολουθίες. Συμπέρασμα:

Αν η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και $x_n \to x$, τότε ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή (και, ειδικώτερα, αν είναι γνησίως αύξουσα), τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n.

Αν η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to x$, τότε ισχύει $x_n \geq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή (και, ειδικώτερα, αν είναι γνησίως φθίνουσα), τότε ισχύει $x_n > x$ για κάθε n.

Το θεώρημα 2.1 δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του ορίου μονότονης ακολουθίας. Όμως, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μια ακολουθία *έχει* όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιο τρόπο (ανάλογα με την περίπτωση) να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου.[18]

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω ακολουθία (x_n) η οποία καθορίζεται από τον πρώτο όρο $x_1 = 1$ και από τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = \tfrac{3x_n+6}{x_n+4} \qquad \text{για } \ n \geq 1.$$

Οι αρχικοί όροι της ακολουθίας είναι οι

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{9}{5}, \quad x_3 = \tfrac{57}{29}, \quad x_4 = \tfrac{345}{173}.$$

Για να ορίζεται, πράγματι, μια τέτοια ακολουθία πρέπει να βεβαιωθούμε ότι κανείς όρος της δεν θα πάρει την τιμή -4, διότι σε μια τέτοια περίπτωση δεν θα μπορούσε να υπολογιστεί ο αμέσως επόμενος όρος. Εύκολα βλέπουμε, όμως, ότι ισχύει

$$x_n \geq 0$$

για κάθε n. Πράγματι, ισχύει $x_1 = 1 \geq 0$ και, αν υποτεθεί ότι ισχύει $x_n \geq 0$, τότε, προφανώς, από τον αναδρομικό τύπο θα ισχύει και $x_{n+1} \geq 0$.
Από τους αρχικούς όρους υποψιαζόμαστε ότι η ακολουθία μπορεί να είναι αύξουσα, οπότε εξετάζουμε την διαφορά $x_{n+1} - x_n$ ως εξής:

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{3x_n+6}{x_n+4} - \tfrac{3x_{n-1}+6}{x_{n-1}+4} = \tfrac{6(x_n - x_{n-1})}{(x_n+4)(x_{n-1}+4)}.$$

Βλέπουμε ότι το πρόσημο της διαφοράς $x_{n+1} - x_n$ είναι ανεξάρτητο του n και, επειδή $x_2 - x_1 > 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_{n+1} - x_n > 0$ για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.
Από την σχέση $x_{n+1} > x_n$ και τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι ισχύει $\frac{3x_n+6}{x_n+4} > x_n$ και, επομένως, ${x_n}^2 + x_n - 6 < 0$ ή, ισοδύναμα, $-3 < x_n < 2$ για κάθε n. Δηλαδή, η (x_n) εκτός από γνησίως

[18] Δείτε, για παράδειγμα, την άσκηση 2.3.23.

αύξουσα είναι και φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Έστω, λοιπόν, ότι $x_n \to x$. Από το ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n συνεπάγεται $x \geq 0$ και, τώρα, από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται

$$x = \tfrac{3x+6}{x+4}.$$

Άρα $x = -3$ ή $x = 2$ και, επειδή $x \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $x = 2$. Δηλαδή, $x_n \to 2$.
Μάλιστα, επειδή η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n < 2$ για κάθε n.

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι χειρισμού αυτού του παραδείγματος. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες:
Πρώτος τρόπος: Αφού αποδείξουμε ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n και ότι η (x_n) είναι αύξουσα (όπως παραπάνω), συμπεραίνουμε ότι η (x_n) έχει όριο. Αν $x_n \to +\infty$, τότε, επειδή από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται ότι ισχύει $x_{n+1} = \frac{3+(6/x_n)}{1+(4/x_n)}$ για κάθε n, βρίσκουμε $+\infty = 3$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η (x_n) είναι φραγμένη και, όπως παραπάνω, αποδεικνύουμε ότι $x_n \to 2$.
Δεύτερος τρόπος: Παρατηρούμε τους πρώτους όρους. Είναι $x_1 = 1$, $x_2 = 1.8$, $x_3 = 1.9655\ldots$ και $x_4 = 1.994219\ldots$. Έτσι υποψιαζόμαστε ότι η (x_n) συγκλίνει στον 2, ότι είναι γνησίως αύξουσα και ότι ισχύει $x_n < 2$ για κάθε n. Αποδεικνύουμε με επαγωγή την τρίτη σχέση και, κατόπιν, και με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου, αποδεικνύουμε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και ότι συγκλίνει στον 2.

Ακολουθούν δυο πάρα πολύ σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.4.2. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big)$ συγκλίνει.
Θέτουμε $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ για κάθε n.
Είναι φανερό ότι ισχύει

$$x_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \tfrac{1}{(n+1)!} = x_n + \tfrac{1}{(n+1)!} > x_n$$

για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.
Τώρα, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$n! \geq 2^{n-1}$$

για κάθε n. Πράγματι, για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα και για $n \geq 2$ είναι $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$.
Επομένως,

$$x_n \leq 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \tfrac{1-(1/2^n)}{1-(1/2)} < 1 + \tfrac{1}{1-(1/2)} = 3.$$

για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.4.3. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$ συγκλίνει και, μάλιστα, ότι το όριό της ταυτίζεται με το όριο της προηγούμενης ακολουθίας.[19]
Θέτουμε $a_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ για κάθε n.
Βάσει του διωνυμικού τύπου του Newton (στην ενότητα 1.1) με $x = \frac{1}{n}$ και $y = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \tbinom{n}{1}\tfrac{1}{n} + \tbinom{n}{2}\tfrac{1}{n^2} + \cdots + \tbinom{n}{k}\tfrac{1}{n^k} + \cdots + \tbinom{n}{n}\tfrac{1}{n^n} \\ &= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n})\cdots(1 - \tfrac{k-1}{n}) \\ &\quad + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n})\cdots(1 - \tfrac{n-1}{n}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

και, ομοίως, για τον $n+1$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \tbinom{n+1}{1}\tfrac{1}{n+1} + \tbinom{n+1}{2}\tfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \tbinom{n+1}{k}\tfrac{1}{(n+1)^k} + \cdots + \tbinom{n+1}{n}\tfrac{1}{(n+1)^n} \\ &\quad + \tbinom{n+1}{n+1}\tfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n+1}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n+1})(1 - \tfrac{2}{n+1})\cdots(1 - \tfrac{k-1}{n+1}) \\ &\quad + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n+1})\cdots(1 - \tfrac{n-1}{n+1}) + \tfrac{1}{(n+1)!}(1 - \tfrac{1}{n+1})\cdots(1 - \tfrac{n-1}{n+1})(1 - \tfrac{n}{n+1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

[19] Ένας εναλλακτικός τρόπος χειρισμού της ακολουθίας αυτής είναι στην άσκηση 2.4.4.

Τώρα συγκρίνουμε τα τελικά αθροίσματα στις (2.2) και (2.3). Για κάθε k με $2 \le k \le n$, ο k-οστός όρος στο τελικό άθροισμα της (2.2) είναι μικρότερος από τον k-οστό όρο στο τελικό άθροισμα της (2.3), διότι για να περάσουμε από τον πρώτο στον δεύτερο αντικαθιστούμε σε κάθε παρένθεση του πρώτου τον παρονομαστή n με τον παρονομαστή $n+1$. Επίσης, το τελικό άθροισμα της (2.3) έχει έναν επιπλέον *θετικό* όρο, αυτόν που αντιστοιχεί στον $k = n+1$. Άρα

$$a_n < a_{n+1}$$

για κάθε n, οπότε η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.
Θεωρούμε πάλι $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ για κάθε n, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.
Γνωρίζουμε ότι η (x_n) συγκλίνει και ότι ισχύει $x_n < 3$ για κάθε n.
Επειδή όλες οι παρενθέσεις στο τελικό άθροισμα της (2.2) είναι > 0 και < 1, ισχύει

$$a_n \le 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{k!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} = x_n < 3 \tag{2.4}$$

για κάθε n. Άρα η ακολουθία (a_n) είναι, εκτός από γνησίως αύξουσα, και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Ας συμβολίσουμε a το όριο της (a_n). Δηλαδή

$$a_n \to a.$$

Τώρα σταθεροποιούμε, προσωρινά, τον k στο τελικό άθροισμα της (2.2) και, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k-οστό, βρίσκουμε

$$a_n \ge 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε (με τον σταθεροποιημένο k)

$$a \ge 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{k!} = x_k.$$

Αυτό ισχύει, λοιπόν, για κάθε k και, με αλλαγή συμβολισμού, $a \ge x_n$ για κάθε n. Από αυτό και από την (2.4) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$a_n \le x_n \le a$$

για κάθε n και, επειδή $a_n \to a$, συνεπάγεται

$$x_n \to a.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Σύμφωνα με τα παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3, οι ακολουθίες* $\big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big)$ *και* $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$ *συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Το κοινό όριο των δυο ακολουθιών το συμβολίζουμε με το γράμμα* e. *Δηλαδή, ορίζουμε*

$$e = \lim_{n\to+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)^n = \lim_{n\to+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}\big).$$

Πρέπει να τονιστεί ότι ο αριθμός e *ορίζεται* να είναι το κοινό όριο των δυο συγκεκριμένων ακολουθιών $\big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big)$ και $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$. *Δεν αποδεικνύεται* ότι ο e είναι ίσος με το όριο των δυο ακολουθιών, διότι ο e δεν είναι κάποιος εκ των προτέρων γνωστός αριθμός.

Επειδή η ακολουθία $((1 + \frac{1}{n})^n)$ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ για κάθε n. Ομοίως, ισχύει $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e$ για κάθε n.

Τώρα, ας πούμε δυο λόγια για την όχι τόσο γνωστή απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$ (δείτε στην ενότητα 1.4 και στο τέλος της ενότητας 2.3). Στην περίπτωση $x_n \to 1$ και $y_n \to +\infty$ συχνά καταλήγει κανείς στο λανθασμένο συμπέρασμα: ${x_n}^{y_n} \to 1$. Η "λογική διαδρομή" φαίνεται να είναι η: ${x_n}^{y_n} \to 1^{y_n} = 1 \to 1$ ή κάτι τέτοιο. *Δείτε, όμως, πώς το όριο* $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ *ακυρώνει ένα τέτοιο συμπέρασμα*. Πράγματι, έχουμε $1 + \frac{1}{n} \to 1$ και $n \to +\infty$ αλλά *δεν* συνεπάγεται $(1 + \frac{1}{n})^n \to 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ονομάζουμε* **φυσικούς λογαρίθμους** *τους λογαρίθμους με βάση τον* e *και χρησιμοποιούμε για κάθε* $y > 0$, *αντί του* $\log_e y$, *τα απλούστερα σύμβολα*

$$\log y \quad \textit{ή} \quad \ln y.$$

Η πρόταση 2.13 είναι, φυσικά, εξειδίκευση της πρότασης 1.9.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.13. [α] $\log(y_1y_2)=\log y_1+\log y_2$ *για κάθε* $y_1,y_2>0$.
[β] $\log(y^z)=z\log y$ *για κάθε* $y>0$ *και κάθε* z.
[γ] $\log_a y=\frac{\log y}{\log a}$ *για κάθε* $y>0$ *και κάθε* $a>0$, $a\neq 1$.
[δ] $\log 1=0$, $\log e=1$.
[ε] *Αν* $0<y_1<y_2$, *τότε* $\log y_1<\log y_2$.

Έχουμε ακόμη δυο σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.4.4. Θα αποδείξουμε ότι[20]

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\to+\infty.$$

Θέτουμε $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}>0$ για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο.
Παρατηρούμε ότι για κάθε n ισχύει

$$x_{2n}-x_n=\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{n+n}\geq\tfrac{1}{n+n}+\cdots+\tfrac{1}{n+n}=n\,\tfrac{1}{n+n}=\tfrac{1}{2}.$$

Αν το όριο της (x_n) είναι αριθμός x, τότε, επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n\leq x_{2n}\leq x$ για κάθε x. Επειδή $x_n\to x$, συνεπάγεται $x_{2n}\to x$. Άρα $x_{2n}-x_n\to x-x=0$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ισχύει $x_{2n}-x_n\geq\frac{1}{2}$ για κάθε n.
Άρα $x_n\to+\infty$.
Υπάρχει άλλος ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι $x_n\to+\infty$ τον οποίο αξίζει να μνημονεύσουμε. Κατ' αρχάς, για κάθε φυσικό n υπάρχει μοναδικός ακέραιος $k\geq 0$ έτσι ώστε $2^k\leq n<2^{k+1}$. Δηλαδή, ο n είναι ανάμεσα σε δυο διαδοχικές δυνάμεις του 2. Πράγματι, η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την $k\leq\log_2 n<k+1$, οπότε ο ακέραιος που ζητάμε είναι ο $k=[\log_2 n]$. Τώρα, με αυτόν τον k, έχουμε

$$\begin{aligned}x_n&=1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+\cdots+(\tfrac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\tfrac{1}{2^k})+\tfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\tfrac{1}{n}\\&\geq 1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8})+\cdots+(\tfrac{1}{2^k}+\cdots+\tfrac{1}{2^k})\\&=1+\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{4}+4\tfrac{1}{8}+\cdots+2^{k-1}\tfrac{1}{2^k}\\&=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{2}=1+\tfrac{k}{2}.\end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$x_n\geq 1+\tfrac{1}{2}[\log_2 n]>1+\tfrac{1}{2}(\log_2 n-1)=\tfrac{1}{2}\log_2 n+\tfrac{1}{2}$$

για κάθε n και, επειδή $\log_2 n\to+\infty$, συνεπάγεται $x_n\to+\infty$.

Παράδειγμα 2.4.5. Θα αποδείξουμε ότι[21]

$$\text{Η ακολουθία}\quad\big(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\cdots+\tfrac{1}{n^2}\big)\quad\text{συγκλίνει.}$$

Θέτουμε $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$ για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$x_n\leq 1+\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\tfrac{1}{(n-1)n}=1+(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+\cdots+(\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n})=2-\tfrac{1}{n}<2$$

για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.

[20]Άλλοι τρόποι αντιμετώπισης της ακολουθίας αυτής είναι στις ασκήσεις 2.5.4, 2.6.2 και 7.3.20 και στα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1. Σχετικές είναι και οι ασκήσεις 2.4.6, 6.4.11.

[21]Για εναλλακτικούς τρόπους δείτε τα παραδείγματα 2.6.1, 8.2.7 και 8.2.10 και τις ασκήσεις 6.4.11, 7.3.20 και 8.2.1.

ΕΓΚΙΒΩΤΙΣΜΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ. *Έστω ακολουθία διαστημάτων* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$ *ώστε να ισχύει* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ *για κάθε* n. *Ισοδύναμα, έστω αύξουσα ακολουθία* (a_n) *και φθίνουσα ακολουθία* (b_n) *ώστε να ισχύει* $a_n \leq b_n$ *για κάθε* n. *Τότε:*

(i) *οι ακολουθίες* (a_n) *και* (b_n) *συγκλίνουν.*

(ii) *υπάρχει τουλάχιστον ένας* x *ώστε να ισχύει* $a_n \leq x \leq b_n$ *για κάθε* n.

(iii) *υπάρχει μοναδικός* x *με την ιδιότητα που αναφέρεται στο* (ii) *αν και μόνο αν* $b_n - a_n \to 0$.

Στην περίπτωση (iii), *οι* (a_n), (b_n) *έχουν το ίδιο όριο και ο μοναδικός* x *είναι το κοινό όριο των δυο ακολουθιών.*

Απόδειξη. Επειδή η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα, ισχύει

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$$

για κάθε n, οπότε η (a_n) είναι, εκτός από αύξουσα, άνω φραγμένη (από τον b_1 για παράδειγμα) και η (b_n) είναι, εκτός από φθίνουσα, κάτω φραγμένη (από τον a_1 για παράδειγμα). Άρα και οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν και έστω

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b.$$

Επειδή ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \leq b$. Λόγω της μονοτονίας των δυο ακολουθιών, ισχύει

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

για κάθε n.

Για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n$ για κάθε n. Αντιστρόφως, αν για κάποιον x ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε n, τότε $a \leq x \leq b$, δηλαδή $x \in [a, b]$.

Άρα οι x για τους οποίους ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε n είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[a, b]$. Επομένως, υπάρχει μοναδικός τέτοιος x αν και μόνο αν το διάστημα $[a, b]$ είναι μονοσύνολο ή, ισοδύναμα, $a = b$ ή, ισοδύναμα, $b_n - a_n \to 0$. Στην περίπτωση αυτή ο μοναδικός x είναι ο $x = a = b$. □

Το $a_n \leq x \leq b_n$ είναι, φυσικά, ισοδύναμο με το $x \in [a_n, b_n]$. Επομένως, το να ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε n σημαίνει ότι ο x ανήκει σε όλα τα διαστήματα $[a_n, b_n]$, δηλαδή στην τομή των διαστημάτων αυτών. Άρα μέσα στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης βρίσκεται το εξής συμπέρασμα:

Αν τα διαστήματα $[a_n, b_n]$ *είναι εγκιβωτισμένα, τότε*

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] = [a, b],$$

όπου $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ *και* $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Παράδειγμα 2.4.6. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x \in [0, 1)$, δηλαδή

$$0 \leq x < 1. \tag{2.5}$$

Προφανώς, ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από τα p διαδοχικά διαστήματα

$$\big[0, \tfrac{1}{p}\big), \big[\tfrac{1}{p}, \tfrac{2}{p}\big), \ldots, \big[\tfrac{p-1}{p}, 1\big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p}$. Πώς βρίσκουμε σε ποιό από αυτά τα διαστήματα ανήκει ο x; Γράφουμε $\frac{k}{p} \leq x < \frac{k+1}{p}$ και λύνουμε ως προς $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Πράγματι, έχουμε, ισοδύναμα, $k \leq px < k+1$ και, επομένως, η λύση είναι $k = [px]$. Για να ελέγξουμε αν όντως ο συγκεκριμένος k είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$ παρατηρούμε ότι από την υπόθεση (2.5) συνεπάγεται $0 \leq$

$px < p$, οπότε το ακέραιο μέρος του px είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_1 = [px]$ (δηλαδή τον k που βρήκαμε) και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p} \qquad \text{για κάποιον } \ x_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{2.6}$$

Τώρα, χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{x_1}{p}, \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p})$, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{p}$, στα p διαδοχικά διαστήματα

$$\big[\tfrac{x_1}{p}, \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{1}{p^2}\big), \big[\tfrac{x_1}{p} + \tfrac{1}{p^2}, \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{2}{p^2}\big), \ldots, \big[\tfrac{x_1}{p} + \tfrac{p-1}{p^2}, \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{1}{p}\big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p^2}$. Ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα και, όπως πριν, γράφουμε $\frac{x_1}{p} + \frac{k}{p^2} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{k+1}{p^2}$ και βρίσκουμε $k \leq p^2x - px_1 < k+1$, δηλαδή $k = [p^2x - px_1]$. Από την (2.6) συνεπάγεται $0 \leq p^2x - px_1 < p$ και, επομένως, το ακέραιο μερος του $p^2x - px_1$ είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_2 = [p^2x - px_1]$ (δηλαδή τον k που βρήκαμε) και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \frac{1}{p^2} \qquad \text{για κάποιους } \ x_1, x_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Έστω ότι στο n-οστό στάδιο έχουμε καταλήξει στο ότι

$$\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n} \qquad \text{για κάποιους } \ x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{2.7}$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}, \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n})$, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{p^n}$, σε p διαδοχικά διαστήματα της μορφής $[\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k}{p^{n+1}}, \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k+1}{p^{n+1}})$ με $k = 0, 1, \ldots, p-1$, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p^{n+1}}$. Ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα και για να το βρούμε γράφουμε $\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k}{p^{n+1}} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k+1}{p^{n+1}}$ και βρίσκουμε $k \leq p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n < k+1$ δηλαδή $k = [p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n]$. Από την (2.7) συνεπάγεται $0 \leq p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n < p$, οπότε το ακέραιο μερος του $p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n$ είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_{n+1} = [p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n]$ και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} \qquad \text{για κάποιους } x_1, \ldots, x_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Άρα, με αυτόν τον τρόπο, από τον οποιονδήποτε $x \in [0, 1)$ ορίζονται τρεις ακολουθίες: η (x_n), η (s_n) και η (t_n). Οι δυο τελευταίες ορίζονται για κάθε n με τους τύπους:

$$s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}, \qquad t_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n}.$$

Είδαμε ότι, για κάθε n, ο x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots, p-1$ και ότι ισχύει

$$s_n \leq x < t_n \tag{2.8}$$

για κάθε n. Επίσης, από τον τρόπο κατασκευής των ακολουθιών αυτών έχουμε ότι κάθε διάστημα $[s_n, t_n)$ περιέχει το επόμενο διάστημα $[s_{n+1}, t_{n+1})$. Δηλαδή, η (s_n) είναι αύξουσα και η (t_n) είναι φθίνουσα. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε ανεξάρτητα και ως εξής:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \geq s_n\,, \quad t_{n+1} = \Big(t_n - \frac{1}{p^n}\Big) + \Big(\frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}}\Big) \leq t_n - \frac{1}{p^n} + \frac{p-1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} = t_n.$$

Επομένως, οι ακολουθίες (s_n) και (t_n) ικανοποιούν τις υποθέσεις της πρότασης με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα. Μάλιστα, είναι

$$t_n - s_n = \frac{1}{p^n} \to 0,$$

οπότε οι (s_n), (t_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Ποιό είναι αυτό το κοινό όριο; Μα από την (2.8) αμέσως συνεπάγεται ότι

$$s_n \to x, \qquad t_n \to x.$$

Η ακολουθία (x_n) έχει μια επιπλέον αξιοσημείωτη ιδιότητα: *δεν είναι τελικά σταθερή* $p-1$.
Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n = p-1$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$t_{n+1} = \left(t_n - \tfrac{1}{p^n}\right) + \left(\tfrac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}}\right) = t_n - \tfrac{1}{p^n} + \tfrac{p-1}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}} = t_n.$$

Άρα η (t_n) είναι τελικά σταθερή και, επειδή $t_n \to x$, ισχύει τελικά $t_n = x$. Αυτό αντιφάσκει με την (2.8).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η (x_n) ονομάζεται ακολουθία των p-**αδικών ψηφίων** του x.*
*Η (s_n) ονομάζεται ακολουθία των p-**αδικών προσεγγίσεων (καθ' έλλειψιν)** του x και η (t_n) ακολουθία των p-**αδικών προσεγγίσεων καθ' υπεροχήν** του x.*

Μερικές απλές περιπτώσεις είναι:
η περίπτωση $p=2$ με τα δυαδικά ψηφία $0,1$,
η περίπτωση $p=3$ με τα τριαδικά ψηφία $0,1,2$,
η περίπτωση $p=10$ με τα δεκαδικά ψηφία $0,1,\ldots,9$ και
η περίπτωση $p=16$ με τα δεκαεξαδικά ψηφία $0,1,\ldots,14,15$.
Οι ακολουθίες των p-αδικών προσεγγίσεων θα μελετηθούν πληρέστερα στο κεφάλαιο 8.

Ασκήσεις.

2.4.1. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\left(\frac{2^n n!}{n^n}\right)$ και $\left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)$.

2.4.2. Με τα σύμβολα του παραδείγματος 2.4.2, αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 4$ ισχύει $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} \leq x_n \leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ και συμπεράνατε ότι $2 < \frac{32}{12} \leq e \leq \frac{35}{12} < 3$.

2.4.3. [22] Με επαγωγή ως προς τον k, αποδείξτε ότι $(1+\frac{k}{n})^n \to e^k$ (όταν $n \to +\infty$, φυσικά) για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Να αποδείξετε το όριο $(1+\frac{k}{n})^n \to e^k$ γενικότερα για $k \in \mathbb{Z}$.

2.4.4. [23] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ είναι αύξουσα, με δεύτερο τρόπο, ως εξής: μετατρέψτε την ανισότητα $(1+\frac{1}{n})^n \leq (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ σε $\frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$ και αποδείξτε την τελευταία με την ανισότητα του Bernoulli.
Αποδείξτε με όμοιο τρόπο ότι η ακολουθία $\left((1+\frac{1}{n})^{n+1}\right)$ είναι φθίνουσα.
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα με την πρόταση για τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, αποδείξτε ότι οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο, το οποίο συμβολίζουμε e.
Πολλαπλασιάστε τις ανισότητες $(\frac{k+1}{k})^k \leq e \leq (\frac{k+1}{k})^{k+1}$ για $k=1,2,\ldots,n-1$ και αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1} \leq \frac{n^{n+1}}{n!}$ για κάθε n.
Αποδείξτε το ενδιαφέρον όριο[24] $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ και από αυτό το[25] $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

2.4.5. Αποδείξτε ότι ισχύει $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \leq \log_2 n + 1$ για κάθε n, παραλλάσσοντας την δεύτερη απόδειξη στο παράδειγμα 2.4.4.

2.4.6. Θεωρήστε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \log(n+1)$ και $b_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \log n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα, ότι η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.[26]

[22] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 2.5.3.
[23] Δεύτερη προσέγγιση στον αριθμό e.
[24] Θα ξαναδούμε αυτό το όριο στην άσκηση 7.3.19.
[25] Θα το ξαναδούμε στην άσκηση 2.3.41 και, κυρίως, στο παράδειγμα 8.3.7.
[26] Το κοινό όριο των δυο αυτών ακολουθιών ονομάζεται **σταθερά του Euler** και συμβολίζεται γ. Θα ξαναδούμε το θέμα αυτό στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

2.4.7. Μιμηθείτε την εργασία στα παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3 και αποδείξτε ότι, αν $t > 0$, τότε οι ακολουθίες $\big(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\big)$ και $\big((1 + \frac{t}{n})^n\big)$ συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.[27]

2.4.8. [α] Έστω $x_1 = 1$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{{x_n}^2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και βρείτε το όριό της.

[β] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[γ] Έστω ότι ισχύει $7x_{n+1} = {x_n}^3 + 6$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[δ] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = \frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[ε] Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ για κάθε n. Αν $x_1 = 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι σταθερή. Αν $x_1 > 1$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και βρείτε το όριό της. Αν $x_1 < 1$ και ισχύει $x_1 \neq \frac{k-1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι *τελικά* φθίνουσα και βρείτε το όριό της. Τί συμπεραίνετε αν ισχύει $x_1 = \frac{k-1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$;

[στ] Έστω $x_1, x_2 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$ έχει όριο και υπολογίστε το.

[ζ] Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} = \sin x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και, από τον δεύτερο όρο και πέρα, μονότονη και βρείτε το όριό της.

2.4.9. [28] [α] Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (a^n) είναι αύξουσα και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $a^{n+1} = aa^n$, ότι $a^n \to +\infty$. Μελετήστε με τον ίδιο τρόπο και την περίπτωση $0 < a < 1$.

[β] Αν $a > 1$ και $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{a^n}{n^k})$ είναι τελικά αύξουσα και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} = a\frac{n^k}{(n+1)^k}\frac{a^n}{n^k}$, ότι $\frac{a^n}{n^k} \to +\infty$.

[γ] Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{a})$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\big(\sqrt[2n]{a}\big)^2 = \sqrt[n]{a}$, ότι $\sqrt[n]{a} \to 1$. Τί γίνεται στις περιπτώσεις $a = 1$, $0 < a < 1$;

[δ] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{n})$ είναι φθίνουσα από τον τρίτο όρο της και πέρα και κάτω φραγμένη και ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$.

[ε] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{a^n}{n!})$ είναι τελικά φθίνουσα και, με τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!}\frac{a}{n+1}$, ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

2.4.10. [29] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 1$, $y_n \to -\infty$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

2.4.11. [α] Αν ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος, αποδείξτε ότι $\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+3} + \cdots + \frac{1}{b+n} \to +\infty$.

[β][30] Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $(1 + a_1)\cdots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n$, αν $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, και $(1 - a_1)\cdots(1 - a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n$, αν $0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1$.

Αν ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος, βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$, διακρίνοντας περιπτώσεις $a = b$, $a > b$, $a < b$.

[γ] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.

Αν $c < 0$ και αν ισχύει τελικά $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \leq c$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

Αν $c > 0$ και αν ισχύει τελικά $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \geq c$, αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.

---

[27] Η συνέχεια στην άσκηση 2.5.5.

[28] Άλλες αποδείξεις για τα παραδείγματα 2.3.19 και 2.3.22 έως 2.3.25.

[29] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών δύναμης. Συνέχεια της άσκησης 2.3.30.

[30] Η πρώτη και η δεύτερη ανισότητα είναι γενικεύσεις της ανισότητας $(1 + a)^n \geq 1 + na$ του Bernoulli για $a \geq 0$ και για $-1 \leq a \leq 0$, αντιστοίχως.

Αν $c < 0$ και αν $n\Big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\Big) \to c$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
Αν $c > 0$ και αν $n\Big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\Big) \to c$, αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
Δείτε ότι αυτά τα τέσσερα αποτελέσματα είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων της πρότασης 2.10.

Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να αποδείξετε ότι $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \to 0$ και $\frac{e^n n!}{n^n} \to +\infty$. Μπορείτε να τα αποδείξετε χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.10;

2.4.12. [31] Έστω $y \geq 0$ και $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Ορίζουμε ακολουθία (x_n) με οποιονδήποτε $x_1 > 0$ και με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{1}{k} \frac{y}{{x_n}^{k-1}}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.
Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Bernoulli, ότι ισχύει ${x_n}^k \geq y$ για κάθε $n \geq 2$ και, κατόπιν, ότι ισχύει $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n \geq 2$.
Συμπεράνατε ότι η (x_n) συγκλίνει και ότι, αν $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, τότε $x^k = y$ και $x \geq 0$.

2.4.13. Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ για κάθε n.[32]

Έστω, επιπλέον, η (x_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n - x_{n+1})$ είναι φθίνουσα και ότι $x_n - x_{n+1} \to 0$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει.

Αν η (x_n) δεν είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι, και πάλι, έχει όριο.

2.4.14. Έστω $0 < a \leq b$.

Αν $x_1 = a$ και $y_1 = b$ και ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ και $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, η (y_n) φθίνουσα, ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n και ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο, έστω $\mathrm{GA}\,(a,b)$.[33]

Αν $w_1 = a$ και $z_1 = b$ και ισχύει $w_{n+1} = \frac{2w_n z_n}{w_n + z_n}$ και $z_{n+1} = \sqrt{w_n z_n}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι η (w_n) είναι αύξουσα, η (z_n) φθίνουσα, ότι ισχύει $w_n \leq z_n$ για κάθε n και ότι οι (w_n), (z_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο, έστω $\mathrm{HG}\,(a,b)$.[34]

Ποιά είναι η σχέση διάταξης ανάμεσα στους $a, b, \mathrm{HG}\,(a,b), \mathrm{GA}\,(a,b)$ και στον αρμονικό μέσο $\mathrm{H}\,(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$, τον γεωμετρικό μέσο $\mathrm{G}\,(a,b) = \sqrt{ab}$ και τον αριθμητικό μέσο $\mathrm{A}\,(a,b) = \frac{a+b}{2}$;

2.4.15. Έστω ότι ισχύει $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα και ότι η $\big((n+\frac{1}{2}){x_n}^2\big)$ είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι και οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

2.4.16. [α] Έστω συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[a,b]$. Αν $f(a) > a$ και $f(b) < b$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

[β] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$ με $x' < x < x''$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.

2.4.17. Έστω ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα, αποδείξτε ότι ισχύει η ιδιότητα supremum.[35]

Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n} \to 0$.
Τώρα, έστω μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο A.
Θεωρήστε $x_1 \in A$ και άνω φράγμα y_1 του A. Το $[x_1, y_1]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Αν το $\frac{x_1+y_1}{2}$ είναι άνω φράγμα του A, πάρτε $x_2 = x_1$, $y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, αν όχι, πάρτε $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, $y_2 = y_1$. Αποδείξτε ότι το $[x_2, y_2]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα

[31] Δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 1.2.

[32] Μια τέτοια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **κυρτή**. Αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα για κάθε n, η ακολουθία χαρακτηρίζεται **κοίλη**.

[33] Ο $\mathrm{GA}\,(a,b)$ ονομάζεται γεωμετρικός-αριθμητικός μέσος των a, b.

[34] Ο $\mathrm{HG}\,(a,b)$ ονομάζεται αρμονικός-γεωμετρικός μέσος των a, b.

[35] Άρα η ιδιότητα supremum είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα: *κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

του A. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργείται ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots$ ώστε να ισχύει $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$ για κάθε n και ώστε κάθε $[x_n, y_n]$ να περιέχει ένα $a_n \in A$ και ένα άνω φράγμα u_n του A. Αποδείξτε ότι υπάρχει u ώστε $x_n \to u$, $y_n \to u$ και, επίσης, $a_n \to u$, $u_n \to u$. Αποδείξτε ότι ο u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

2.4.18. [36] Έστω διάστημα I, όχι μονοσύνολο.

Υποθέστε (για να καταλήξετε σε άτοπο) ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε $I = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Θεωρήστε $[x_1, y_1] \subseteq I$ ώστε $y_1 - x_1 > 0$ και $a_1 \notin [x_1, y_1]$. Θεωρήστε $[x_2, y_2] \subseteq [x_1, y_1]$ ώστε $y_2 - x_2 > 0$ και $a_2 \notin [x_2, y_2]$. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργείται ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots$ ώστε να ισχύει $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $a_n \notin [x_n, y_n]$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε να ισχύει $\xi \in [x_n, y_n]$ και, επομένως, $\xi \neq a_n$ για κάθε n. Καταλήξτε σε αντίφαση και συμπεράνατε ότι το I είναι υπεραριθμήσιμο.

2.4.19. [37] Έστω κύκλος K με ακτίνα 1 και, για κάθε $n \geq 2$, ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές εγγεγραμμένο στον K και ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές περιγεγραμμένο στον K. Έστω p_n και q_n τα μήκη του εσωτερικού και του εξωτερικού, αντιστοίχως, πολυγώνου.

Παρατηρήστε ότι $p_2 = 4\sqrt{2}$ και $q_2 = 8$ και αποδείξτε γεωμετρικά τους αναδρομικούς τύπους $p_{n+1} = 2p_n\big(2 + \big(4 - \frac{{p_n}^2}{4^n}\big)^{1/2}\big)^{-1/2}$ και $q_{n+1} = 4q_n\big(2 + \big(4 + \frac{{q_n}^2}{4^n}\big)^{1/2}\big)^{-1}$ για κάθε $n \geq 2$.
Αποδείξτε γεωμετρικά ότι ισχύει $q_n = p_n\big(1 - \frac{{p_n}^2}{4^{n+1}}\big)^{-1/2}$ για κάθε $n \geq 2$.
Αποδείξτε ότι η (p_n) είναι αύξουσα, η (q_n) φθίνουσα και ότι ισχύει $p_n < q_n$ για κάθε $n \geq 2$.
Αποδείξτε ότι οι (p_n), (q_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.[38]

2.4.20. [39] Γνωρίζουμε ότι για κάθε x υπάρχει αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$. Για παράδειγμα, μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων του x ή η ακολουθία που αναφέρεται στην άσκηση 2.3.32.

Θεωρήστε ότι δεν έχουν οριστεί οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη.

Έστω $y > 1$ και ο x είναι άρρητος. Θεωρήστε οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$ και αποδείξτε ότι η ακολουθία (y^{r_n}) συγκλίνει. Αποδείξτε ότι για κάθε δυο αύξουσες ακολουθίες ρητών (r_n) με $r_n \to x$ τα όρια των αντίστοιχων ακολουθιών (y^{r_n}) ταυτίζονται. Ορίσατε $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ με οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$. Αποδείξτε ότι $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ για κάθε (όχι αναγκαστικά αύξουσα) ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Έστω $y > 1$ και ο x είναι ρητός. Αποδείξτε ότι $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ για κάθε (όχι αναγκαστικά αύξουσα) ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Έστω $0 \leq y \leq 1$ και ο x είναι άρρητος. Ορίσατε την δύναμη y^x βάσει της προηγούμενης περίπτωσης (όπως στον αντίστοιχο ορισμό στην ενότητα 1.4).

Αποδείξτε την πρόταση 1.8 βάσει των προηγουμένων.

2.4.21. [40] Έστω $y > 0$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\big(n(\sqrt[n]{y} - 1)\big)$ είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.

Θεωρήστε ότι δεν έχουν οριστεί οι λογάριθμοι θετικών αριθμών.

Ορίσατε $\log y = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{y} - 1)$.

---

[36] Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο A, όχι αναγκαστικά υποσύνολο του $\mathbb{R}$, χαρακτηρίζεται **αριθμήσιμο** αν υπάρχει συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to A$ η οποία είναι επί του A. Χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό συμβολισμό $a_n = a(n)$, μπορούμε να πούμε ότι το A είναι αριθμήσιμο αν μπορεί να γραφτεί $A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ή, ισοδύναμα, αν το A είναι το σύνολο των όρων κάποιας ακολουθίας. Αν ένα σύνολο A δεν είναι αριθμήσιμο, τότε χαρακτηρίζεται **υπεραριθμήσιμο**.

[37] Ο κλασσικός γεωμετρικός ορισμός του μήκους περιφέρειας κύκλου και του αριθμού π.

[38] Μια από τις μαθηματικές παραδοχές ή διαπιστώσεις της κλασσικής αρχαιότητας ήταν ότι το μήκος της περιφέρειας του κύκλου K, το οποίο, παραδοσιακά, συμβολίζεται 2π, είναι ανάμεσα στα μήκη των εσωτερικών και των εξωτερικών πολυγώνων. Δηλαδή, ισχύει $p_n \leq 2\pi \leq q_n$ για κάθε $n \geq 2$. Συμπεράνατε ότι $p_n \to 2\pi$ και $q_n \to 2\pi$.

[39] Εναλλακτικός ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη.

[40] Εναλλακτικός ορισμός του λογαρίθμου.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\log y = \lim_{n\to+\infty} \frac{y^{x_n}-1}{x_n}$ για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε n.
Αποδείξτε την πρόταση 2.13 (εκτός του [γ]) βάσει των προηγουμένων.
Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και $y > 0$. Ορίσατε $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ και αποδείξτε την πρόταση 1.9.

2.5 Υποακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ακολουθία (x_n). Επιλέγουμε άπειρες τιμές $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ του δείκτη n ώστε $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Μετά επιλέγουμε τους αντίστοιχους όρους της (x_n). Δηλαδή από τους $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ επιλέγουμε τους $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$. Αυτοί οι αριθμοί αποτελούν μια άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος ο x_{n_1}, δεύτερος ο x_{n_2} και ούτω καθ' εξής. Άρα οι αριθμοί αυτοί αποτελούν τους όρους μιας νέας ακολουθίας, της (x_{n_k}). Επειδή οι όροι της νέας ακολουθίας είναι κάποιοι από τους όρους της αρχικής, η (x_{n_k}) χαρακτηρίζεται* **υποακολουθία** *της (x_n).*

Τονίζουμε ότι, λόγω της συνθήκης $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, η σειρά επιλογής των όρων της υποακολουθίας είναι *ομόρροπη* με τη σειρά επιλογής που έχουν αυτοί οι όροι ως όροι της αρχικής ακολουθίας.

Παράδειγμα 2.5.1. Επιλέγοντας τους $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 9$, $n_5 = 13$, μπορούμε να αρχίσουμε μια υποακολουθία της (x_n) με τους όρους $x_2, x_5, x_6, x_9, x_{13}$.
Όμως, με τους $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 10$, $n_5 = 8$ δεν επιτρέπεται να σχηματιστεί υποακολουθία της (x_n). Η σειρά επιλογής των $x_2, x_5, x_6, x_{10}, x_8$ δεν είναι ομόρροπη με τη σειρά επιλογής που έχουν ως όροι της (x_n) : ο x_{10} ακολουθεί τον x_8 στην (x_n) (με ενδιάμεσο τον x_9) οπότε ο x_{10} πρέπει να ακολουθεί τον x_8 και στην υποακολουθία.

Μερικά πιο συγκεκριμένα παραδείγματα υποακολουθιών.

Παράδειγμα 2.5.2. Επιλέγοντας $n_k = 2k$ για κάθε k, ορίζεται η **υποακολουθία των άρτιων δεικτών** της (x_n), δηλαδή η υποακολουθία (x_{2k}) ή $(x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \ldots)$.

Παράδειγμα 2.5.3. Επιλέγοντας $n_k = 2k-1$ για κάθε k, ορίζεται η **υποακολουθία των περιττών δεικτών** της (x_n), δηλαδή η υποακολουθία (x_{2k-1}) ή $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \ldots)$.

Παράδειγμα 2.5.4. Επιλέγοντας $n_k = k$ για κάθε k, παίρνουμε την ίδια την αρχική ακολουθία (x_k) ή $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)$. Άρα μια από τις υποακολουθίες της (x_n) είναι η ίδια η (x_n).

Παράδειγμα 2.5.5. Επιλέγοντας $n_k = 2^{k-1}$ για κάθε k, ορίζουμε την υποακολουθία $(x_{2^{k-1}})$ ή $(x_1, x_2, x_4, x_8, x_{16}, \ldots)$.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι *ο δείκτης μιας υποακολουθίας (x_{n_k}) είναι ο k*. Καθώς ο k μεταβάλλεται διατρέχοντας *όλους* τους φυσικούς $1, 2, 3, \ldots$, ο αντίστοιχος n_k μεταβάλλεται *γνησίως αυξανόμενος* διατρέχοντας *κάποιους* από τους δείκτες της αρχικής ακολουθίας (x_n).

Επίσης, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι *το να έχουμε μια υποακολουθία μιας ακολουθίας (x_n) σημαίνει απλώς να έχουμε "άπειρους όρους" της (x_n)*. Είναι, φυσικά, προφανές ότι οι όροι μιας υποακολουθίας της (x_n) είναι άπειροι όροι της (x_n). Από την άλλη μεριά, αν έχουμε άπειρους όρους της (x_n), τότε από αυτούς ορίζεται μια υποακοουθία της (x_n) ως εξής. Θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τον συμβολίζουμε n_1. Κατόπιν, αφού εξαιρέσουμε τον x_{n_1}, θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τον συμβολίζουμε n_2. Κατόπιν, αφού εξαιρέσουμε τους x_{n_1} και x_{n_2}, θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τον συμβολίζουμε n_3 και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργούμε μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και οι όροι της είναι οι άπειροι όροι της (x_n) από τους οποίους ξεκινήσαμε.

ΛΗΜΜΑ 2.2. *Έστω $n_k \in \mathbb{N}$ και $n_k < n_{k+1}$ για κάθε k. Τότε ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε k.*

Απόδειξη. Η $n_1 \geq 1$ είναι σωστή διότι $n_1 \in \mathbb{N}$. Έστω ότι ισχύει $n_k \geq k$ για κάποιον k. Επειδή $n_{k+1} > n_k$ και $n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $n_{k+1} \geq n_k + 1$ και, επομένως, $n_{k+1} \geq k+1$.
Άρα ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε k. □

Από το λήμμα 2.2 βλέπουμε αμέσως ότι για τους δείκτες που σχηματίζουν μια υποακολουθία ισχύει

$$n_k \to +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.14. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Θα αποδείξουμε ότι $x_{n_k} \to x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Πριν από λίγο είδαμε ότι $n_k \to +\infty$. Άρα από μια τιμή του k και πέρα ισχύει $n_k \geq n_0$ και, επομένως, $x_{n_k} \in N_x(\epsilon)$.
Άρα $x_{n_k} \to x$. □

Η πρόταση 2.14 εφαρμόζεται, συνήθως, ως εξής: *αν μια ακολουθία έχει δυο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.*[41]

Παράδειγμα 2.5.6. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν έχει όριο.
Πράγματι, για την υποακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k-1)-1} = 1 \to 1$ και για την υποακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k)-1} = -1 \to -1$.

Η πρόταση 2.15 είναι χρήσιμη σε αρκετές περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.15. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{2k} \to x$ και $x_{2k-1} \to x$. Τότε $x_n \to x$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x_{2k} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε άρτιο n από κάποιον άρτιο δείκτη n' και πέρα. Επίσης, επειδή $x_{2k-1} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε περιττό n από κάποιον περιττό δείκτη n'' και πέρα. Τώρα είναι φανερό ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε n από κάποιον δείκτη (τον μεγαλύτερο από τους n' και n'') και πέρα.
Άρα $x_n \to x$. □

Παράδειγμα 2.5.7. Θα αποδείξουμε ότι[42]

$$\text{Η ακολουθία} \quad \big(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}\big) \quad \text{συγκλίνει.}$$

Θέτουμε $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$ για κάθε k. Επίσης, ισχύει

$$x_{2k} = 1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \cdots - (\tfrac{1}{2k-2} - \tfrac{1}{2k-1}) - \tfrac{1}{2k} < 1$$

για κάθε k, διότι κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η υποακολουθία (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Ομοίως, ισχύει $x_{2k+1} - x_{2k-1} = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} < 0$ για κάθε k. Επίσης, ισχύει

$$x_{2k-1} = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{2k-3} - \tfrac{1}{2k-2}) + \tfrac{1}{2k-1} > 0$$

για κάθε k, διότι κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η υποακολουθία (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Τέλος,

$$x_{2k} - x_{2k-1} = -\tfrac{1}{2k} \to 0,$$

οπότε οι (x_{2k}), (x_{2k-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Άρα η (x_n) συγκλίνει.
Αν x είναι το όριο της (x_n), τότε αξίζει να παρατηρήσουμε τη διάταξη των όρων της:

$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+2} < \ldots < x < \ldots < x_{2n+1} < x_{2n-1} < \ldots < x_3 < x_1.$$

[41] Ισχύει και το αντίστροφο. Δείτε την άσκηση 2.5.15.

[42] Για εναλλακτικές αποδείξεις δείτε τις ασκήσεις 2.6.3 και 6.4.11 και το παράδειγμα 8.3.9.

Αυτό συμβαίνει επειδή η (x_{2n}) είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στον x και, ομοίως, η (x_{2n-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στον x. Παρατηρήστε, επίσης, ότι τα διαστήματα $[x_2, x_1]$, $[x_4, x_3]$, $[x_6, x_5]$, $\ldots$ είναι εγκιβωτισμένα και ότι το όριο x είναι ο μοναδικός αριθμός που περιέχεται σε όλα αυτά τα διαστήματα.

Γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει. Όμως, η $((-1)^{n-1})$, παρόλο που δεν συγκλίνει, έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που συγκλίνει: η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει στον 1 και η υποακολουθία των άρτιων δεικτών συγκλίνει στον -1. Θα δούμε τώρα ότι αυτό το φαινόμενο παρατηρείται όχι μόνο στην ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αλλά και σε κάθε φραγμένη ακολουθία. Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος, ενός από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ BOLZANO - WEIERSTRASS. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη. [43] Έστω ακολουθία (x_n) και l, u ώστε να ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει, περιγράφοντας έναν "αλγόριθμο" επιλογής των διαδοχικών όρων της υποακολουθίας: του πρώτου όρου της, κατόπιν του δεύτερου όρου της, κατόπιν του τρίτου όρου της και ούτω καθ' εξής.

Χωρίζουμε το $[l, u]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l, \frac{l+u}{2}]$, $[\frac{l+u}{2}, u]$. Επειδή όλοι οι (άπειροι) όροι της (x_n) ανήκουν στο $[l, u]$, τουλάχιστον ένα από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$. Άρα $[l_1, u_1] \subseteq [l, u]$, $u_1 - l_1 = \frac{u-l}{2}$ και το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_1, u_1]$: έστω $x_{n_1} \in [l_1, u_1]$.

Χωρίζουμε το $[l_1, u_1]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l_1, \frac{l_1+u_1}{2}]$, $[\frac{l_1+u_1}{2}, u_1]$. Επειδή το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_2, u_2]$ (ακριβώς όπως στο πρώτο βήμα). Άρα $[l_2, u_2] \subseteq [l_1, u_1]$, $u_2 - l_2 = \frac{u_1-l_1}{2}$ και το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_2, u_2]$: έστω $x_{n_2} \in [l_2, u_2]$. *Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι* $n_2 > n_1$. Αυτό *είναι* εφικτό, ακριβώς επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο $[l_2, u_2]$.

Χωρίζουμε το $[l_2, u_2]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l_2, \frac{l_2+u_2}{2}]$, $[\frac{l_2+u_2}{2}, u_2]$. Επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_3, u_3]$. Άρα $[l_3, u_3] \subseteq [l_2, u_2]$, $u_3 - l_3 = \frac{u_2-l_2}{2}$ και το $[l_3, u_3]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_3, u_3]$: έστω $x_{n_3} \in [l_3, u_3]$. Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_3 > n_2$.

Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.

Επιλέγουμε έτσι, διαδοχικά, διαστήματα $[l_k, u_k]$ για κάθε k ώστε να ισχύει

$$[l_{k+1}, u_{k+1}] \subseteq [l_k, u_k], \qquad u_{k+1} - l_{k+1} = \tfrac{u_k-l_k}{2}$$

για κάθε k. Επίσης, επιλέγουμε όρους x_{n_k} της (x_n) για κάθε k ώστε να ισχύει

$$n_{k+1} > n_k, \qquad x_{n_k} \in [l_k, u_k]$$

για κάθε k.

Από το ότι ισχύει $u_{k+1} - l_{k+1} = \frac{u_k-l_k}{2}$ για κάθε k προκύπτει ότι ισχύει $u_k - l_k = \frac{u-l}{2^k}$ για κάθε k, οπότε

$$u_k - l_k \to 0.$$

[43] Δεύτερη απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.5.9.

Σύμφωνα με την πρόταση με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι (l_k), (u_k) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Έστω $l_k \to x$ και $u_k \to x$. Επειδή ισχύει $n_{k+1} > n_k$ για κάθε k, η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και, επειδή ισχύει $l_k \leq x_{n_k} \leq u_k$ για κάθε k, συνεπάγεται $x_{n_k} \to x$. □

Γνωρίζουμε ότι κάθε ακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$ δεν είναι άνω φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$. Όμως, στο ίδιο παράδειγμα, παρόλο που η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$, υπάρχει κάποια υποακολουθία της που αποκλίνει στο $+\infty$: δείτε την υποακολουθία των περιττών δεικτών, την $(1, 3, 5, 7, \dots)$. Αυτό το φαινόμενο ισχύει γενικότερα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.16. [α] *Κάθε ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$.*

[β] *Κάθε ακολουθία που δεν είναι κάτω φραγμένη έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που αποκλίνει στο $-\infty$.*

Απόδειξη. [44] [α] Έστω ακολουθία (x_n) όχι άνω φραγμένη.

Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι για κάθε u υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι $> u$. Έστω[45] (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει u ώστε μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι της (x_n) είναι $> u$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, u]$. Άρα από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(-\infty, u]$ μόνο κάποιοι από τους $x_1, \dots, x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(-\infty, u]$ και να βρούμε ένα διάστημα $(-\infty, u']$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Άτοπο.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι υπάρχει υποακολουθία της (x_n) που αποκλίνει στο $+\infty$, περιγράφοντας "αλγοριθμικά" την επιλογή των όρων της.

Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι > 1. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_1} > 1$.

Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι > 2. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_2} > 2$. Φροντίζουμε, όμως, να είναι $n_2 > n_1$. Αυτό είναι εφικτό διότι υπάρχουν *άπειροι* όροι > 2.

Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι > 3. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_3} > 3$ με $n_3 > n_2$.

Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.

Βρίσκουμε έτσι διαδοχικά όρους x_{n_k} της (x_n) ώστε να ισχύει $n_{k+1} > n_k$ και $x_{n_k} > k$ για κάθε k. Άρα η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και $x_{n_k} \to +\infty$.

[β] Ομοίως. □

Ασκήσεις.

2.5.1. Έστω $a < b < c < d$. Βρείτε μια *πολύ απλή* ακολουθία που να έχει τέσσερις (εκτός των άλλων) υποακολουθίες ώστε η πρώτη να συγκλίνει στον a, η δεύτερη στον b, η τρίτη στον c και η τέταρτη στον d. Κατ' αρχάς περιγράψτε τον τρόπο επιλογής των διαδοχικών όρων της ακολουθίας και μετά γράψτε τον τύπο της.

2.5.2. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει μια οποιαδήποτε από τις ιδιότητες: (γνησίως) αύξουσα, (γνησίως) φθίνουσα, άνω φραγμένη, κάτω φραγμένη, φραγμένη. Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έχει την ίδια ιδιότητα.

2.5.3. Εφαρμόστε τα αποτελέσματα των ασκήσεων 2.3.36 και 2.4.3 για να αποδείξετε το όριο $(1 + \frac{p}{qn})^n \to \sqrt[q]{e^p}$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$ με $q \geq 2$. Δηλαδή, $(1 + \frac{r}{n})^n \to e^r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.
Έστω άρρητος x. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης e^x, αποδείξτε ότι υπάρχουν $r, s \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < x < s$ και $e^x - \epsilon < e^r < e^s < e^x + \epsilon$. Τέλος, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $e^x - \epsilon < (1 + \frac{r}{n})^n < (1 + \frac{x}{n})^n < (1 + \frac{s}{n})^n < e^x + \epsilon$ και συμπεράνατε ότι $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$.

[44] Δεύτερη απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.5.9.

[45] Το επιχείρημα είναι αυτό που χρειάζεται για την απόδειξη της πρότασης 2.4[γ] και έχουμε δει το "συμμετρικό" του στην απόδειξη της πρότασης 2.4[β].

2.5.4. Αν η ακολουθία (x_n) έχει όριο και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.

Αν η ακολουθία (x_n) είναι μονότονη και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.

Έστω[46] $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n. Από το παράδειγμα 2.4.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Αποδείξτε με επαγωγή ότι ισχύει $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ για κάθε k και, βάσει των προηγουμένων, συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.

2.5.5. Συμπληρώνοντας την άσκηση 2.4.7, αποδείξτε ότι, αν $t \leq 0$, τότε οι ακολουθίες $\big(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\big)$ και $\big((1 + \frac{t}{n})^n\big)$ συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

2.5.6. [α] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

[β] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

[γ] Έστω $0 < p < 1$ και ότι ισχύει $x_{n+2} = (1-p)x_{n+1} + px_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει. Βρείτε τύπο για τον x_n συναρτήσει του n, βρίσκοντας πρώτα τύπο για τον $y_n = x_{n+1} - x_n$ συναρτήσει του n. Βρείτε το όριο της (x_n).

2.5.7. Έστω $a, b, x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $a \neq b$. Έστω ότι $x_{2k} \to a$ και $x_{2k-1} \to b$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$. Αποδείξτε ότι η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}). Μπορεί η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς και με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}); Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$.

2.5.8. [α] Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{3k} \to x$ και $x_{3k-1} \to x$ και $x_{3k-2} \to x$. Προσαρμόζοντας την απόδειξη της πρότασης 2.15, αποδείξτε ότι $x_n \to x$. Γενικεύστε.

Έστω $a, b, c, x \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Έστω ότι $x_{3k} \to a$ και $x_{3k-1} \to b$ και $x_{3k-2} \to c$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$. Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$ ή $x = c$.

[β] Έστω ότι διαμερίζουμε το $\mathbb{N}$ σε *πεπερασμένου πλήθους* άπειρα υποσύνολά του και έστω ακολουθία (x_n). Παίρνοντας δείκτες από καθένα από τα παραπάνω υποσύνολα του $\mathbb{N}$, διαμερίζουμε την ακολουθία σε αντίστοιχες πεπερασμένου πλήθους υποακολουθίες. Αν όλες αυτές οι υποακολουθίες έχουν το ίδιο όριο, αποδείξτε ότι και η (x_n) έχει το ίδιο όριο.

Το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει αν διαμερίσουμε το $\mathbb{N}$ σε *άπειρου πλήθους* άπειρα υποσύνολά του. Να ένα παράδειγμα.

Κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $n = 2^{m-1}k$ με $m \in \mathbb{N}$ και περιττό $k \in \mathbb{N}$. Άρα το $\mathbb{N}$ διαμερίζεται στα εξής υποσύνολά του: $A^{(m)} = \{2^{m-1}k \,|\, k \text{ περιττός φυσικός}\}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Το $A^{(1)}$ αποτελείται από τους περιττούς φυσικούς, το $A^{(2)}$ από τους φυσικούς που είναι διπλάσιοι των περιττών, το $A^{(3)}$ από τους φυσικούς που είναι τετραπλάσιοι των περιττών κλπ. Τώρα, ορίζουμε $x_n = \frac{1}{k}$ αν $n = 2^{m-1}k$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$ και κάποιον περιττό $k \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (x_n) διαμερίζεται στις αντίστοιχες υποακολουθίες: $(x_k^{(m)})_{k=1}^{+\infty}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, είναι $x_k^{(m)} = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Προφανώς, καθεμιά από αυτές τις ακολουθίες έχει όριο 0. Αποδείξτε ότι η (x_n) δεν έχει όριο 0, θεωρώντας την υποακολουθία $(x_{2^{m-1}3})_{m=1}^{+\infty}$.

2.5.9. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Ένας όρος x_n χαρακτηρίζεται *όρος-σκιάς* αν υπάρχει $m > n$ ώστε $x_m > x_n$.[47]

[46] Δεύτερη προσέγγιση της ακολουθίας του παραδείγματος 2.4.4. Δείτε και τις ασκήσεις 2.6.2 και 7.3.20 και τα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1 καθώς και τις ασκήσεις 2.4.6 και 6.4.11.

[47] Ο όρος x_n είναι πιο χαμηλά και άρα είναι στη σκιά του x_m όταν ο ήλιος ανατέλλει από το $+\infty$.

Αν η (x_n) έχει άπειρους όρους-σκιάς, αποδείξτε ότι οι όροι αυτοί σχηματίζουν γνησίως αύξουσα υποακολουθία της (x_n). Αν η (x_n) δεν έχει άπειρους όρους-σκιάς, αποδείξτε ότι είναι τελικά φθίνουσα και, επομένως, έχει φθίνουσα υποακολουθία.

Συμπεράνατε ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μια μονότονη υποακολουθία.

Δώστε δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass και της πρότασης 2.16.

2.5.10. Αποδείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) έχει μια ιδιότητα για άπειρους n αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία έχει την ίδια ιδιότητα για *κάθε* k.

2.5.11. [48] Αν το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας είναι *πεπερασμένο*, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερή υποακολουθία της.

2.5.12. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο x.

Δείτε αν είναι σωστό το: η ακολουθία (x_n) έχει όριο αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο.

2.5.13. Έστω ότι ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$ αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει στον x.

Θεωρήστε την ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Είναι $\sup\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 1$. Όμως, κάθε υποακολουθία της $(\frac{1}{n})$ συγκλίνει στον 0, το όριο της $(\frac{1}{n})$, οπότε δεν υπάρχει υποακολουθία που συγκλίνει στον 1. Αντιφάσκει αυτό με το προηγούμενο γενικό αποτέλεσμα;

2.5.14. Έστω ακολουθία (x_n) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία της (x_{n_k}) είναι υποακολουθία και της (x_n).

2.5.15. Αν η ακολουθία (x_n) δεν έχει όριο, αποδείξτε ότι υπάρχουν δυο υποακολουθίες της με διαφορετικά όρια. Να αντιπαραβάλετε με την πρόταση 2.14.

Αν η (x_n) δεν έχει όριο, αποδείξτε ότι υπάρχουν l, u ώστε $u < l$ και ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n. Να αντιπαραβάλετε με την πρόταση 2.5[γ].

2.5.16. [α] Έστω $x_n \to x$ και ότι ισχύει $x_n \neq x$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) δεν έχει καμιά σταθερή υποακολουθία.

[β] Έστω φραγμένη ακολουθία (r_n) χωρίς καμιά σταθερή υποακολουθία, ώστε να ισχύει $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ με $p_n \in \mathbb{Z}$ και $q_n \in \mathbb{N}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $q_n \to +\infty$.

[γ] Έστω άρρητος x και ακολουθία (r_n) ώστε $r_n \to x$ και ώστε να ισχύει $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ με $p_n \in \mathbb{Z}$ και $q_n \in \mathbb{N}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $q_n \to +\infty$ και ότι $p_n \to x(+\infty)$.

2.6 Η Ιδιότητα Πληρότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **ακολουθία Cauchy** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Αυτό το διατυπώνουμε:*

$$\lim_{n,m\to+\infty}(x_n - x_m) = 0.$$

Με άλλα λόγια: *η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy αν οι όροι της πλησιάζουν απεριόριστα ο ένας τον άλλο όταν οι δείκτες τους γίνονται κατάλληλα μεγάλοι.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.17. *Αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

[48] Δείτε την άσκηση 2.1.9.

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, αλλάζοντας απλώς το σύμβολο από n σε m, ισχύει $|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $n, m \geq n_0$.
Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

Το κριτήριο του Cauchy είναι το αντίστροφο της πρότασης 2.17.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. [49] Έστω ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Ειδικώτερα (θεωρώντας $m = n_0$), για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - x_{n_0}| < 1$, οπότε

$$|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Επομένως, αν θέσουμε $M = 1 + |x_{n_0}|$, έχουμε ότι από έναν δείκτη και πέρα οι όροι της (x_n) είναι στο διάστημα $[-M, M]$, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη.
Επειδή η (x_n) είναι φραγμένη, έχει, σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to x.$$

Θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Τώρα παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $n \geq n_0$ και τον κρατάμε, προσωρινά, σταθερό.
Επειδή $n_k \to +\infty$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $n_k \geq n_0$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.9}$$

Επίσης, επειδή $x_{n_k} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Άρα ισχύουν τελικά ταυτόχρονα οι (2.9) και (2.10). Οπότε μπορούμε να πάρουμε κάποιον αρκετά μεγάλο k για τον οποίο ισχύουν οι (2.9) και (2.10) και με έναν τέτοιο k βρίσκουμε

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Επειδή ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για τον οποιονδήποτε $n \geq n_0$, συνεπάγεται ότι $x_n \to x$. □

Η χρησιμότητα του κριτηρίου του Cauchy είναι παρόμοια με τη χρησιμότητα του θεωρήματος 2.1. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και δεν γνωρίζουμε το υποψήφιο όριο x της (x_n), αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|x_n - x|$ των όρων της ακολουθίας απο τον άγνωστο x, μελετάμε τις αποστάσεις $|x_n - x_m|$ μεταξύ των όρων της ακολουθίας. Πρέπει, βέβαια, να λάβουμε υπ’ όψη ότι το κριτήριο του Cauchy δεν προσδιορίζει το όριο μιας ακολουθίας Cauchy.

[49] Άλλες τρεις αποδείξεις υπάρχουν στις ασκήσεις 2.6.6, 2.6.7 και 2.7.14.

Παράδειγμα 2.6.1. Έστω η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ για κάθε n. Θα αποδείξουμε, με δεύτερο τρόπο (δείτε το παράδειγμα 2.4.5.[50]) ότι η (x_n) συγκλίνει.
Έστω $m > n$. Τότε

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)^2} + \tfrac{1}{m^2} \\ &< \tfrac{1}{n(n+1)} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \tfrac{1}{(m-2)(m-1)} + \tfrac{1}{(m-1)m} \\ &= \big(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\big) + \big(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}\big) + \cdots + \big(\tfrac{1}{m-2} - \tfrac{1}{m-1}\big) + \big(\tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m}\big) = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} < \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Τότε από το $m > n \geq n_0$ συνεπάγεται $|x_n - x_m| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$.
Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει.

Το κριτήριο του Cauchy εκφράζει την *ιδιότητα πληρότητας* του $\mathbb{R}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ. *Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.*

Η ιδιότητα πληρότητας αποδείχτηκε βάσει του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass, η απόδειξη του οποίου ανάγεται, τελικά, στην ιδιότητα supremum.

Ασκήσεις.

2.6.1. Έστω ότι οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Αποδείξτε, με τον ορισμό, ότι οι (x_n+y_n), $(x_n y_n)$ είναι ακολουθίες Cauchy.

2.6.2. [51] Αν ισχύει $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n, από το παράδειγμα 2.4.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Είναι η (x_n) ακολουθία Cauchy; Συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.

2.6.3. [52] Έστω ότι ισχύει $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - x_m| = \big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m}\big| \leq \frac{1}{n+1}$ για κάθε n, m με $n < m$. Συμπεράνατε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και ότι συγκλίνει.

2.6.4. [α] Έστω $0 \leq M < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_n - x_{n+1}| \leq cM^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| \leq c\frac{M^n}{1-M}$ για κάθε n, m με $n_0 \leq n < m$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n), αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq c\frac{M^n}{1-M}$.
[β] Έστω $0 \leq M < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_{n+1} - x_{n+2}| \leq M|x_n - x_{n+1}|$.[53] Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n), αποδείξτε ότι υπάρχει $c \geq 0$ ώστε να ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq c\frac{M^n}{1-M}$.
[γ] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. Βρείτε και μια εκτίμηση για την απόσταση του n-οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.
[δ] Έστω $|\kappa| < 1$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = a + \kappa \sin x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. Βρείτε μια εκτίμηση για την απόσταση του n-οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.

2.6.5. Έστω ότι ισχύει η Αρχιμήδεια ιδιότητα και η ιδιότητα πληρότητας. Αποδείξτε, όπως περιγράφεται παρακάτω, ότι ισχύει η ιδιότητα supremum.[54]

[50] Δείτε και τα παραδείγματα 8.2.7 και 8.2.10 και τις ασκήσεις 6.4.11, 7.3.20 και 8.2.1.

[51] Άλλη προσέγγιση για την ακολουθία του παραδείγματος 2.4.4. Δείτε και τις ασκήσεις 2.5.4 και 7.3.20 και τα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1 και τις ασκήσεις 2.4.6 και 6.4.11.

[52] Άλλη προσέγγιση του παραδείγματος 2.5.7. Δείτε και την άσκηση 6.4.11 και το παράδειγμα 8.3.9.

[53] Τότε η (x_n) χαρακτηρίζεται **γνησίως συστολική**. Αν $0 \leq M \leq 1$, η ακολουθία χαρακτηρίζεται **συστολική**.

[54] Άρα η ιδιότητα supremum είναι ισοδύναμη με την σύζευξη της ιδιότητας πληρότητας και της Αρχιμήδειας ιδιότητας.

Δείτε την άσκηση 2.4.17 και τα βήματα στην απόδειξη του αποτελέσματός της. Παραλείψτε το αρχικό βήμα, δηλαδή μην αποδείξετε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n} \to 0$ και, μετά, επαναλάβατε όλα τα επόμενα βήματα παρατηρώντας ότι οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Συμπεράνατε ότι κάθε μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

2.6.6. [55] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_1, b_1]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_1, b_1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ ώστε $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_2, b_2]$. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργούνται διαστήματα $[a_k, b_k]$ για κάθε k ώστε να ισχύει $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$ και $b_k - a_k < \frac{1}{k}$ για κάθε k και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_k, b_k]$ για κάθε k. Συμπεράνατε ότι υπάρχει x ώστε να ισχύει $x \in [a_k, b_k]$ για κάθε k και, τέλος, ότι $x_n \to x$.

2.6.7. [56] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Θεωρήστε $l_n = \inf\{x_k \,|\, k \geq n\}$ και $u_n = \sup\{x_k \,|\, k \geq n\}$ για κάθε n και αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \leq u_n$ και $l_n \leq l_{n+1}$ και $u_{n+1} \leq u_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $u_n - l_n \to 0$ και συμπεράνατε ότι υπάρχει x ώστε $l_n \to x$ και $u_n \to x$. Αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \leq x_n \leq u_n$ για κάθε n, οπότε $x_n \to x$.

2.7 Ανώτατο όριο και κατώτατο όριο ακολουθίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ακολουθία (x_n) και $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Το x χαρακτηρίζεται* **υποακολουθιακό όριο** *της ακολουθίας (x_n) αν η (x_n) έχει κάποια υποακολουθία με όριο x.*

Παράδειγμα 2.7.1. Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο, οπότε το όριό της είναι το μοναδικό υποακολουθιακό όριό της. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ έχει μοναδικό υποακολουθιακό όριο τον 0 και η ακολουθία $(-n)$ το $-\infty$.

Παράδειγμα 2.7.2. Η ακολουθία (x_n) με $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n έχει τουλάχιστον δυο υποακολουθιακά όρια, τους -1 και 1. Η υποακολουθία (x_{2k}) έχει όριο -1 και η υποακολουθία (x_{2k-1}) έχει όριο 1.
Ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της (x_n). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με όριο x.
Επειδή οι υποακολουθίες (x_{2k}) και (x_{2k-1}) αποτελούν και οι δυο μαζί ολόκληρη την (x_n), η (x_{n_k}) έχει είτε άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k}) είτε άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k-1}).
Αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k}), οι (x_{n_k}) και (x_{2k}) έχουν μια κοινή υποακολουθία η οποία, ως υποακολουθία της (x_{n_k}), πρέπει να έχει όριο x και, ως υποακολουθία της (x_{2k}), πρέπει να έχει όριο -1 και, επομένως, θα είναι $x = -1$.
Ομοίως, αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k-1}), θα είναι $x = 1$.
Άρα, αν το x είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n), τότε είναι $x = 1$ ή $x = -1$. Άρα τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n) είναι οι -1 και 1.

Παράδειγμα 2.7.3. Ομοίως, η ακολουθία $\big(\frac{(-1)^{n-1}+1}{2} n\big)$ έχει μοναδικά υποακολουθιακά όρια τον 0 και το $+\infty$.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass και την πρόταση 2.16, κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο: αν είναι φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο το οποίο είναι αριθμός ενώ, αν δεν είναι φραγμένη, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\pm\infty$ είναι υποακολουθιακό όριό της. Άρα το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων κάθε ακολουθίας είναι μη-κενό.

[55] Δεύτερη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.
[56] Τρίτη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. *Κάθε ακολουθία έχει ένα μέγιστο υποακολουθιακό όριο και ένα ελάχιστο υποακολουθιακό όριο.*

Απόδειξη. *Πρώτη περίπτωση: η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.*
Τότε το $+\infty$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n) και είναι, προφανώς, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Δεύτερη περίπτωση: η (x_n) έχει ως μοναδικό υποακολουθιακό όριο το $-\infty$.
Τότε το $-\infty$ είναι, προφανώς, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Τρίτη περίπτωση: η (x_n) είναι άνω φραγμένη και έχει υποακολουθιακό όριο $\neq -\infty$.
Επειδή η (x_n) είναι άνω φραγμένη, υπάρχει αριθμός u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n. Τότε κάθε υποακολουθία της (x_n) ικανοποιεί την ίδια ανισότητα και, επομένως, κάθε υποακολουθιακό όριο της (x_n) είναι $\leq u$. Άρα η υπόθεση αυτής της περίπτωσης συνεπάγεται ότι η (x_n) έχει υποακολουθιακό όριο $\neq -\infty$ και ότι κάθε τέτοιο υποακολουθιακό όριο είναι $\leq u$. Άρα το σύνολο L των *πραγματικών* υποακολουθιακών ορίων της (x_n), δηλαδή το

$$L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ είναι υποακολουθιακό όριο της } (x_n)\}.$$

είναι μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα το L έχει supremum το οποίο είναι αριθμός και θέτουμε

$$\overline{x} = \sup L.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο $\overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Τότε θα συμπεράνουμε ότι ο $\overline{x}$ ανήκει στο L, οπότε είναι το μέγιστο στοιχείο του L και, επομένως, είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Έστω οποιοσδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή $\overline{x} = \sup L$, υπάρχει $x \in L$ ώστε $\overline{x} - \epsilon < x \leq \overline{x}$ και, επομένως, $\overline{x} - \epsilon < x < \overline{x} + \epsilon$. Επειδή $x \in L$, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο x. Άρα οι όροι της υποακολουθίας τελικά ανήκουν στο διάστημα $(\overline{x} - \epsilon, \overline{x} + \epsilon)$ και, επομένως, υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \epsilon, \overline{x} + \epsilon)$. Αυτό το συμπέρασμα θα το εφαρμόσουμε διαδοχικά για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.
Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - 1, \overline{x} + 1)$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_1}, ώστε

$$\overline{x} - 1 < x_{n_1} < \overline{x} + 1.$$

Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \frac{1}{2}, \overline{x} + \frac{1}{2})$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_2}, ώστε

$$\overline{x} - \tfrac{1}{2} < x_{n_2} < \overline{x} + \tfrac{1}{2} \qquad \text{και } \ n_2 > n_1.$$

Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \frac{1}{3}, \overline{x} + \frac{1}{3})$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_3}, ώστε

$$\overline{x} - \tfrac{1}{3} < x_{n_3} < \overline{x} + \tfrac{1}{3} \qquad \text{και } \ n_3 > n_2.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, είναι φανερό ότι δημιουργείται μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έτσι ώστε να ισχύει

$$\overline{x} - \tfrac{1}{k} < x_{n_k} < \overline{x} + \tfrac{1}{k} \qquad \text{για κάθε } \ k$$

και, επομένως,

$$x_{n_k} \to \overline{x}.$$

Άρα ο $\overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο και, επομένως, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση, οπότε έχουμε αποδείξει ότι σε κάθε περίπτωση η (x_n) έχει μέγιστο υποακολουθιακό όριο.
Με συμμετρικό τρόπο αποδεικνύεται ότι η (x_n) έχει και ελάχιστο υποακολουθιακό όριο. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. [57] *Το* ***μέγιστο υποακολουθιακό όριο*** *μιας ακολουθίας* (x_n) *ονομάζεται και* ***ανώτατο όριο*** *της* (x_n) *και συμβολίζεται*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n \quad \text{ή} \quad \limsup x_n \quad \text{ή} \quad \overline{\lim}\, x_n.$$

Το ***ελάχιστο υποακολουθιακό όριο*** *μιας ακολουθίας* (x_n) *ονομάζεται και* ***κατώτατο όριο*** *της* (x_n) *και συμβολίζεται*

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \quad \text{ή} \quad \liminf x_n \quad \text{ή} \quad \underline{\lim}\, x_n.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.18. [α] *Το* $\overline{\lim}\, x_n$ *έχει τις εξής δυο ιδιότητες:*
(i) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$, *τότε ισχύει τελικά* $x_n < x$.
(ii) *Αν* $x < \overline{\lim}\, x_n$, *τότε ισχύει* $x < x_n$ *για άπειρους* n.
[β] *Το* $\underline{\lim}\, x_n$ *έχει τις εξής δυο ιδιότητες:*
(i) *Αν* $x < \underline{\lim}\, x_n$, *τότε ισχύει τελικά* $x < x_n$.
(ii) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$, *τότε ισχύει* $x_n < x$ *για άπειρους* n.

Απόδειξη. [α] (i) Έστω $\overline{\lim}\, x_n < x$ και έστω ότι δεν είναι σωστό ότι ισχύει τελικά $x_n < x$.
Τότε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $\geq x$. Άρα υπάρχει υποακολουθία της (x_n) όλοι οι όροι της οποίας είναι $\geq x$. Άρα υπάρχει υποακολουθία της συγκεκριμένης υποακολουθίας και, επομένως, υποακολουθία της (x_n) όλοι οι όροι της οποίας είναι $\geq x$ και η οποία έχει όριο. Το όριο αυτό πρέπει να είναι $\geq x$, οπότε υπάρχει υποακολουθιακό όριο της (x_n) το οποίο είναι $\geq x$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $\overline{\lim}\, x_n < x$ και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
(ii) Έστω $x < \overline{\lim}\, x_n$. Επειδή το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n), υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο το $\overline{\lim}\, x_n$. Τότε οι όροι της υποακολουθίας είναι τελικά $> x$, οπότε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $> x$.
[β] Ομοίως. □

Γνωρίζουμε ότι δεν έχουν όλες οι ακολουθίες όριο. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι, σύμφωνα με όσα έχουμε πει σ' αυτήν την ενότητα *κάθε ακολουθία έχει ανώτατο όριο και κατώτατο όριο*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.19. *Έστω οποιαδήποτε ακολουθία* (x_n).
[α] $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.
[β] *Η* (x_n) *έχει όριο αν και μόνο αν* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. *Επίσης, στην περίπτωση που η* (x_n) *έχει όριο, ισχύει* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$.

Απόδειξη. [α] Προφανές, αφού το $\underline{\lim}\, x_n$ είναι το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
[β] Έστω ότι η (x_n) έχει όριο.
Τότε το $\lim x_n$ είναι το μοναδικό και, επομένως, το μέγιστο και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n). Άρα $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$. (Αυτό το είδαμε και στο παράδειγμα 2.7.1.)
Αντιστρόφως, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.
Αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = +\infty$, τότε από το (i) της πρότασης 2.18[β] συνεπάγεται ότι για κάθε x ισχύει τελικά $x < x_n$ και, επομένως, $\lim x_n = +\infty$.
Αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = -\infty$, τότε από το (i) της πρότασης 2.18[α] συνεπάγεται ότι για κάθε x ισχύει τελικά $x_n < x$ και, επομένως, $\lim x_n = -\infty$.
Τέλος, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x \in \mathbb{R}$. Τότε από το (i) της πρότασης 2.18[α] συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n < x + \epsilon$ και από το (i) της πρότασης 2.18[β] συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$. Άρα $\lim x_n = x$. □

[57] Για έναν εναλλακτικό ορισμό του ανώτατου ορίου και του κατώτατου ορίου ακολουθίας δείτε την άσκηση 2.7.15 και τις αντίστοιχες υποσημειώσεις.

Ασκήσεις.

2.7.1. Έστω $a < b < c$ και οι ακολουθίες $(a, b, a, b, a, b, a, b, \dots)$ και $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$. Βρείτε τα $\overline{\lim}$ και $\underline{\lim}$ των ακολουθιών αυτών καθώς και όλα τα υποακολουθιακά όριά τους.

2.7.2. Βρείτε, μέσω των ορισμών τους, τα $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ των ακολουθιών: $(\frac{n+1}{n})$, $((-2)^n)$, $\big(2^{(-1)^{n-1}n}\big)$, $\big((-1)^{n-1}(1-\frac{1}{n})\big)$, $\big(2^{n-3[n/3]}\big)$.

2.7.3. Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ αν και μόνο αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ αν και μόνο αν $x_n \to -\infty$.

Ποιά είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το $\underline{\lim}\, x_n$;

2.7.4. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$.

2.7.5. Αν ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$ και $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.

2.7.6. Έστω ότι ισχύει τελικά $a_n \leq b_n \leq c_n$. Αν $\overline{\lim}\, c_n \leq \underline{\lim}\, a_n$, αποδείξτε ότι οι ακολουθίες (a_n), (b_n), (c_n) έχουν το ίδιο όριο.

2.7.7. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n)$ και $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$ αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \,\underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n y_n)$ και $\overline{\lim}(x_n y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n \,\overline{\lim}\, y_n$ αν ισχύει τελικά $x_n > 0$ και $y_n > 0$ και δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Αν $t > 0$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(tx_n) = t\ \overline{\lim}\, x_n$ και $\underline{\lim}(tx_n) = t\ \underline{\lim}\, x_n$. Τί γίνεται αν $t < 0$;

2.7.8. Αν η ακολουθία (y_n) έχει όριο και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$ και $\underline{\lim}(x_n + y_n) = \underline{\lim}\, x_n + \lim y_n$.

Αν ισχύει τελικά $x_n, y_n > 0$, η ακολουθία (y_n) έχει όριο και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(x_n y_n) = \overline{\lim}\, x_n \lim y_n$ και $\underline{\lim}(x_n y_n) = \underline{\lim}\, x_n \lim y_n$.

2.7.9. Αν $m \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι οι ακολουθίες (x_n), (x_{n+m}) έχουν τα ίδια υποακολουθιακά όρια.

2.7.10. Έστω (x_{n_k}) υποακολουθία της (x_n).

Δείτε την άσκηση 2.5.14 και αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθιακό όριο της (x_{n_k}) είναι υποακολουθιακό όριο και της (x_n).

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

2.7.11. [α] Αποδείξτε ότι ο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας (x_n) αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.

[β] Έστω $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της ακολουθίας (x_n). Αν (y_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο X και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $y \in X$.

Έστω $a < b < c \leq d$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $[a, b) \cup [c, d]$ ή το $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.

2.7.12. Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει μέγιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \geq \overline{\lim}\, x_n$.

Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει ελάχιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \leq \underline{\lim}\, x_n$.

2.7.13. [α] Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Πώς από αυτό προκύπτει ως άμεση συνέπεια το θεώρημα του Cesáro στην άσκηση 2.3.41[α];

[β] Αν ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

[γ] Αν ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και $y_1 + \cdots + y_n \to +\infty$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n} \leq \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n}$.

2.7.14. [58] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Έστω $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Από την απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy κρατάμε ότι η (x_n) είναι φραγμένη, οπότε $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$. Έστω $\underline{x} < \overline{x}$. Θεωρήστε l, u ώστε $\underline{x} < l < u < \overline{x}$. Τότε ισχύει $x_m < l$ για άπειρους m και $x_n > u$ για άπειρους n. Άρα ισχύει $x_n - x_m > u - l$ για άπειρους n, m. Αποδείξτε ότι αυτό είναι άτοπο. Συμπεράνατε ότι $\underline{x} = \overline{x}$, οπότε η (x_n) συγκλίνει.

2.7.15. Έστω ακολουθία (x_n). Θέτουμε $u_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$, $l_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\}$ για κάθε n. Παρατηρήστε ότι ισχύει $l_n \leq u_n$ για κάθε n.

Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $u_n = +\infty$ για κάθε n.

Αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $u_n \in \mathbb{R}$ και $u_{n+1} \leq u_n$ για κάθε n, οπότε η (u_n) έχει όριο στο $[-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $u_n \to \overline{\lim}\, x_n$.[59]

Αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $l_n = -\infty$ για κάθε n.

Αν η (x_n) είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \in \mathbb{R}$ και $l_n \leq l_{n+1}$ για κάθε n, οπότε η (l_n) έχει όριο στο $(-\infty, +\infty]$. Αποδείξτε ότι $l_n \to \underline{\lim}\, x_n$.[60]

2.7.16. Δείτε την Πρόταση 2.18. Αποδείξτε ότι το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι ο μοναδικός αριθμός $\overline{x}$ που έχει τις εξής δυο ιδιότητες: (i) αν $\overline{x} < x$, τότε ισχύει τελικά $x_n < x$ και (ii) αν $x < \overline{\lim}\, x_n$, τότε ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n. Διατυπώστε και αποδείξτε τα αντίστοιχα για το $\underline{\lim}\, x_n$.

2.7.17. Έστω ακολουθία (x_n) με την ιδιότητα: $x_{n+1} - x_n \to 0$. Φυσικά, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει αυτήν την ιδιότητα και ένα παράδειγμα ακολουθίας με αυτήν την ιδιότητα και με όριο $+\infty$ είναι η $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$.

Αν $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n$ και $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n$, αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι ολόκληρο το διάστημα $[\underline{x}, \overline{x}] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Θεωρήστε την ακολουθία $(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0, \dots)$. Ποιό είναι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της;

Βρείτε ακολουθία (x_n) ώστε $x_{n+1} - x_n \to 0$ και ώστε το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της να είναι το $\overline{\mathbb{R}}$.

2.7.18. [α][61] Έστω άρρητος $a > 0$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = na - [na]$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι το $[0, 1]$.

[β] Έστω άρρητος $a > 0$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \sin(na\pi)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι το $[-1, 1]$.

---

[58] Τέταρτη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.

[59] Αυτός είναι ένας εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός του ανώτατου ορίου: $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$, αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, και $\overline{\lim}\, x_n = \lim u_n$, αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη.

[60] Ο "συμμετρικός" εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός του κατώτατου ορίου: $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$, αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, και $\underline{\lim}\, x_n = \lim l_n$, αν η (x_n) είναι κάτω φραγμένη.

[61] Συνέχεια της άσκησης 2.3.16.

Κεφάλαιο 3

Όρια συναρτήσεων.

3.1 Συναρτήσεις, περιοχές και σημεία συσσώρευσης.

Οι βασικές συναρτήσεις.

Θεωρούμε συναρτήσεις f με πεδία ορισμού και σύνολα τιμών τα οποία είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Θα χρησιμοποιούμε τον γνωστό συμβολισμό

$$f : A \to \mathbb{R},$$

όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι το πεδίο ορισμού της f. Αν γνωρίζουμε τον τύπο $f(x)$ της f και δεν αναφέρεται το πεδίο ορισμού της, θα γράφουμε "η συνάρτηση $f(x)$" ή "η συνάρτηση $y = f(x)$" και θα θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το μέγιστο σύνολο το οποίο είναι συμβατό με τον τύπο της συνάρτησης, δηλαδή το σύνολο των x για τους οποίους έχει νόημα ο τύπος $f(x)$. Αν το A είναι υποσύνολο αυτού του μέγιστου συνόλου θα λέμε "η συνάρτηση $f(x)$ για $x \in A$" ή "η συνάρτηση $f(x)$ στο σύνολο A".

Παράδειγμα 3.1.1. Η **σταθερή** συνάρτηση c έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το μονοσύνολο $\{c\}$.
Ειδικές περιπτώσεις είναι η σταθερή συνάρτηση 1 και η σταθερή συνάρτηση 0.

Παράδειγμα 3.1.2. Η συνάρτηση **δύναμη**

$$x^a.$$

Αν $a \in \mathbb{N}$, τότε το πεδίο ορισμού της x^a είναι το $(-\infty, +\infty)$. Αν ο a είναι περιττός, τότε η x^a είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Αν ο a είναι άρτιος, τότε η x^a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

Αν $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, τότε το πεδίο ορισμού της x^a είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Αν $a = 0$, τότε η x^0 είναι σταθερή 1 στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $\{1\}$. Αν ο a είναι αρνητικός περιττός, τότε η x^a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Αν ο a είναι αρνητικός άρτιος, τότε η x^a είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Προσέξτε: η x^0 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ενώ η σταθερή συνάρτηση 1 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. *Εκτός από τον* $x = 0$, οι δυο συναρτήσεις έχουν την ίδια σταθερή τιμή 1. Στον $x = 0$ η x^0 δεν ορίζεται.

Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $a > 0$, τότε το πεδίο ορισμού της x^a είναι το $[0, +\infty)$. Η x^a είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

Τέλος, αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $a < 0$, τότε το πεδίο ορισμού της x^a είναι το $(0, +\infty)$. Η x^a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 3.1.3. Κάθε **πολυωνυμική** συνάρτηση

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Κάθε **ρητή** συνάρτηση

$$R(x) = \tfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

έχει πεδίο ορισμού το αντίστοιχο $\mathbb{R}\setminus\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, όπου $\xi_1, \ldots, \xi_k$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$. Αν, για παράδειγμα, οι ρίζες έχουν την διάταξη $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{k-1} < \xi_k$, τότε το πεδίο ορισμού είναι η ένωση $(-\infty, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi_2) \cup \ldots \cup (\xi_{k-1}, \xi_k) \cup (\xi_k, +\infty)$.

Παράδειγμα 3.1.4. Η **εκθετική** συνάρτηση

$$a^x \quad \text{ή} \quad \exp_a x.$$

Αν $a = e$, συνήθως συμβολίζουμε $\exp x$ αντί $\exp_e x$.
Αν $a > 1$, η a^x είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Αν $0 < a < 1$, η a^x είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Αν $a = 1$, η a^x είναι σταθερή 1 στο $(-\infty, +\infty)$. Αν $a = 0$, η a^x είναι σταθερή 0 στο $(0, +\infty)$. Τέλος, αν $a < 0$, το πεδίο ορισμού της a^x είναι το $\mathbb{Z}$. Αυτές οι τελευταίες περιπτώσεις, δηλαδή $a = 1$ και $a \leq 0$, δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία ως συναρτήσεις του x.

Παράδειγμα 3.1.5. Η **λογαριθμική** συνάρτηση

$$\log_a x.$$

Αν $a = e$, συνήθως συμβολίζουμε $\log x$ ή $\ln x$ αντί $\log_e x$.
Αν $a > 1$, η $\log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.
Αν $0 < a < 1$, η $\log_a x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.
Αν $a > 0$, $a \neq 1$, οι συναρτήσεις $y = a^x$ και $x = \log_a y$ είναι αντίστροφες. Δηλαδή, για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$ και $y \in (0, +\infty)$ ισχύει $y = a^x$ αν και μόνο αν $x = \log_a y$.

Παράδειγμα 3.1.6. Η συνάρτηση **πρόσημο** με τύπο

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της $\operatorname{sign} x$ είναι το $\mathbb{R}$, ενώ της συνάρτησης $\frac{x}{|x|}$ είναι το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Πάντως στο κοινό πεδίο ορισμού, δηλαδή για $x \neq 0$, οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται.

Παράδειγμα 3.1.7. Η συνάρτηση **ακέραιο μέρος** με τύπο

$$[x]$$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι αύξουσα (αλλά όχι γνησίως αύξουσα) στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή $[x] = n$ στο αντίστοιχο διάστημα $[n, n + 1)$.

Παράδειγμα 3.1.8. Τέλος, έχουμε τις τέσσερις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις**. Αυτές είναι οι

$$\cos x, \qquad \sin x, \qquad \tan x = \tfrac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \tfrac{\cos x}{\sin x}$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οι δυο πρώτες, το $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ η τρίτη και το $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ η τέταρτη.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές από το λύκειο και έχουν οριστεί με "γεωμετρικό" τρόπο. Οι "γεωμετρικοί" ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν θεωρούνται αποδεκτοί από την Ανάλυση και θα δούμε στην ενότητα 10.4 κάποιους "αναλυτικούς" ορισμούς τους. Μέχρι τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε ως παραδείγματα τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με κάποιες γνωστές από το λύκειο ιδιότητές τους.

Θα θεωρήσουμε γνωστές μόνο μερικές βασικές αλγεβρικού τύπου ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Τις περιγράφουμε παρακάτω.

Κατ'αρχάς έχουμε κάποιες ενδεικτικές τιμές των $\cos x$ και $\sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$:

$$\begin{array}{lllll}\cos 0 = 1, & \cos\frac{\pi}{2} = 0, & \cos\pi = -1, & \cos\frac{3\pi}{2} = 0, & \cos 2\pi = 1, \\ \sin 0 = 0, & \sin\frac{\pi}{2} = 1, & \sin\pi = 0, & \sin\frac{3\pi}{2} = -1, & \sin 2\pi = 0.\end{array}$$

Κατόπιν έχουμε τις βασικές αλγεβρικές σχέσεις

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \qquad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

για κάθε x, y και

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

για κάθε x. Απο την τελευταία προκύπτει αμέσως ότι

$$|\sin x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1$$

για κάθε x. Έχουμε ακόμη ότι

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

για κάθε x. Αυτό σημαίνει ότι οι $\cos x$ και $\sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Για κάθε ακέραιο k έχουμε τα εξής. Η $\cos x$ είναι θετική στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ και αρνητική στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ και η $\sin x$ είναι θετική στο διάστημα $(2k\pi, \pi+2k\pi)$ και αρνητική στο διάστημα $(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$. Επίσης, η $\cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2k\pi, \pi+2k\pi)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$ και η $\sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$.

Οι $\tan x$ και $\cot x$ είναι περιοδικές με περίοδο π και για κάθε ακέραιο k ισχύουν τα εξής. Η $\tan x$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi)$ και θετική στο διάστημα $(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ και η $\cot x$ είναι θετική στο διάστημα $(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ και αρνητική στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}+k\pi, \pi+k\pi)$. Επίσης, η $\tan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ και η $\cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(k\pi, \pi+k\pi)$.

Δυο ακόμη γνωστές και χρήσιμες ανισοτικές σχέσεις είναι οι

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{για κάθε } x, \qquad |x| \leq |\tan x| \quad \text{για } |x| < \tfrac{\pi}{2}.$$

Από όλες τις προηγούμενες ιδιότητες θα αποδεικνύουμε σιγά - σιγά στα επόμενα κεφάλαια τις υπόλοιπες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σχετικά με τα όριά τους, τις παραγώγους τους και τα ολοκληρώματά τους. Μόλις φτάσουμε στην ενότητα 10.4 και δούμε τους "αναλυτικούς" ορισμούς, τότε, βάσει αυτών των ορισμών, θα αποδείξουμε εξ αρχής όλες τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Σημεία συσσώρευσης.

Ας ξαναθυμηθούμε από την ενότητα 2.2 τις περιοχές των σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$, συμβολίζουμε

$$N_\xi(\delta) = (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

Αν $\xi = \pm\infty$ και $\delta > 0$, συμβολίζουμε

$$N_{-\infty}(\delta) = [-\infty, -\tfrac{1}{\delta}), \qquad N_{+\infty}(\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty].$$

Σε κάθε περίπτωση το διάστημα $N_\xi(\delta)$ ονομάζεται δ-*περιοχή* του ξ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ χαρακτηρίζεται* **σημείο συσσώρευσης** *του συνόλου A αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$.*

Πιο απλά, μπορούμε να πούμε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν *σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του ξ υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ*. Ή, αλλιώς, ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν *όσο θέλουμε κοντά στο ξ υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ*. Ή, αλλιώς, ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν *υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ τα οποία πλησιάζουν απεριόριστα το ξ*.

Πιο συγκεκριμένα: (i) ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $0 < |x - \xi| < \delta$, (ii) το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x > N$ και (iii) το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < -N$.

Και ξανά: (i) ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\delta > 0$, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει σημείο του A στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$, (ii) το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$, οσοδήποτε μεγάλο, υπάρχει σημείο του A στο $(N, +\infty)$ και (iii) το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$, οσοσδήποτε μεγάλο, υπάρχει σημείο του A στο $(-\infty, -N)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $\xi \in A$. Ο ξ χαρακτηρίζεται* **μεμονωμένο σημείο** *του A αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το μοναδικό στοιχείο του A που ανήκει στην $N_\xi(\delta)$ είναι ο ξ, δηλαδή $A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta) = \{\xi\}$.*

Παράδειγμα 3.1.9. Έστω $a < b$. Κάθε αριθμός $\xi \in [a, b]$, συμπεριλαμβανομένων των a και b, είναι σημείο συσσώρευσης του διαστήματος (a, b). Επίσης, κανένα $\xi \notin [a, b]$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του (a, b). Επομένως, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του διαστήματος (a, b) είναι το διάστημα $[a, b]$.
Ομοίως, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα διαστήματα $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ είναι το $[a, b]$.

Παράδειγμα 3.1.10. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ είναι το $[a, +\infty]$. Ειδικώτερα, τα άκρα a και $+\infty$ είναι σημεία συσσώρευσης των διαστημάτων $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$. Ομοίως, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ είναι το $[-\infty, b]$. Τέλος, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $(-\infty, +\infty)$ είναι το $[-\infty, +\infty]$.

Παράδειγμα 3.1.11. Έστω $a < b$. Το δισύνολο $\{a, b\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης. Ειδικώτερα, και τα δυο στοιχεία του $\{a, b\}$ είναι μεμονωμένα σημεία του.

Παράδειγμα 3.1.12. Αν $a < b < c$, τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $[a, b) \cup \{c\}$ είναι το $[a, b]$. Ο c είναι μεμονωμένο σημείο του $[a, b) \cup \{c\}$.

Παράδειγμα 3.1.13. Το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$ είναι το $+\infty$. Κάθε στοιχείο του $\mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο σημείο του.

Παράδειγμα 3.1.14. Ο 0 είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Κάθε στοιχείο του $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι μεμονωμένο σημείο του.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $\xi \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$, συμβολίζουμε*

$$N_{\xi-}(\delta) = (\xi - \delta, \xi], \qquad N_{\xi+}(\delta) = [\xi, \xi + \delta)$$

και αυτά τα διαστήματα ονομάζονται **αριστερή** δ**-περιοχή** *και* **δεξιά** δ**-περιοχή** *του ξ, αντιστοίχως.*

Παρατηρήστε τις απλές σχέσεις: $N_{\xi-}(\delta)\cup N_{\xi+}(\delta)=N_\xi(\delta)$ και $N_{\xi-}(\delta)\cap N_{\xi+}(\delta)=\{\xi\}$. Οι πλευρικές δ-περιοχές έχουν κοινό σημείο μόνο τον ξ και ή ένωσή τους είναι η δ-περιοχή.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο $\xi\in\mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* **από αριστερά του σημείο συσσώρευσης** *του συνόλου A αν για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x\in A\cap N_{\xi-}(\delta)$ με $x\neq\xi$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x\in A$ ώστε $\xi-\delta<x<\xi$. Ο $\xi\in\mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* **από δεξιά του σημείο συσσώρευσης** *του συνόλου A αν για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x\in A\cap N_{\xi+}(\delta)$ με $x\neq\xi$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x\in A$ ώστε $\xi<x<\xi+\delta$.*

Δηλαδή, ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν υπάρχουν σημεία του A στην δεξιά (αριστερή) μεριά του ξ τα οποία πλησιάζουν απεριόριστα τον ξ. Ή, αλλιώς, ότι ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν *όσο θέλουμε κοντά στο ξ και δεξιά (αριστερά) του ξ υπάρχουν σημεία του A.*

Είναι προφανές ότι:

Ο $\xi\in\mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν είναι είτε από αριστερά του είτε από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.

Παράδειγμα 3.1.15. Κάθε ξ στο $(a,b]$ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του (a,b) και κάθε ξ στο $[a,b)$ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (a,b). Άρα κάθε ξ στο (a,b) είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (a,b).

Παράδειγμα 3.1.16. Ο b είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του (a,b) και είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (b,c). Αλλά ο b είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(a,b)\cup(b,c)$.

Παράδειγμα 3.1.17. Ο 0 είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ και είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του $\{-\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$. Αλλά, ο 0 είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $\{-\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}\cup\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

Έστω μια ιδιότητα η οποία ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή x σε κάποιο σύνολο A, δηλαδή *έχει νόημα* στο σύνολο A και ισχύει για κάποιους $x\in A$ ενώ δεν ισχύει για τους υπόλοιπους $x\in A$. Μια τέτοια ιδιότητα μπορεί να είναι η $f(x)>0$ ή η $f(x)\neq-7$, όπου $f:A\to\mathbb{R}$ είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση. Σ' αυτήν την περίπτωση η ιδιότητα έχει νόημα ακριβώς για τους x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού A της f. Για κάποιους x στο πεδίο ορισμού A της f η ιδιότητα ισχύει και για τους υπόλοιπους x στο A η ιδιότητα δεν ισχύει.

Παράδειγμα 3.1.18. Η ανισότητα $\frac{1}{\sqrt{x}}>2$ έχει νόημα στο διάστημα $(0,+\infty)$, διότι αυτό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Η ιδιότητα ισχύει στο $(0,\frac{1}{4})$ και δεν ισχύει στο $[\frac{1}{4},+\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μια ιδιότητα που έχει νόημα στο σύνολο A και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η ιδιότητα* **ισχύει κοντά στο** *ξ αν υπάρχει $\delta>0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$.*

Παράδειγμα 3.1.19. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, η ανισότητα $\frac{1}{\sqrt{x}}>2$ έχει νόημα στο $(0,+\infty)$ και ισχύει κοντά στον 0. Μπορείτε να ελέγξετε εύκολα ότι, όποιον αριθμό $M>0$ κι αν πάρουμε, η ανισότητα $\frac{1}{\sqrt{x}}>M$ ισχύει κοντά στον 0.

Παράδειγμα 3.1.20. Αν $\epsilon>0$, η διπλή ανισότητα $0<\frac{1}{x}<\epsilon$ ισχύει κοντά στο $+\infty$, διότι ισχύει στο διάστημα $(\frac{1}{\epsilon},+\infty)$.

Παράδειγμα 3.1.21. Αν $M>0$, η ανισότητα $\frac{1}{|x|}>M$ ισχύει κοντά στον 0, διότι ισχύει στο $(-\frac{1}{M},0)\cup(0,\frac{1}{M})$. Όμως, δεν είναι σωστό ότι η ανισότητα $\frac{1}{x}>M$ ισχύει κοντά στον 0.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μια ιδιότητα που έχει νόημα στο σύνολο A και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η ιδιότητα* **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο** *ξ αν για κάθε $\delta>0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$.*

Είναι προφανές ότι:

Αν μια ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ, τότε αυτή ισχύει και σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

Παράδειγμα 3.1.22. Η ανισότητα $\sin x > 0$ έχει νόημα στο $\mathbb{R}$ και το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}$. Η ανισότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$, αφού ισχύει για παράδειγμα στο $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε, όμως, ότι και η αντίθετη ανισότητα $\sin x \leq 0$ ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$, αφού ισχύει στο $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Άρα είναι λάθος ότι η ανισότητα $\sin x > 0$ ισχύει κοντά στο $+\infty$.

Έστω δυο ιδιότητες οι οποίες έχουν νόημα στο ίδιο σύνολο A αλλά ισχύουν σε, πιθανώς, διαφορετικά υποσύνολα του A και έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Αν δυο ιδιότητες έχουν νόημα στο ίδιο σύνολο και η μια ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ και η άλλη ιδιότητα ισχύει, επίσης, κοντά στο ξ, τότε ισχύουν και οι δυο, ταυτόχρονα, ιδιότητες κοντά στο ξ.

Πράγματι, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta')$ με $x \neq \xi$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta'')$ με $x \neq \xi$. Θεωρούμε

$$\delta = \min\{\delta', \delta''\} > 0,$$

οπότε $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$. Άρα $N_\xi(\delta) \subseteq N_\xi(\delta')$ και $N_\xi(\delta) \subseteq N_\xi(\delta'')$. Άρα ισχύουν και οι δυο ιδιότητες για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$.

Το προηγούμενο συμπέρασμα ισχύει για οποιονδήποτε *πεπερασμένο* αριθμό ιδιοτήτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A.*

Έστω ότι ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A.

Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει κοντά στον** ξ **από αριστερά του** *αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi)$.*

Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον** ξ **από αριστερά του** *αν για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi)$.*

Έστω ότι ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.

Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει κοντά στον** ξ **από δεξιά του** *αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta)$.*

Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον** ξ **από δεξιά του** *αν για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta)$.*

Όλα τα συμπεράσματα για το "κοντά στον ξ" και για το "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ" προσαρμόζονται με προφανή τρόπο και στο πλαίσιο των "κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του" και "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του".

Παράδειγμα 3.1.23. Πίσω στο παράδειγμα 3.1.21. Ο 0 είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Η ιδιότητα $\frac{1}{|x|} > M$ ισχύει κοντά στον 0 και, ταυτόχρονα, ισχύει κοντά στον 0 από αριστερά του και κοντά στον 0 από δεξιά του. Όμως, η ιδιότητα $\frac{1}{x} > M$ ισχύει κοντά στον 0 από δεξιά του αλλά δεν είναι σωστό ότι ισχύει κοντά στον 0 από αριστερά του και, επομένως, δεν είναι σωστό ότι ισχύει κοντά στον 0.

Παράδειγμα 3.1.24. Η ιδιότητα $\frac{1}{\sqrt{x}} > M$ του παραδείγματος 3.1.19 ισχύει κοντά στον 0 και, ταυτόχρονα, κοντά στον 0 από δεξιά του. Δεν έχει νόημα το να ισχύει κοντά στον 0 από αριστερά του, διότι ο 0 είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(0, +\infty)$, του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ασκήσεις.

3.1.1. Έστω $a < b < c$. Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των $(a, b) \cup (b, c)$, $(a, b) \cup \{c + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{(-1)^{n-1}(1 + \frac{1}{n}) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{2^n + \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$.

3.1.2. Αποδείξτε ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι άνω φραγμένο. Αποδείξτε ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο.

3.1.3. Αποδείξτε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ η περιοχή $N_\xi(\delta)$ του ξ περιέχει *άπειρα* στοιχεία του A.

3.1.4. Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και $A \subseteq B$. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι είναι σημείο συσσώρευσης και του B.

3.1.5. Αποδείξτε ότι κάθε $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των συνόλων $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ και $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$.

3.1.6. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι, αν το $\sup A$ δεν ανήκει στο A, τότε είναι σημείο συσσώρευσης του A. Ομοίως, για το $\inf A$.

Βρείτε μη-κενό σύνολο A ώστε το $\sup A$ και το $\inf A$ να μην είναι σημεία συσσώρευσής του.

3.1.7. Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιό το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις ανισότητες: $\frac{1}{x^2} > 100$, $\frac{x+2}{|x-1|} > 1000$, $-\frac{1}{100} < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{100}$; Αποδείξτε ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στον 1 και η τρίτη κοντά στα $\pm\infty$.

Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιό το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις ανισότητες: $(-1)^{[1/x]} < 0$, $x - [x] > \frac{1}{2}$, $\sin\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$; Αποδείξτε ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0, η δεύτερη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και η τρίτη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0. Αποδείξτε ότι είναι λάθος ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στο $+\infty$, η τρίτη κοντά στον 0.

3.1.8. Αποδείξτε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ ($x_n < \xi$) για κάθε n.

Έστω $\xi \in A$. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A αν και μόνο αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A με όριο ξ είναι τελικά σταθερή.

3.1.9. Έστω ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Αποδείξτε ότι η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και ώστε ο x_n να έχει την ιδιότητα για κάθε n.

Αποδείξτε ότι η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ ($x_n < \xi$) για κάθε n και ώστε ο x_n να έχει την ιδιότητα για κάθε n.

3.2 Όρια συναρτήσεων.

Τώρα θα δούμε τον συνοπτικό και *ενιαίο* ορισμό του **ορίου συνάρτησης** και, κατόπιν, θα τον εξειδικεύσουμε στις διάφορες περιπτώσεις που παρουσιάζονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi, \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ εκ των οποίων το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει* **όριο** *η στο ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$. Πιο συνοπτικά: η f έχει όριο η στο ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.*
Συμβολίζουμε:

$$f(x) \xrightarrow[x \to \xi]{} \eta \quad \text{ή} \quad f(x) \to \eta \text{ όταν } x \to \xi \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to \xi} f(x) = \eta.$$

*Εκτός από την έκφραση "έχει όριο η", χρησιμοποιούμε την έκφραση "**τείνει** στο η" καθώς και τις εκφράσεις "**συγκλίνει** στον η", αν ο η είναι αριθμός, και "**αποκλίνει** στο η", αν $\eta = \pm\infty$. Αν η f δεν έχει όριο στο ξ, λέμε ότι η f* **αποκλίνει**.

Μπορούμε να εκφράσουμε τον ορισμό του ορίου με απλούστερα λόγια ως εξής: *η f έχει όριο η στο ξ αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα το η όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στο ξ παραμένοντας διαφορετικός από το ξ.*

Όταν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, το ότι ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ μπορούμε να το εκφράσουμε και ως εξής: *η f απεικονίζει το σύνολο $A \cap (N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\})$ μέσα στην περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ ή, ισοδύναμα,*

$$f\big(A \cap (N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\})\big) \subseteq N_\eta(\epsilon).$$

Η διατύπωση του ορισμού του ορίου συνάρτησης με τα σύμβολα της μαθηματικής λογικής έχει ως εξής:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \;\Leftrightarrow\; \big[\,\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A\ \big[\,(x \in N_\xi(\delta) \text{ και } x \neq \xi) \;\Rightarrow\; f(x) \in N_\eta(\epsilon)\big]\,\big]$$

Ας δούμε, τώρα, τον ορισμό του ορίου συνάρτησης εξειδικευμένο στις διάφορες περιπτώσεις, ανάλογα με το αν καθένα από τα ξ, η είναι αριθμός ή $\pm\infty$.

Περίπτωση 1: $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta \in \mathbb{R}$.
Η f έχει όριο η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$.

Περίπτωση 2: $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στον ξ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$.

Περίπτωση 3: $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στον ξ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$.

Περίπτωση 4: $\xi = +\infty$ και $\eta \in \mathbb{R}$.
Η f έχει όριο η στο $+\infty$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x > N$.

Περίπτωση 5: $\xi = +\infty$ και $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ με $x > N$.

Περίπτωση 6: $\xi = +\infty$ και $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ με $x > N$.

Περίπτωση 7: $\xi = -\infty$ και $\eta \in \mathbb{R}$.
Η f έχει όριο η στο $-\infty$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x < -N$.

Περίπτωση 8: $\xi = -\infty$ και $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ με $x < -N$.

Περίπτωση 9: $\xi = -\infty$ και $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ με $x < -N$.

Όταν θα γράφουμε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ χωρίς άλλη διευκρίνηση, θα εννοούμε ότι το όριο η είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$, αλλά και ότι το ξ είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$.

Για να έχει νόημα η ύπαρξη ή η μη-ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f. Πρέπει να πούμε ότι οι περισσότερες συναρτήσεις που εμφανίζονται στην πράξη έχουν ως πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα, το οποίο δεν είναι μονοσύνολο, ή κάποια πεπερασμένη ένωση τέτοιων διαστημάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση ένας ξ αποτελεί σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι εσωτερικό σημείο ή άκρο ενός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το $(a, b]$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x\to\xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν στο $[a, b]$. Ανάλογα, αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(a, b) \cup (b, +\infty)$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x\to\xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τα ξ που ανήκουν στο $[a, +\infty]$. Και, αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(-\infty, b] \cup \{c\} \cup (d, e]$, όπου $b < c < d$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x\to\xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τα ξ που ανήκουν στο $[-\infty, b] \cup [d, e]$ και όχι για τον c, ο οποίος δεν είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού.

Παράδειγμα 3.2.1. Τώρα θα δούμε παράδειγμα συνάρτησης με σχετικά απλό τύπο αλλά με κάπως περίπλοκο πεδίο ορισμού. Θεωρούμε την συνάρτηση που ορίζεται με τον τύπο

$$f(x) = \big(x \sin \tfrac{1}{x}\big)^{1/2}.$$

Το πεδίο ορισμού A της f προκύπτει λύνοντας την $x \sin \frac{1}{x} \geq 0$ και εύκολα βρίσκουμε ότι

$$A = \big(-\infty, -\tfrac{1}{\pi}\big] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big[-\tfrac{1}{2n\pi}, -\tfrac{1}{(2n+1)\pi}\big] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big[\tfrac{1}{(2n+1)\pi}, \tfrac{1}{2n\pi}\big] \cup \big[\tfrac{1}{\pi}, +\infty\big).$$

Παρατηρούμε ότι το A βρίσκεται και στις δυο μεριές του 0 και αποτελείται από άπειρα συμμετρικά ως προς τον 0 διαστήματα τα οποία προσεγγίζουν απεριόριστα τον 0. Δηλαδή, ο 0 είναι (και από τις δυο μεριές του) σημείο συσσώρευσης του A και, επομένως, έχει νόημα η ύπαρξη ή η μη-ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to 0} f(x)$. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πολύ εύκολα ότι το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0.
Παρατηρήστε ότι εκτός από τα άπειρα διαστήματα στα οποία είναι ορισμένη η f, *υπάρχουν και άπειρα άλλα συμπληρωματικά διαστήματα και στις δυο μεριές του 0 τα οποία προσεγγίζουν απεριόριστα τον 0 και στα οποία δεν είναι ορισμένη η f. Τα διαστήματα ορισμού και τα διαστήματα μη-ορισμού της f εναλλάσσονται διαρκώς πλησιάζοντας τον 0 και από τις δυο μεριές του και, επομένως, δεν υπάρχει κανένα διάστημα με άκρο τον 0, είτε δεξιά είτε αριστερά του 0, στο οποίο να είναι ορισμένη η f.*

Τώρα θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις ανάλογες εκείνων που είχαμε κάνει για τον ορισμό του ορίου ακολουθίας. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ όταν $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, θεωρούμε έναν τυχόντα $\epsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός $\delta > 0$ (ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ) τέτοιου ώστε

$$\text{το } \ 0 < |x - \xi| < \delta \ \text{ να συνεπάγεται } \ (\Rightarrow) \ \text{ το } \ |f(x) - \eta| < \epsilon$$

ή, ισοδύναμα, ώστε

$$\text{το } \ |f(x) - \eta| < \epsilon \ \text{ να συνεπάγεται } \textit{από} \ (\Leftarrow) \ \text{ το } \ 0 < |x - \xi| < \delta.$$

Φυσικά, για να έχουν νόημα όλα τα παραπάνω, εργαζόμαστε με την υπόθεση ότι *ο x ανήκει και στο πεδίο ορισμού της f.*
Η τακτική που ακολουθούμε είναι να ξεκινήσουμε από την ανισοτική σχέση $|f(x)-\eta| < \epsilon$ και να καταλήξουμε στην $0 < |x - \xi| < \delta$ (δηλαδή, να λύσουμε ως προς x) περνώντας από διαδοχικές ενδιάμεσες σχέσεις έτσι ώστε: αφ' ενός κάθε επόμενη σχέση να συνεπάγεται την προηγούμενή της σχέση και αφ' ετέρου κάθε επόμενη σχέση να είναι απλούστερη από την προηγούμενή της σχέση. Σε όλη τη διαδικασία πρέπει η μεταβλητή x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Τα ανάλογα μπορούμε να πούμε και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου.

Παράδειγμα 3.2.2. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 4}(3x + 2) = 14$.
Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε x με $0 < |x - 4| < \delta$ να ισχύει $|(3x + 2) - 14| < \epsilon$.

Το $|(3x+2)-14|<\epsilon$ συνεπάγεται από το $|3x-12|<\epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $|x-4|<\frac{\epsilon}{3}$. Με σύμβολα:

$$|(3x+2)-14|<\epsilon \;\Leftarrow\; |3x-12|<\epsilon \;\Leftarrow\; |x-4|<\tfrac{\epsilon}{3}.$$

Προφανώς, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\le\frac{\epsilon}{3}$, τότε για κάθε x με $0<|x-4|<\delta$ ισχύει $|x-4|<\frac{\epsilon}{3}$ και, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, $|(3x+2)-14|<\epsilon$. Με σύμβολα:

$$0<|x-4|<\delta \;\Rightarrow\; |x-4|<\tfrac{\epsilon}{3} \;\Rightarrow\; |3x-12|<\epsilon \;\Rightarrow\; |(3x+2)-14|<\epsilon.$$

Τώρα ένα λίγο πιο περίπλοκο όριο.

Παράδειγμα 3.2.3. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x-1}=5$.

Έστω $\epsilon>0$. Θα βρούμε $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|\frac{x^2+1}{x-1}-5|<\epsilon$ για κάθε $x\neq 1$ με $0<|x-2|<\delta$. Βάζουμε τον περιορισμό $x\neq 1$, διότι ο x πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\frac{x^2+1}{x-1}$.
Το $|\frac{x^2+1}{x-1}-5|<\epsilon$ συνεπάγεται από το $\frac{|x^2-5x+6|}{|x-1|}<\epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<\epsilon$. Τώρα διαπιστώνουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι κάπως άβολο να λυθεί ως προς x, οπότε θα εφαρμόσουμε κάποια τεχνική ήδη γνωστή μας από ανάλογες περιπτώσεις με υπολογισμούς ορίων ακολουθιών: θα αντικαταστήσουμε την ποσότητα $\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}$ με κάποια μεγαλύτερη και απλούστερη. Συγχρόνως, επειδή ο παρονομαστής $|x-1|$ μηδενίζεται όταν $x=1$, θα προσπαθήσουμε να πάρουμε τον δ έτσι ώστε από την $0<|x-2|<\delta$ να προκύπτει ότι ο x είναι μακρυά από τον 1. Αυτό *είναι* εφικτό: *αν ο x είναι κοντά στον 2, τότε είναι μακρυά από τον* 1. Πράγματι, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\le\frac{1}{2}$, τότε από το $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται το $|x-2|<\frac{1}{2}$ και, επειδή η απόσταση ανάμεσα στους 1 και 2 είναι ίση με 1, συνεπάγεται το $|x-1|>\frac{1}{2}$. Επιπλέον, *αν ο x είναι κοντά στον* 2, *τότε δεν είναι πολύ μακρυά από τον* 3. Πράγματι, επειδή η απόσταση ανάμεσα στους 3 και 2 είναι ίση με 1, από το $|x-2|<\frac{1}{2}$ συνεπάγεται το $|x-3|<\frac{3}{2}$.
Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\le\frac{1}{2}$, τότε από το $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται το

$$\tfrac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<\tfrac{|x-2|(3/2)}{1/2}=3|x-2|.$$

Με άλλα λόγια:

$$0<\delta\le\tfrac{1}{2} \;:\qquad 0<|x-2|<\delta \;\Rightarrow\; \tfrac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<3|x-2|. \tag{3.1}$$

Τώρα έχουμε ότι από το $|x-2|<\frac{\epsilon}{3}$ συνεπάγεται το $3|x-2|<\epsilon$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\le\frac{\epsilon}{3}$, τότε από το $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται το $3|x-2|<\epsilon$. Δηλαδή:

$$0<\delta\le\tfrac{\epsilon}{3} \;:\qquad 0<|x-2|<\delta \;\Rightarrow\; 3|x-2|<\epsilon. \tag{3.2}$$

Άρα, συνολικά, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta>0$ ώστε $\delta\le\frac{1}{2}$ *και* $\delta\le\frac{\epsilon}{3}$, τότε συνδυάζουμε τις (3.1) και (3.2) ως εξής: από το $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται το $\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<3|x-2|$ (επειδή $\delta\le\frac{1}{2}$) καθώς και το $3|x-2|<\epsilon$ (επειδή $\delta\le\frac{\epsilon}{3}$) και, επομένως, το $\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<\epsilon$. Δηλαδή:

$$0<\delta\le\min\{\tfrac{1}{2},\tfrac{\epsilon}{3}\} \;:\qquad 0<|x-2|<\delta \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{c}\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<3|x-2|\\ 3|x-2|<\epsilon\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \tfrac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<\epsilon.$$

Τώρα θα δούμε μερικά βασικά όρια. Στα δυο πρώτα παρατηρήστε ότι τα επιχειρήματα είναι διατυπωμένα με την ορολογία των περιοχών και δεν ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις $\xi\in\mathbb{R}$ και $\xi=\pm\infty$ (και τις ανάλογες περιπτώσεις για το η).

Παράδειγμα 3.2.4. Έστω η σταθερή συνάρτηση c. Για κάθε $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ ισχύει

$$\lim_{x\to\xi}c=c.$$

Έστω $\epsilon>0$. Βλέπουμε ότι για *κάθε* x ισχύει $|c-c|=0<\epsilon$. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε $\delta>0$ (για παράδειγμα, $\delta=1$) και τότε για κάθε $x\in N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$ ισχύει $|c-c|=0<\epsilon$.

Παράδειγμα 3.2.5. Για κάθε $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to \xi} x = \xi.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ να ισχύει $x \in N_\xi(\epsilon)$. Τώρα, προφανώς, παίρνοντας οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \epsilon$ έχουμε ότι $N_\xi(\delta) \subseteq N_\xi(\epsilon)$. Επομένως, για κάθε $x \in N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ ισχύει $x \in N_\xi(\epsilon)$.

Παράδειγμα 3.2.6. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Για το πρώτο όριο, έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ για κάθε $x > N$. Το $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $\frac{1}{|x|} < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $|x| > \frac{1}{\epsilon}$ κι αυτό συνεπάγεται από το $x > \frac{1}{\epsilon}$. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως, $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$.
Για το δεύτερο όριο, έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ για κάθε $x < -N$. Το $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $\frac{1}{|x|} < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $|x| > \frac{1}{\epsilon}$ κι αυτό συνεπάγεται από το $x < -\frac{1}{\epsilon}$. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, τότε για κάθε $x < -N$ ισχύει $x < -\frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως, $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, ξ από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Λέμε ότι η f έχει* **αριστερό πλευρικό όριο** *η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_{\xi-}(\delta)$ με $x \neq \xi$. Πιο συνοπτικά: η f έχει αριστερό πλευρικό όριο η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του.*
Συμβολίζουμε:

$$f(x) \xrightarrow[x \to \xi-]{} \eta \quad \text{ή} \quad f(x) \to \eta \ \text{όταν} \ x \to \xi- \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to \xi-} f(x) = \eta.$$

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, ξ από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Λέμε ότι η f έχει **δεξιό πλευρικό όριο** *η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_{\xi+}(\delta)$ με $x \neq \xi$. Πιο συνοπτικά: η f έχει δεξιό πλευρικό όριο η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του.*
Συμβολίζουμε:

$$f(x) \xrightarrow[x \to \xi+]{} \eta \quad \text{ή} \quad f(x) \to \eta \ \text{όταν} \ x \to \xi+ \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to \xi+} f(x) = \eta.$$

Με άλλα λόγια: *η f τείνει στο η από τα δεξιά (αριστερά) του ξ αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα το η όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ παραμένοντας στην δεξιά (αριστερή) μεριά του ξ.*

Για να έχει νόημα η ύπαρξη ή η μη-ύπαρξη του $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f ενώ για την ύπαρξη ή την μη-ύπαρξη του $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f. Θα ξαναπούμε ότι οι περισσότερες συναρτήσεις που εμφανίζονται στην πράξη έχουν ως πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα, το οποίο δεν είναι μονοσύνολο, ή κάποια πεπερασμένη ένωση τέτοιων διαστημάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση ένας ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι *εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο* ενός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού ενώ ένας ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι *εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο* ενός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού.

Παράδειγμα 3.2.7. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to 0-} \operatorname{sign} x = \lim_{x \to 0-} \frac{x}{|x|} = -1, \qquad \lim_{x \to 0+} \operatorname{sign} x = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{|x|} = 1.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{x}{|x|} - (-1)\right| < \epsilon$ για κάθε x με $-\delta < x < 0$.
Παρατηρούμε ότι, αν $x < 0$, τότε ισχύει $\frac{x}{|x|} = -1$, οπότε $\left|\frac{x}{|x|} + 1\right| = 0$. Επιλέγουμε *οποιονδήποτε* $\delta > 0$ και τότε για κάθε x με $-\delta < x < 0$ ισχύει $\left|\frac{x}{|x|} + 1\right| < \epsilon$.
Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{x}{|x|} - 1\right| < \epsilon$ για κάθε x με $0 < x < \delta$.
Παρατηρούμε ότι, αν $x > 0$, τότε ισχύει $\frac{x}{|x|} = 1$, οπότε $\left|\frac{x}{|x|} - 1\right| = 0$. Επιλέγουμε *οποιονδήποτε* $\delta > 0$ και τότε για κάθε x με $0 < x < \delta$ ισχύει $\left|\frac{x}{|x|} - 1\right| < \epsilon$.

Παράδειγμα 3.2.8. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x} < -M$ για κάθε x με $-\delta < x < 0$.
Το $\frac{1}{x} < -M$ συνεπάγεται από το $-\frac{1}{M} < x < 0$. Θεωρούμε οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$ και τότε για κάθε x με $-\delta < x < 0$ ισχύει $-\frac{1}{M} < x < 0$ και, επομένως, $\frac{1}{x} < -M$.
Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x} > M$ για κάθε x με $0 < x < \delta$.
Το $\frac{1}{x} > M$ συνεπάγεται από το $0 < x < \frac{1}{M}$. Θεωρούμε οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$ και τότε για κάθε x με $0 < x < \delta$ ισχύει $0 < x < \frac{1}{M}$ και, επομένως, $\frac{1}{x} > M$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε το όριο της f στον ξ υπάρχει αν και μόνο αν και τα δυο πλευρικά όρια της f στον ξ υπάρχουν και είναι ίσα και, σ' αυτήν την περίπτωση,* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του.
Άρα $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. □

Παράδειγμα 3.2.9. Το $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ *δεν* υπάρχει, διότι τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.

Παράδειγμα 3.2.10. Ομοίως, το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *δεν* υπάρχει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$.*
[α] *Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε το όριο της f στον ξ υπάρχει αν και μόνο αν το δεξιό πλευρικό όριο της f στον ξ υπάρχει και, σ' αυτήν την περίπτωση,* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$.
[β] *Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε το όριο της f στον ξ υπάρχει αν και μόνο αν το αριστερό πλευρικό όριο της f στον ξ υπάρχει και, σ' αυτήν την περίπτωση,* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x)$.

Απόδειξη. [α] Έστω $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ, οπότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του.
Άρα $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$.
[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 3.2.11. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{2}{x+|x|}$ είναι το $(0,+\infty)$ και στο $(0,+\infty)$ η $\frac{2}{x+|x|}$ ταυτίζεται με την $\frac{2}{x+x}=\frac{1}{x}$. Επειδή, όπως έχουμε αποδείξει, είναι $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+}\frac{2}{x+|x|}=+\infty$. Τέλος, επειδή ο 0 είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(0,+\infty)$ συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x+|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{2}{x+|x|}=+\infty$.

Ασύμπτωτες ευθείες.

Ας μιλήσουμε λίγο και για τη σχέση του ορίου με το γράφημα μιας συνάρτησης.

Έστω $\xi\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$. Θεωρούμε ότι ο x πλησιάζει τον ξ παραμένοντας διαφορετικός από τον ξ και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις. (i) Αν $\eta\in\mathbb{R}$, το σημείο $(x,f(x))$ του γραφήματος της f πλησιάζει το σημείο (ξ,η), δηλαδή πλησιάζει σε ύψος η την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=\xi$. (ii) Αν $\eta=+\infty$, το σημείο $(x,f(x))$ ανεβαίνει απεριόριστα ψηλά, οπότε πλησιάζει σε απεριόριστα μεγάλο θετικό ύψος την κατακόρυφη ευθεία $x=\xi$. (iii) Τέλος, αν $\eta=-\infty$, το σημείο $(x,f(x))$ κατεβαίνει απεριόριστα χαμηλά, οπότε πλησιάζει σε απεριόριστα μεγάλο αρνητικό ύψος την κατακόρυφη ευθεία $x=\xi$. Σε κάθε περίπτωση, το σημείο $(x,f(x))$ παραμένει εκτός της ευθείας $x=\xi$, διότι ο x είναι διαφορετικός του ξ.

Στις δυο τελευταίες περιπτώσεις, δηλαδή αν $\xi\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi}f(x)=\pm\infty$, η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=\xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της f.

Έχουμε ανάλογες διατυπώσεις για τα πλευρικά όρια στον ξ. Στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi+}f(x)$ η μόνη αλλαγή στα προηγούμενα είναι ότι το σημείο $(x,f(x))$ παραμένει δεξιά της κατακόρυφης ευθείας $x=\xi$ ενώ στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi-}f(x)$ το σημείο $(x,f(x))$ παραμένει αριστερά της κατακόρυφης ευθείας $x=\xi$. Γενικότερα:

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η ευθεία με εξίσωση $x=\xi$ χαρακτηρίζεται* **κατακόρυφη ασύμπτωτη** *του γραφήματος της f σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις περιπτώσεις:* $\lim_{x\to\xi\pm}f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to\xi\pm}f(x)=\mp\infty$.

Κατόπιν, έστω $\eta\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\eta$. Τότε, καθώς ο x απομακρύνεται προς τα δεξιά, το σημείο $(x,f(x))$ του γραφήματος της f απομακρύνεται κι αυτό προς τα δεξιά και πλησιάζει την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=\eta$. Ομοίως, αν $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\eta$, τότε, καθώς ο x απομακρύνεται προς τα αριστερά, το σημείο $(x,f(x))$ απομακρύνεται κι αυτό προς τα αριστερά και πλησιάζει την οριζόντια ευθεία $y=\eta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $\eta\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\eta$ ή $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\eta$, τότε η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=\eta$ χαρακτηρίζεται* **οριζόντια ασύμπτωτη** *στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως, του γραφήματος της f.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η ευθεία l με εξίσωση $y=\mu x+\nu$ χαρακτηρίζεται* **(πλάγια) ασύμπτωτη** *ευθεία στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ του γραφήματος της f αν, αντιστοίχως,* $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\mu x-\nu)=0$ *ή* $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x-\nu)=0$.

Αυτά σημαίνουν ότι το σημείο $(x,f(x))$ του γραφήματος της f και το αντίστοιχο σημείο $(x,\mu x+\nu)$ της l (ο ίδιος x και στα δυο σημεία) πλησιάζουν το ένα το άλλο καθώς κινούνται προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά, αντιστοίχως. Πιο απλά: το γράφημα της συνάρτησης προσεγγίζει την ευθεία l κοντά στο $-\infty$ ή στο $+\infty$.

Παρατηρήστε ότι οι οριζόντιες ασύμπτωτες ευθείες είναι, απλώς, πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες με συντελεστή $\mu=0$.

Στην επόμενη ενότητα θα μάθουμε τον τρόπο να βρίσκουμε, όταν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες του γραφήματος μιας συνάρτησης.

Ασκήσεις.

3.2.1. Έχουν νόημα τα $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x+|x|}$, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3x^2+2x-6}}$, $\lim_{x\to 0}\sqrt{-x^2}$, $\lim_{x\to 3+}\sqrt{18-2x^2}$, $\lim_{x\to 1-}\log(x^2-1)$, $\lim_{x\to-\infty}(x+2)^{6/4}$;
Προσέξτε: η ερώτηση είναι αν *έχουν νόημα* τα όρια και όχι αν υπάρχουν ή ποιά είναι η τιμή τους.

Αποδείξτε ότι τα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(1/x)}$, $\lim_{x\to+\infty}\log\sin x$, $\lim_{x\to 0}\log\sin\frac{1}{x}$ έχουν νόημα.

3.2.2. Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι $\lim_{x\to 2}3x=6$, $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x}+1)=2$, $\lim_{x\to 1}x^2=1$, $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{(x-1)^2}=+\infty$, $\lim_{x\to 2+}\frac{x}{2-x}=-\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{2x+1}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(3x^2+x)=+\infty$.

3.2.3. Έστω $A\subseteq B$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, οπότε, σύμφωνα με την άσκηση 3.1.4, το ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του B. Έστω $g:B\to\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi}g(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ ο περιορισμός της g στο A, δηλαδή $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$.

3.2.4. [1] Έστω $A\cap B=\emptyset$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και του B. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$, ορίζουμε $h:A\cup B\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\begin{cases}f(x), & \text{αν } x\in A\\ g(x), & \text{αν } x\in B\end{cases}$ Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi}h(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν τα $\lim_{x\to\xi}f(x)$, $\lim_{x\to\xi}g(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}f(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)$.

3.2.5. [2] Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.
Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$ είναι λάθος αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε να ισχύει $f(x)\notin N_\eta(\epsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.
Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$ είναι λάθος αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχει $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$ ώστε $f(x)\notin N_\eta(\epsilon)$.
Εξειδικεύστε (με ανισότητες κλπ) στις εννέα περιπτώσεις ορίων.

3.2.6. [3] Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω $\epsilon_0>0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ με $0<\epsilon\leq\epsilon_0$ ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.

3.2.7. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $\epsilon>0$ να ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$. Τί συμπεραίνετε;

3.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια συναρτήσεων.

Για όλες τις ιδιότητες ορίων ακολουθιών υπάρχουν αντίστοιχες ιδιότητες ορίων συναρτήσεων. Αυτό είναι φανερό με μια απλή αντιπαραβολή αυτής της ενότητας με την ενότητα 2.3.

Πριν προχωρήσουμε, θα κάνουμε μια παρατήρηση για τα συμπεράσματα αυτής της ενότητας σε σχέση με πλευρικά όρια. Χάριν συντομίας, όλα τα συμπεράσματα διατυπώνονται για όρια (δηλαδή για $x\to\xi$) αλλά ισχύουν και για πλευρικά όρια (δηλαδή για $x\to\xi+$ και $x\to\xi-$) με την ανάλογη διατύπωση. Απλώς αλλάζουμε το “σημείο συσσώρευσης” σε “από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης”, το $\lim_{x\to\xi}$ σε $\lim_{x\to\xi+}$ ($\lim_{x\to\xi-}$), το “κοντά στο ξ” σε “κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του” και το “σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ” σε “σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του”.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. *Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ. Αν η μια από τις f, g έχει κάποιο όριο στο ξ, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο στο ξ.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon>0$. Τότε ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Επίσης, ισχύει $f(x)=g(x)$ κοντά στο ξ, οπότε ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ και $f(x)=g(x)$ και, επομένως, $g(x)\in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi}g(x)=\eta$. □

[1] Η συνάρτηση h αποτελεί “συγκόληση” των συναρτήσεων f και g.
[2] Αναλυτικές διατυπώσεις της *άρνησης* του ορίου.
[3] Ισοδύναμος ορισμός του ορίου. Όπως και στην ανάλογη άσκηση 2.2.7 για όρια ακολουθιών: *στον ορισμό του ορίου μπορούμε να περιοριστούμε σε $\epsilon>0$ οι οποίοι δεν ξεπερνούν έναν αυθαίρετα προεπιλεγμένο $\epsilon_0>0$.*

Δηλαδή, η οριακή συμπεριφορά μιας συνάρτησης στο ξ δεν επηρεάζεται από τις τιμές της συνάρτησης μακρυά από το ξ αλλά μόνο από τις τιμές της σε μια περιοχή του ξ (χωρίς το ξ), η οποία (περιοχή) μπορεί να είναι *οσοδήποτε μικρή*.

Παράδειγμα 3.3.1. Έστω $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } 0 < |x| < 10^{-4} \\ x, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } |x| \geq 10^{-4} \end{cases}$ Επειδή ισχύει $f(x) = \frac{1}{x}$ κοντά στον 0 και το $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει, συνεπάγεται ότι ούτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$ υπάρχει.

Παράδειγμα 3.3.2. Έστω $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } x > 10^{100} \\ x, & \text{αν } x \leq 10^{100} \end{cases}$ Επειδή ισχύει $f(x) = \frac{1}{x}$ κοντά στο $+\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Επειδή ισχύει $f(x) = x$ κοντά στο $-\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Από ανισότητες ορίων σε ανισότητες τιμών.

Η πρόταση 3.4 περιγράφει *πώς βγάζουμε συμπεράσματα για ανισοτικές σχέσεις των τιμών μιας συνάρτησης κοντά στο ξ από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις του ορίου της στο ξ.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$.*
[α] *Αν $\eta > u$, τότε ισχύει $f(x) > u$ κοντά στο ξ.*
[β] *Αν $\eta < l$, τότε ισχύει $f(x) < l$ κοντά στο ξ.*
[γ] *Αν $u < \eta < l$, τότε ισχύει $u < f(x) < l$ κοντά στο ξ.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ να είναι δεξιά του u. Επειδή ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) > u$ κοντά στο ξ.
[β] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ να είναι αριστερά του l. Επειδή ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < l$ κοντά στο ξ.
[γ] Θεωρούμε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους u, l. Επειδή ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $u < f(x) < l$ κοντά στο ξ. □

Παράδειγμα 3.3.3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1}$. Θα μάθουμε λίγο αργότερα να υπολογίζουμε όρια όπως το $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2} = 0.5$. Αν δεχτούμε αυτό το όριο, και πάρουμε τους αριθμούς 0.4999999 και 0.5000001, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει κάποιος $N > 0$ ώστε να ισχύει $0.4999999 < f(x) < 0.5000001$ στο διάστημα $(-\infty, -N)$. Δηλαδή, οι τιμές της συνάρτησης σε *κάποιο* διάστημα κοντά στο $-\infty$ κυμαίνονται σε ένα πολύ μικρό διάστημα εύρους ± 0.0000001 γύρω από την οριακή τιμή 0.5. Φυσικά, το να βρούμε μια συγκεκριμένη τιμή του N ώστε να ισχύει κάτι τέτοιο απαιτεί ιδιαίτερη εργασία, διότι ο τύπος της συνάρτησης δεν είναι απλός. Αν θέλουμε, μπορούμε να πούμε τα ίδια σχετικά με την κύμανση των τιμών της συνάρτησης κοντά στο $-\infty$, παίρνοντας ένα ακόμη πιο μικρό διάστημα, για παράδειγμα εύρους $\pm 10^{-1000}$ γύρω από την οριακή τιμή 0.5. Βέβαια, τότε ο αντίστοιχος N θα είναι διαφορετικός (και μάλλον πολύ-πολύ μεγαλύτερος) από τον προηγούμενο N.

Η πρόταση 3.5 εκφράζει τη **μοναδικότητα του ορίου**. Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Το όριο της f στο ξ, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f έχει δυο διαφορετικά όρια a, b στο ξ. Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε οι περιοχές $N_a(\epsilon)$ και $N_b(\epsilon)$ να είναι ξένες. Τότε ισχύει $f(x) \in N_a(\epsilon)$ κοντά στο ξ και ισχύει $f(x) \in N_b(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x) \in N_a(\epsilon)$ και $f(x) \in N_b(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Άτοπο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*

[α] *Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ.*

[β] *Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, τότε η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ αλλά είναι λάθος ότι είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ.*

[γ] *Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$, τότε η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ αλλά είναι λάθος ότι είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε δυο οποιουσδήποτε αριθμούς l και u ώστε $l < \eta < u$, για παράδειγμα τους $l = \eta - 1$, $u = \eta + 1$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.4, ισχύει $l < f(x) < u$ κοντά στο ξ. Άρα η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ.

[β] Παίρνουμε οποιονδήποτε l και τότε ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο ξ, οπότε η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ.

Επίσης, για κάθε l ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο ξ. Αρα κανένας l δεν είναι άνω φράγμα της f κοντά στο ξ, οπότε είναι λάθος ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ.

[γ] Ομοίως. □

Παράδειγμα 3.3.4. Ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αυτό *δεν* σημαίνει ότι η $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της. Η $\frac{1}{x}$ δεν είναι φραγμένη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ούτε καν στο $(0, +\infty)$. *Υπάρχει*, όμως, διάστημα $(N, +\infty)$ στο οποίο η $\frac{1}{x}$ *είναι* φραγμένη. Αυτό ελέγχεται εύκολα επειδή η συνάρτηση έχει απλό τύπο. Για παράδειγμα, ισχύει $0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Από ανισότητες τιμών σε ανισότητες ορίων.

Η πρόταση 3.7 περιγράφει *πώς βγάζουμε συμπεράσματα για ανισοτικές σχέσεις του ορίου μιας συνάρτησης στο ξ από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις των τιμών της κοντά στο ξ.* Τα πρώτα δυο συμπεράσματα της πρότασης 3.7 είναι ισοδύναμα με τα αντίστοιχα συμπεράσματα της πρότασης 3.4. Το τρίτο συμπέρασμα είναι ένα χρήσιμο κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου: *αν υπάρχουν δυο αριθμοί που χωρίζουν τις τιμές μιας συνάρτησης σε κάποια σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ από τις τιμές της σε κάποια άλλα σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε η συνάρτηση δεν έχει όριο στο ξ.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*

[α] *Αν ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\eta \geq l$.*

[β] *Αν ισχύει $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\eta \leq u$.*

[γ] *Αν $u < l$ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και ισχύει $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε η f δεν έχει όριο στο ξ.*

Απόδειξη. [α] Αν ήταν $\eta < l$, θα ίσχυε $f(x) < l$ κοντά στο ξ, οπότε δεν θα μπορούσε να ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Άρα $\eta \geq l$.

[β] Ομοίως.

[γ] Αν η f είχε όριο στο ξ, το όριο αυτό θα ήταν $\geq l$ και $\leq u$ και, επομένως, θα ίσχυε $l \leq u$. Άρα η f δεν έχει όριο στο ξ. □

Παράδειγμα 3.3.5. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν ισχύει $f(x) \in [l, u]$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε $\eta \in [l, u]$.

Παράδειγμα 3.3.6. Έχουμε ότι

$$\text{τα } \lim_{x\to\pm\infty} \cos x \ \text{ και } \lim_{x\to\pm\infty} \sin x \ \text{ δεν υπάρχουν.}$$

Πράγματι, για την μη-ύπαρξη του πρώτου ορίου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ισχύει $\cos x \geq 1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στα $\pm\infty$ και, επίσης, ισχύει $\cos x \leq -1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στα $\pm\infty$. Συγκεκριμένα, η πρώτη ανισότητα ανισότητα ισχύει για κάθε $2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ και η δεύτερη ανισότητα ισχύει για κάθε $(2k+1)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η μη-ύπαρξη και του δεύτερου ορίου.

Τέλος, δεν υπάρχουν ούτε τα όρια $\lim_{x\to 0\pm} \cos\frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to 0\pm} \sin\frac{1}{x}$.
Για παράδειγμα, ισχύει $\cos\frac{1}{x} \geq 1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0 από αριστερά του και από δεξιά του. Επίσης, ισχύει $\cos\frac{1}{x} \leq -1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0 από αριστερά του και από δεξιά του. Συγκεκριμένα, η πρώτη ανισότητα ισχύει για $\frac{1}{2k\pi}$ με $k \in \mathbb{Z}$ και η δεύτερη ισχύει για $\frac{1}{(2k+1)\pi}$ με $k \in \mathbb{Z}$. Ομοίως για την μη-ύπαρξη των $\lim_{x\to 0\pm} \sin\frac{1}{x}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\eta \leq \zeta$.*

Απόδειξη. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $\zeta < \eta$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε a ώστε $\zeta < a < \eta$. Τότε ισχύει $g(x) < a$ κοντά στο ξ και ισχύει $a < f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $g(x) < a$ και $a < f(x)$ και, επομένως, $g(x) < f(x)$ κοντά στο ξ. Άτοπο. Άρα $\eta \leq \zeta$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο ξ.*
[α]. *Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.*
[β] *Αν $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει $f(x) > M$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x) > M$ και $g(x) \geq f(x)$ και, επομένως, $g(x) > M$ κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.
[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 3.3.7. Ισχύει $\frac{x^2+x-1}{x} \geq \frac{x^2}{x} = x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x} = +\infty$.

Η πρόταση 3.10 εκφράζει τη λεγόμενη **ιδιότητα παρεμβολής**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.10. *Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο ξ. Αν είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} h(x) = \eta \in \mathbb{R}$, τότε είναι $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in (\eta-\epsilon, \eta+\epsilon)$ κοντά στο ξ και ισχύει $h(x) \in (\eta-\epsilon, \eta+\epsilon)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x), h(x) \in (\eta-\epsilon, \eta+\epsilon)$ κοντά στο ξ και, επειδή ο $g(x)$ είναι ανάμεσα στους $f(x), h(x)$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $g(x) \in (\eta-\epsilon, \eta+\epsilon)$ κοντά στο ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$. □

Παράδειγμα 3.3.8. Ισχύει $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ και $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ καθώς και ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Αλγεβρικοί κανόνες ορίων.

Ο επόμενος ορισμός περιγράφει κάποιους βασικούς τρόπους με τους οποίους δημιουργούμε νέες συναρτήσεις από ήδη υπάρχουσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η **αντίθετη** συνάρτηση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $-f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(-f)(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.*
*Το **άθροισμα** δυο συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f + g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in A$.*
*Η **διαφορά** δυο συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f - g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f - g)(x) =$*

$f(x)-g(x)$ *για κάθε* $x\in A$.
Το **γινόμενο** *δυο συναρτήσεων* $f,g:A\to\mathbb{R}$ *είναι η συνάρτηση* $fg:A\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $(fg)(x)=f(x)g(x)$ *για κάθε* $x\in A$.
Το **γινόμενο** *αριθμού* λ *και συνάρτησης* $f:A\to\mathbb{R}$ *είναι η συνάρτηση* $\lambda f:A\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ *για κάθε* $x\in A$.
Το **αντίστροφο** *μιας συνάρτησης* $f:A\to\mathbb{R}$ *είναι η συνάρτηση* $\frac{1}{f}:A\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$ *για κάθε* $x\in A$.
Για να ορίζεται η συνάρτηση $\frac{1}{f}:A\to\mathbb{R}$ *πρέπει να ισχύει* $f(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in A$.
Ο **λόγος** *δυο συναρτήσεων* $f,g:A\to\mathbb{R}$ *είναι η συνάρτηση* $\frac{f}{g}:A\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ *για κάθε* $x\in A$.
Για να ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}:A\to\mathbb{R}$ *πρέπει να ισχύει* $g(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in A$.
Η **απόλυτη τιμή** *μιας συνάρτησης* $f:A\to\mathbb{R}$ *είναι η συνάρτηση* $|f|:A\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $|f|(x)=|f(x)|$ *για κάθε* $x\in A$.

Η επόμενη πρόταση περιέχει όλα τα βασικά αποτελέσματα για τις σχέσεις ανάμεσα στα όρια και τις αλγεβρικές πράξεις, δηλαδή τους λεγόμενους **αλγεβρικούς κανόνες ορίων**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11. *Έστω* $f,g:A\to\mathbb{R}$ *και* $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ *σημείο συσσώρευσης του* A *και* $\eta,\zeta\in\overline{\mathbb{R}}$ *και αριθμός* λ. *Θεωρούμε όλα τα παρακάτω όρια όταν* $x\to\xi$.
[α] *Αν* $f(x)\to\eta$, *τότε* $-f(x)\to-\eta$.
[β] *Αν* $f(x)\to\eta$, *τότε* $|f(x)|\to|\eta|$.
[γ] *Αν* $f(x)\to\eta$, $g(x)\to\zeta$ *και το* $\eta+\zeta$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $f(x)+g(x)\to\eta+\zeta$.
[δ] *Αν* $f(x)\to\eta$, $g(x)\to\zeta$ *και το* $\eta-\zeta$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $f(x)-g(x)\to\eta-\zeta$.
[ε] *Αν* $f(x)\to\eta$, $g(x)\to\zeta$ *και το* $\eta\zeta$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $f(x)g(x)\to\eta\zeta$.
[στ] *Αν* $f(x)\to\eta$ *και το* $\lambda\eta$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $\lambda f(x)\to\lambda\eta$.
[ζ] *Έστω ότι ισχύει* $f(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in A$. *Αν* $f(x)\to\eta$ *και το* $\frac{1}{\eta}$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή αν* $\eta\neq 0$*), τότε* $\frac{1}{f(x)}\to\frac{1}{\eta}$.
[η] *Έστω ότι ισχύει* $g(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in A$. *Αν* $f(x)\to\eta$, $g(x)\to\zeta$ *και το* $\frac{\eta}{\zeta}$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{\eta}{\zeta}$.

Απόδειξη. [α] Έστω $f(x)\to\eta$ και $\eta\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon>0$ ισχύει $|f(x)-\eta|<\epsilon$ και, επομένως,
$$|(-f(x))-(-\eta)|=|f(x)-\eta|<\epsilon$$
κοντά στο ξ. Άρα $-f(x)\to-\eta$.
Έστω $f(x)\to+\infty$. Τότε για κάθε $M>0$ ισχύει $f(x)>M$ και, επομένως, $-f(x)<-M$ κοντά στο ξ. Άρα $-f(x)\to-\infty$, οπότε $-f(x)\to-(+\infty)$.
Έστω $f(x)\to-\infty$. Τότε για κάθε $M>0$ ισχύει $f(x)<-M$ και, επομένως, $-f(x)>M$ κοντά στο ξ. Άρα $-f(x)\to+\infty$, οπότε $-f(x)\to-(-\infty)$.
[β] Έστω $f(x)\to\eta$ και $\eta\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon>0$ ισχύει $|f(x)-\eta|<\epsilon$ και, επομένως,
$$\big||f(x)|-|\eta|\big|\leq|f(x)-\eta|<\epsilon$$
κοντά στο ξ. Άρα $|f(x)|\to|\eta|$.
Έστω $f(x)\to+\infty$. Τότε για κάθε $M>0$ ισχύει $f(x)>M$ και, επομένως, $|f(x)|>M$ κοντά στο ξ. Άρα $|f(x)|\to+\infty$, οπότε $|f(x)|\to|+\infty|$.
Έστω $f(x)\to-\infty$. Τότε για κάθε $M>0$ ισχύει $f(x)<-M$ και, επομένως, $|f(x)|>M$ κοντά στο ξ. Άρα $|f(x)|\to+\infty$, οπότε $|f(x)|\to|-\infty|$.
[γ] Έστω $f(x)\to\eta$ και $g(x)\to\zeta$ και $\eta,\zeta\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon>0$ ισχύει $|f(x)-\eta|<\frac{\epsilon}{2}$ και,

επίσης, ισχύει $|g(x)-\zeta| < \frac{\epsilon}{2}$ κοντά στο ξ, οπότε ισχύουν και οι δυο αυτές ανισότητες κοντά στο ξ, οπότε ισχύει

$$|(f(x)+g(x))-(\eta+\zeta)| = |(f(x)-\eta)+(g(x)-\zeta)| \leq |f(x)-\eta|+|g(x)-\zeta| < \tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x)+g(x) \to \eta+\zeta$.
Έστω $f(x) \to +\infty$ και $g(x) \to \zeta$ και $\zeta \in (-\infty,+\infty]$. Τότε η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει l ώστε να ισχύει $g(x) > l$ κοντά στο ξ. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > M-l$ και, επομένως, ισχύει

$$f(x)+g(x) > (M-l)+l = M$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x)+g(x) \to +\infty$, οπότε $f(x)+g(x) \to \eta+\zeta$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[δ] Άμεση συνέπεια των [α] και [γ].

[ε] Έστω $f(x) \to \eta$ και $g(x) \to \zeta$ και $\eta,\zeta \in \mathbb{R}$. Τότε η g είναι φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|g(x)| \leq M$ κοντά στο ξ. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x)-\eta| < \frac{\epsilon}{2M+1}$ και, επίσης, ισχύει $|g(x)-\zeta| < \frac{\epsilon}{2|\eta|+1}$ κοντά στο ξ, οπότε ισχύουν και οι δυο αυτές ανισότητες κοντά στο ξ, οπότε ισχύει

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-\eta\zeta| &= |(f(x)-\eta)g(x)+\eta(g(x)-\zeta)| \leq |f(x)-\eta||g(x)|+|\eta||g(x)-\zeta| \\ &\leq \tfrac{\epsilon M}{2M+1}+\tfrac{|\eta|\epsilon}{2|\eta|+1} < \epsilon\end{aligned}$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) \to \eta\zeta$.
Έστω $f(x) \to +\infty$ και $g(x) \to \zeta$ και $\zeta \in (0,+\infty]$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < \zeta$. Τότε ισχύει $l < g(x)$ κοντά στο ξ. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > \frac{M}{l}$ και, επομένως,

$$f(x)g(x) > \tfrac{M}{l}l = M$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) \to +\infty$, οπότε $f(x)g(x) \to \eta\zeta$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[στ] Άμεση συνέπεια του [ε].

[ζ] Έστω $f(x) \to \eta$ και $\eta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε $|f(x)| \to |\eta|$. Επειδή $|\eta| > 0$, θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < |\eta|$ και τότε ισχύει $|f(x)| > l$ κοντά στο ξ. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x)-\eta| < |\eta|l\epsilon$ και, επομένως, ισχύει

$$\big|\tfrac{1}{f(x)}-\tfrac{1}{\eta}\big| = \tfrac{|f(x)-\eta|}{|\eta||f(x)|} < \tfrac{|\eta|l\epsilon}{|\eta|l} = \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{\eta}$.
Έστω $f(x) \to +\infty$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως,

$$\big|\tfrac{1}{f(x)}-0\big| = \tfrac{1}{f(x)} < \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $\frac{1}{f(x)} \to 0$, οπότε $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{+\infty}$.
Η περίπτωση $f(x) \to -\infty$ προκύπτει από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[η] Άμεση συνέπεια των [ε] και [ζ]. □

Παράδειγμα 3.3.9. $\lim_{x\to 0-}\big(1+\frac{1}{x}\big) = 1+(-\infty) = -\infty$.

Παράδειγμα 3.3.10. $\lim_{x\to+\infty}\big(-1+\frac{1}{x}\big) = -1+0 = -1$.

Παράδειγμα 3.3.11. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 3.3.12. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(+\infty)^2+(+\infty)+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Παράδειγμα 3.3.13. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x-2}=\frac{1^2+1}{1-2}=-2.$

Παράδειγμα 3.3.14. Αν $\xi\in\mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x\to\xi}x^k=\xi^k \qquad \text{αν} \quad k\in\mathbb{Z},\ k>0 \quad \text{ή} \quad k\in\mathbb{Z},\ k<0 \text{ και } \xi\neq 0.$$

Διότι, αν $k\in\mathbb{N}$, από το $\lim_{x\to\xi}x=\xi$ παίρνουμε $\lim_{x\to\xi}x^k=\lim_{x\to\xi}(x\cdots x)=\xi\cdots\xi=\xi^k$. Αν, επιπλέον, $\xi\neq 0$, από το προηγούμενο συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{x^k}=\frac{1}{\xi^k}$.

Παράδειγμα 3.3.15. Έστω $k\in\mathbb{N}$.
Επειδή $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^k}=\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{x})^k=(+\infty)^k=+\infty$.
Επειδή $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$, τότε, αν ο k είναι άρτιος, έχουμε $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^k}=\lim_{x\to 0-}(\frac{1}{x})^k=(-\infty)^k=+\infty$ και, αν ο k είναι περιττός, έχουμε $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^k}=\lim_{x\to 0-}(\frac{1}{x})^k=(-\infty)^k=-\infty$.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι

$$\lim_{x\to 0+}x^k=+\infty \quad \text{αν} \ \ k\in\mathbb{Z},\ k<0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0-}x^k=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k<0,\, k \text{ άρτιος}\\ -\infty, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k<0,\, k \text{ περιττός}\end{cases}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0}x^k\begin{cases}=+\infty, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k<0,\, k \text{ άρτιος}\\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k<0,\, k \text{ περιττός}\end{cases}$$

Παράδειγμα 3.3.16. Έστω $k\in\mathbb{N}$.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}x^k=(+\infty)^k=+\infty$.
Επειδή $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$, τότε, αν ο k είναι άρτιος, συνεπάγεται $\lim_{x\to-\infty}x^k=(-\infty)^k=+\infty$ και, αν ο k είναι περιττός, συνεπάγεται $\lim_{x\to-\infty}x^k=(-\infty)^k=-\infty$.
Από τα προηγούμενα συνεπάγεται $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^k}=0$.
Συνοψίζουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}x^k=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k>0\\ 0, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k<0\end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k>0,\, k \text{ άρτιος}\\ -\infty, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k>0,\, k \text{ περιττός}\\ 0, & \text{αν } k\in\mathbb{Z},\, k<0\end{cases}$$

Παράδειγμα 3.3.17. $\lim_{x\to 1}|x-2|=|1-2|=1.$

Παράδειγμα 3.3.18. $\lim_{x\to 0-}\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right|=|(-\infty)-(+\infty)|=|-\infty|=+\infty.$

Παράδειγμα 3.3.19. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to+\infty}x(x-1)=(+\infty)((+\infty)-1)=+\infty.$
Η εφαρμογή του κανόνα διαφοράς στο $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Παράδειγμα 3.3.20. $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(2+x)=(+\infty)(2+0)=+\infty.$
Ο κανόνας αθροίσματος δεν εφαρμόζεται στο $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$.

Παράδειγμα 3.3.21. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{1-(1/x)+(1/x^2)}{1+(2/x)}=(+\infty)\frac{1-0+0}{1+0}=+\infty.$
Η άμεση εφαρμογή του κανόνα λόγου στο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Παράδειγμα 3.3.22. Δεν ισχύει το αντίστροφο στην πρόταση 3.11[β].
Πράγματι, $\lim_{x\to 0}|\operatorname{sign}x|=\lim_{x\to 0}1=1$, αλλά το $\lim_{x\to 0}\operatorname{sign}x$ δεν υπάρχει.
Το αντίστροφο ισχύει μόνο στην περίπτωση $\eta=0$.

Παράδειγμα 3.3.23. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Τότε

$$\lim_{x\to\xi} P(x) = \lim_{x\to\xi}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0 + a_1\xi + \cdots + a_n\xi^n = P(\xi).$$

Έστω ότι η $P(x)$ είναι βαθμού ≥ 1. Γράφουμε

$$P(x) = a_nx^n\big(\tfrac{a_0}{a_n}\tfrac{1}{x^n} + \cdots + \tfrac{a_{n-1}}{a_n}\tfrac{1}{x} + 1\big),$$

οπότε $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$. Δηλαδή, τα όρια $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ εξαρτώνται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο, και

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = a_n(+\infty), \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} a_n(+\infty), & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ a_n(-\infty), & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Για παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty}(-5x^3+x^2-4x-12) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(-5x^3+x^2-4x-12) = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}(7x^4 + x^3 - x + 5) = +\infty$.

Παράδειγμα 3.3.24. Έστω ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_n, b_m \neq 0$. Γράφουμε

$$R(x) = \tfrac{a_nx^n}{b_mx^m}\big(\tfrac{a_0}{a_n}\tfrac{1}{x^n} + \cdots + \tfrac{a_{n-1}}{a_n}\tfrac{1}{x} + 1\big)\big/\big(\tfrac{b_0}{b_m}\tfrac{1}{x^m} + \cdots + \tfrac{b_{m-1}}{b_m}\tfrac{1}{x} + 1\big),$$

οπότε, και πάλι, τα $\lim_{x\to\pm\infty} R(x)$ εξαρτώνται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή και

$$\lim\nolimits_{x\to+\infty} R(x) = \lim\nolimits_{x\to+\infty} \tfrac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} = \begin{cases} (a_n/b_m)(+\infty), & \text{αν } n > m \\ a_n/b_m, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

$$\lim\nolimits_{x\to-\infty} R(x) = \lim\nolimits_{x\to-\infty} \tfrac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} = \begin{cases} (a_n/b_m)(+\infty), & \text{αν } n-m \text{ άρτιος} > 0 \\ (a_n/b_m)(-\infty), & \text{αν } n-m \text{ περιττός} > 0 \\ a_n/b_m, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

Για παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+4}{2x^3+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+4x^2+2}{2x^2+x+1} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+3}{x^4+x^2+1} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+4}{2x^2-1} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{-x^4+2} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3-1}{2x+1} = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4-2}{2x+1} = -\infty$.
Αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε για το $\lim_{x\to\xi} R(x)$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις.
Αν $b_0 + b_1\xi + \cdots + b_m\xi^m \neq 0$, τότε $\lim_{x\to\xi} R(x) = \frac{a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n}{b_0+b_1\xi+\cdots+b_m\xi^m} = R(\xi)$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi} R(x) = R(\xi).$$

Για παράδειγμα: $\lim_{x\to1} \frac{3x-2}{x^4+2x^3-4} = \frac{3\cdot1-2}{1^4+2\cdot1^3-4} = -1$.
Αν $b_0 + b_1\xi + \cdots + b_m\xi^m = 0$, τότε το $x - \xi$ διαιρεί το $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$. Αν $(x - \xi)^k$ είναι η μέγιστη δύναμη του $x - \xi$ η οποία διαιρεί το $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m = (x - \xi)^kQ(x),$$

όπου $Q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x-\xi$ και, επομένως, $Q(\xi) \neq 0$. Τώρα, είτε το $x - \xi$ διαιρεί το $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ είτε όχι, μπορούμε να γράψουμε

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = (x - \xi)^lP(x),$$

όπου $l \geq 0$ και $P(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x-\xi$ και, επομένως, $P(\xi) \neq 0$. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε ότι

$$R(x) = (x-\xi)^{l-k}\tfrac{P(x)}{Q(x)}$$

και, επειδή $\lim_{x\to\xi}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \neq 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} R(x) \begin{cases} = 0, & \text{αν } l > k \\ = (P(\xi)/Q(\xi)), & \text{αν } l = k \\ = (P(\xi)/Q(\xi))(+\infty), & \text{αν } k-l \text{ άρτιος} > 0 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } k-l \text{ περιττός} > 0 \end{cases}$$

Ειδικότερα,

$$\lim_{x\to\xi-} R(x) = \tfrac{P(\xi)}{Q(\xi)}(-\infty), \quad \lim_{x\to\xi+} R(x) = \tfrac{P(\xi)}{Q(\xi)}(+\infty), \qquad \text{αν } k-l \text{ περιττός} > 0.$$

Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$.
Ο 1 είναι ρίζα του x^4-2x^2+1, οπότε το x^4-2x^2+1 διαιρείται από το $x-1$. Παραγοντοποιούμε είτε με τον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης είτε, πιο απλά, γράφοντας

$$x^4-2x^2+1 = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2.$$

Ο 1 είναι ρίζα και του x^3-x^2-x+1, οπότε:

$$x^3-x^2-x+1 = (x-1)x^2-(x-1) = (x-1)^2(x+1).$$

Άρα

$$\tfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} = \tfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \tfrac{1}{x+1}$$

για κάθε $x \neq 1, -1$. Επομένως,

$$\lim_{x\to1}\tfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} = \lim_{x\to1}\tfrac{1}{x+1} = \tfrac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$.
Ο 1 είναι ρίζα του x^3-x^2-x+1 και, όπως πριν, $x^3-x^2-x+1 = (x-1)^2(x+1)$.
Ο 1 είναι ρίζα και του x^3+4x^2+x-6, οπότε:

$$\begin{aligned} x^3+4x^2+x-6 &= x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6 = (x-1)x^2+(x-1)5x+(x-1)6 \\ &= (x-1)(x^2+5x+6). \end{aligned}$$

Το $x-1$ δεν διαιρεί το x^2+5x+6 διότι ο 1 δεν είναι ρίζα του. Άρα

$$\tfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1} = \tfrac{(x-1)(x^2+5x+6)}{(x-1)^2(x+1)} = \tfrac{1}{x-1}\tfrac{x^2+5x+6}{x+1}$$

για κάθε $x \neq 1, -1$. Άρα:

$$\lim_{x\to1+}\tfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1} = (+\infty)\tfrac{1^2+5\cdot1+6}{1+1} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to1-}\tfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1} = (-\infty)\tfrac{1^2+5\cdot1+6}{1+1} = -\infty.$$

Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$.

Παράδειγμα 3.3.25. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ του γραφήματος της f, οπότε $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x - \nu) = 0$.
Τότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\mu x-\nu}{x} = \frac{0}{+\infty} = 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x} - \mu - \frac{\nu}{x}) = 0$ και, επομένως,

$$\mu = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ή αν υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$, τότε δεν υπάρχει ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το όριο αυτό και είναι αριθμός, οπότε η τιμή του είναι η ζητούμενη τιμή του μ. Τώρα, η ζητούμενη τιμή του ν δίνεται από την ισότητα

$$\nu = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x),$$

στην οποία χρησιμοποιούμε την τιμή του μ την οποία μόλις προσδιορίσαμε. Παρατηρούμε και πάλι ότι, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x)$ ή αν υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$, τότε δεν υπάρχει ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$.
Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε, αν υπάρχει, την πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $x + \frac{1}{x}$. Βρίσκουμε διαδοχικά τα $\mu = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(x + \frac{1}{x}) = 1$ και $\nu = \lim_{x\to+\infty}(x + \frac{1}{x} - 1x) = 0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x + 0 = x$. Επίσης: $\mu = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}(x + \frac{1}{x}) = 1$ και $\nu = \lim_{x\to-\infty}(x + \frac{1}{x} - 1x) = 0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ είναι πάλι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x + 0 = x$.

Τα αποτελέσματα στην πρόταση 3.12 είναι κάπως γενικότερα από ανάλογα αποτελέσματα της πρότασης 3.11 και είναι χρήσιμο να τα έχουμε υπ' όψη μας. Το [δ] της πρότασης 3.12 αποτελεί το πραγματικό περιεχόμενο των συμβολικών κανόνων $\frac{1}{0+} = +\infty$ και $\frac{1}{0-} = -\infty$, τους οποίους έχουμε ορίσει στην ενότητα 2.3.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.12. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Θεωρούμε όλα τα παρακάτω όρια όταν $x \to \xi$.*
[α] *Αν $f(x) \to +\infty$ και η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, τότε $f(x) + g(x) \to +\infty$.*
Αν $f(x) \to -\infty$ και η g είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, τότε $f(x) + g(x) \to -\infty$.
[β] *Αν $f(x) \to 0$ και η g είναι φραγμένη κοντά στο ξ, τότε $f(x)g(x) \to 0$.*
[γ] *Αν $f(x) \to +\infty$ και η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ, τότε $f(x)g(x) \to +\infty$.*
Αν $f(x) \to -\infty$ και η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ, τότε $f(x)g(x) \to -\infty$.
[δ] *Έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.*
Αν $f(x) \to 0$ και η f είναι θετική κοντά στο ξ, τότε $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$.
Αν $f(x) \to 0$ και η f είναι αρνητική κοντά στο ξ, τότε $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$.
[ε] *Έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $|f(x)| \to +\infty$, τότε $\frac{1}{f(x)} \to 0$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $f(x) \to +\infty$ και έστω ότι η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει αριθμός l ώστε να ισχύει $g(x) \geq l$ κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > M - l$ και, επομένως, $f(x) + g(x) > (M - l) + l = M$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x) + g(x) \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[β] Έστω $f(x) \to 0$ και έστω ότι η g είναι φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|g(x)| \leq M$ κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M+1}$ και, επομένως,

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \frac{\epsilon M}{M+1} < \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) \to 0$.
[γ] Έστω $f(x) \to +\infty$ και έστω ότι η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει αριθμός $l > 0$ ώστε να ισχύει $g(x) \geq l$ κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > \frac{M}{l}$ και, επομένως, $f(x)g(x) > \frac{M}{l}l = M$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.

[δ] Έστω $f(x) \to 0$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $|f(x) - 0| < \frac{1}{M}$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $0 < f(x) < \frac{1}{M}$ και, επομένως, $\frac{1}{f(x)} > M$ κοντά στο ξ. Άρα $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[ε] Έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ και $|f(x)| \to +\infty$. Τότε $\frac{1}{|f(x)|} \to 0$ και, επομένως, $\frac{1}{f(x)} \to 0$. □

Παράδειγμα 3.3.26. Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και η συνάρτηση $x - [x]$ είναι φραγμένη (και, ειδικώτερα, κοντά στο $+\infty$), διότι ισχύει $0 \leq x - [x] < 1$ για κάθε x. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-[x]}{x} = 0$.

Παράδειγμα 3.3.27. Η συνάρτηση $x - [x]$ είναι κάτω φραγμένη (και, ειδικώτερα, κοντά στο $+\infty$) και $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}(2x - [x]) = \lim_{x\to+\infty}(x + (x - [x])) = +\infty$.

Παράδειγμα 3.3.28. Ισχύει $\frac{1}{2-\sin x} \geq \frac{1}{3}$ για κάθε x (και, ειδικώτερα, κοντά στο $+\infty$) και, επίσης, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\sin x} = +\infty$.

Παράδειγμα 3.3.29. Ισχύει $\lim_{x\to0} x = 0$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$. Ο λόγος είναι η εναλλαγή προσήμου της συνάρτησης x αριστερά και δεξιά του 0.

Παράδειγμα 3.3.30. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0 - 0 = 0$ και ισχύει $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1/x)-(1/x^2)} = +\infty$.

Κανόνας σύνθεσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η **σύνθεση** δυο συναρτήσεων $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in A$.*

Η πρόταση 3.13 εκφράζει τον λεγόμενο **κανόνα σύνθεσης**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.13. [4] *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του B. Αν $f(x) \to \eta$ όταν $x \to \xi$, αν ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και αν $g(y) \to \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ όταν $y \to \eta$, τότε $(g \circ f)(x) \to \zeta$ όταν $x \to \xi$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$g(y) \in N_\zeta(\epsilon) \qquad \text{για κάθε } \ y \in B \cap N_\eta(\delta) \ \text{ με } \ y \neq \eta. \tag{3.3}$$

Επειδή $f(x) \to \eta$ όταν $x \to \xi$, ισχύει $f(x) \in N_\eta(\delta)$ κοντά στο ξ. Επειδή, επίσης, ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) \in B \cap N_\eta(\delta) \ \text{ και } \ f(x) \neq \eta \qquad \text{κοντά στο } \ \xi. \tag{3.4}$$

Από την (3.4) και την (3.3) με $y = f(x)$ συνεπάγεται ότι ισχύει $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \in N_\zeta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.
Άρα $(g \circ f)(x) \to \zeta$ όταν $x \to \xi$. □

Εφαρμόζοντας τον κανόνα σύνθεσης, χρησιμοποιούμε την έκφραση "κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$" και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y).$$

Παράδειγμα 3.3.31. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0} \frac{(x^7+1)^4}{(x^7+1)^8+(x^7+1)^{12}+5}$.
Είναι $\lim_{x\to0}(x^7 + 1) = 1$ και ισχύει $x^7 + 1 \neq 1$ για κάθε $x \neq 0$. Άρα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = x^7 + 1$, έχουμε

$$\lim_{x\to0} \frac{(x^7+1)^4}{(x^7+1)^8+(x^7+1)^{12}+5} = \lim_{y\to1} \frac{y^4}{y^8+y^{12}+5} = \frac{1}{7}.$$

[4] Θα δούμε μια άλλη μορφή του κανόνα σύνθεσης στην πρόταση 4.10.

Παράδειγμα 3.3.32. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 1}\big(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^6}+1\big)$.
Είναι $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{1}{(x-1)^2}$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 1}\big(\tfrac{1}{(x-1)^2}-\tfrac{1}{(x-1)^6}+1\big)=\lim_{y\to+\infty}(y-y^3+1)=-\infty.$$

Παράδειγμα 3.3.33. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2}+(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big)$.
Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x+1}=0$ και ισχύει $\frac{x-1}{x^2+x+1}\neq 0$ για κάθε $x>1$. Με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{x-1}{x^2+x+1}$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\big((\tfrac{x-1}{x^2+x+1})^{-2}+(\tfrac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big)=\lim_{y\to 0}(y^{-2}+y^{-4})=+\infty.$$

Παράδειγμα 3.3.34. Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε ότι η υπόθεση ότι "ισχύει $f(x)\neq\eta$ κοντά στο ξ" στην πρόταση 3.13 είναι απαραίτητη.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ και $g(y)=\begin{cases}0, & \text{αν } y\neq 0\\ 1, & \text{αν } y=0\end{cases}$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ και $\lim_{y\to 0}g(y)=0$. Δεν είναι σωστό ότι ισχύει $f(x)\neq 0$ κοντά στο $+\infty$, διότι ισχύει $f(x)=0$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και, συγκεκριμένα, στα σημεία $n\pi$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Τώρα, είναι $(g\circ f)(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\neq n\pi \text{ για κάθε } n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ 1, & \text{αν } x=n\pi \text{ για κάποιον } n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\end{cases}$

Επομένως, το $\lim_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)$ δεν υπάρχει, διότι ισχύει $(g\circ f)(x)\leq 0$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και ισχύει $(g\circ f)(x)\geq 1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$.

Ένα τελευταίο σχόλιο για την πρόταση 3.13 σε σχέση με πλευρικά όρια. Οι αλλαγές σε σχέση με τους ξ, η γίνονται όπως περιγράψαμε στην αρχή αυτής της ενότητας. Όμως, σχετικά με τον η πρέπει να προσέξουμε το εξής. Αν υποθέσουμε ότι ο η είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του B και ότι υπάρχει το όριο της g στον η από δεξιά (αριστερά) του, τότε, εκτός από το ότι η f συγκλίνει στον η, πρέπει να υποθέσουμε και ότι ισχύει $f(x)>\eta$ ($f(x)<\eta$) κοντά στο ξ. Για παράδειγμα:

Αν $f:A\to B$, $g:B\to\mathbb{R}$, αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και ο η είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του B, αν $f(x)\to\eta$ όταν $x\to\xi+$, αν ισχύει $f(x)<\eta$ κοντά στον ξ από δεξιά του και αν $g(y)\to\zeta\in\overline{\mathbb{R}}$ όταν $y\to\eta-$, τότε $(g\circ f)(x)\to\zeta$ όταν $x\to\xi+$.

Τα βασικά όρια.

Θα δούμε τώρα κάποια βασικά όρια σχετικά με την συνάρτηση δύναμη, την εκθετική συνάρτηση, την λογαριθμική συνάρτηση και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 3.3.35. Στα παραδείγματα 3.3.14, 3.3.15 και 3.3.16 μελετήσαμε τα διάφορα όρια της συνάρτησης x^k όταν ο k είναι ακέραιος. Θα δούμε τώρα την περίπτωση μη-ακέραιου εκθέτη.

Έστω $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης x^a είναι το $[0,+\infty)$, αν $a>0$, ή το $(0,+\infty)$, αν $a<0$.

Το πρώτο όριο που θα αποδείξουμε είναι το

$$\lim_{x\to\xi}x^a=\xi^a \qquad \text{αν } \xi>0.$$

Κατ' αρχάς έστω $a>0$. Θεωρούμε $\epsilon>0$. Θα βρούμε $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ για κάθε $x>0$ με $0<|x-\xi|<\delta$. Ορίζουμε τον

$$\epsilon'=\min\{\epsilon,\xi^a\}>0,$$

οπότε $\epsilon' \leq \epsilon$ και $\epsilon' \leq \xi^a$. Τότε το $|x^a - \xi^a| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|x^a - \xi^a| < \epsilon'$ κι αυτό από το $\xi^a - \epsilon' < x^a < \xi^a + \epsilon'$ κι αυτό από το $(\xi^a - \epsilon')^{1/a} < x < (\xi^a + \epsilon')^{1/a}$. Παρατηρούμε ότι ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $(\xi^a - \epsilon')^{1/a}$ και $(\xi^a + \epsilon')^{1/a}$. Επιλέγουμε οποιονδήποτε δ ώστε

$$0 < \delta \leq \min\left\{\xi - (\xi^a - \epsilon')^{1/a}, (\xi^a + \epsilon')^{1/a} - \xi\right\},$$

δηλαδή $\delta > 0$ και όχι μεγαλύτερο από την απόσταση του ξ από τον κοντινότερο προς αυτόν από τους $(\xi^a - \epsilon')^{1/a}$ και $(\xi^a + \epsilon')^{1/a}$. Τότε για κάθε x με $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $(\xi^a - \epsilon')^{1/a} < x < (\xi^a + \epsilon')^{1/a}$ και, επομένως, ισχύει $|x^a - \xi^a| < \epsilon$.

Αν $a < 0$, τότε $-a > 0$ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} x^a = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\xi^{-a}} = \xi^a$.

Κατόπιν, έχουμε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ 0, & \text{αν } a < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to0+} x^a = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > 0 \\ +\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Για το πρώτο όριο, έστω $a > 0$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $x^a > M$ για κάθε $x > N$. Τώρα, βλέπουμε ότι το $x^a > M$ συνεπάγεται από το $x > M^{1/a}$. Επομένως, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq M^{1/a}$, τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > M^{1/a}$ και, επομένως, $x^a > M$.

Τα υπόλοιπα όρια μπορούν να αποδειχτούν κι αυτά με βάση τον ορισμό, αλλά θα τα αποδείξουμε από το πρώτο βάσει ιδιοτήτων.

Αν $a < 0$, τότε $-a > 0$ και έχουμε $\lim_{x\to+\infty} x^a = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Αν $a > 0$, τότε $\lim_{x\to0+} x^a = \lim_{y\to+\infty} (\frac{1}{y})^a = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^a} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Τέλος, αν $a < 0$, τότε $-a > 0$ και είναι $\lim_{x\to0+} x^a = \lim_{x\to0+} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{0+} = +\infty$.

Μερικά ειδικώτερα παραδείγματα.

(i) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

(ii) Θα αποδείξουμε το $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$. Από το αποτέλεσμα του (i) φαίνεται ότι το όριο αυτό εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $(+\infty) - (+\infty)$. Χρησιμοποιώντας την $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} = 0.$$

(iii) $\lim_{x\to3}(\frac{x+1}{x^2+1})^{1/5} = \lim_{y\to2/5} y^{1/5} = (\frac{2}{5})^{1/5}$.

Παράδειγμα 3.3.36. Θεωρούμε πάλι τη συνάρτηση $f(x) = (x \sin\frac{1}{x})^{1/2}$ του παραδείγματος 3.2.1 με πεδίο ορισμού A (το έχουμε προσδιορίσει) του οποίου σημείο συσσώρευσης είναι ο 0. Ισχύει

$$0 \leq (x \sin\tfrac{1}{x})^{1/2} \leq |x|^{1/2}$$

για κάθε $x \in A$, οπότε με την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $\lim_{x\to0}(x\sin\frac{1}{x})^{1/2} = 0$.

Παράδειγμα 3.3.37. Θα μελετήσουμε τα όρια της εκθετικής συνάρτησης a^x.

Κατ' αρχάς:

$$\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi.$$

Έστω $a > 1$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ για κάθε x με $0 < |x - \xi| < \delta$. Ορίζουμε τον

$$\epsilon' = \min\{\epsilon, \tfrac{a^\xi}{2}\} > 0,$$

οπότε $\epsilon' \leq \epsilon$ και $\epsilon' < a^\xi$. Τώρα, το $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|a^x - a^\xi| < \epsilon'$ κι αυτό από το $a^\xi - \epsilon' < a^x < a^\xi + \epsilon'$ κι αυτό από το $\log_a(a^\xi - \epsilon') < x < \log_a(a^\xi + \epsilon')$. Παρατηρούμε ότι ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $\log_a(a^\xi - \epsilon')$ και $\log_a(a^\xi + \epsilon')$. Αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε

$$0 < \delta \leq \min\left\{\xi - \log_a(a^\xi - \epsilon'), \log_a(a^\xi + \epsilon') - \xi\right\},$$

τότε για κάθε x με $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $\log_a(a^\xi - \epsilon') < x < \log_a(a^\xi + \epsilon')$ και, επομένως, ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to\xi} a^x = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{(1/a)^\xi} = a^\xi$.
Τέλος, έχουμε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ 0, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Για το πρώτο όριο, έστω $a > 1$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $a^x > M$ για κάθε $x > N$. Βλέπουμε ότι το $a^x > M$ συνεπάγεται από το $x > \log_a M$. Οπότε επιλέγουμε οποιονδήποτε $N > 0$ ώστε $N \geq \log_a M$ και τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \log_a M$ και, επομένως, ισχύει $a^x > M$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
Τέλος, αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{0+} = +\infty$.
Αξίζει να γράψουμε ξεχωριστά τα όρια αυτής της ενότητας στην περίπτωση $a = e$, δηλαδή για τη συνήθη εκθετική συνάρτηση:

$$\lim_{x\to\xi} e^x = e^\xi, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Παράδειγμα 3.3.38. Τώρα θεωρούμε τη λογαριθμική συνάρτηση $\log_a x$.
Το πρώτο όριο είναι το:

$$\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi \qquad \text{αν } \ \xi > 0.$$

Έστω $a > 1$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ για κάθε $x > 0$ με $0 < |x - \xi| < \delta$. Τώρα, το $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ συνεπαγεται από το $\log_a \xi - \epsilon < \log_a x < \log_a \xi + \epsilon$ κι αυτό από το $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^\epsilon$. Βλέπουμε ότι ο ξ είναι ανάμεσα στους $\xi a^{-\epsilon}$ και ξa^ϵ. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε

$$0 < \delta \leq \min\left\{\xi - \xi a^{-\epsilon}, \xi a^\epsilon - \xi\right\},$$

τότε για κάθε x με $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^\epsilon$, οπότε ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to\xi} \log_a x = -\lim_{x\to\xi} \log_{1/a} x = -\log_{1/a} \xi = \log_a \xi$.
Κατόπιν,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ -\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Για το πρώτο όριο, έστω $a > 1$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $\log_a x > M$ για κάθε $x > N$. Το $\log_a x > M$ συνεπάγεται από το $x > a^M$. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq a^M$, τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > a^M$ και, επομένως, ισχύει $\log_a x > M$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\lim_{x\to+\infty} \log_{1/a} x = -\infty$.
Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x\to0+} \log_a x = \lim_{y\to+\infty} \log_a \frac{1}{y} = -\lim_{y\to+\infty} \log_a y = -(+\infty) = -\infty$.
Και, αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to0+} \log_a x = -\lim_{x\to0+} \log_{1/a} x = -(-\infty) = +\infty$.
Επομένως, στην περίπτωση $a = e$, δηλαδή για τη συνήθη λογαριθμική συνάρτηση, έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \log x = \log \xi \quad \text{αν } \xi > 0, \qquad \lim_{x\to0+} \log x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

Τώρα θα δούμε ένα σημαντικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.3.39. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\big(1+\tfrac{1}{x}\big)^x = e.$$

Γνωρίζουμε από το κεφάλαιο των ακολουθιών ότι $(1+\frac{1}{n})^n \to e$. Συνεπάγεται

$$(1+\tfrac{1}{n+1})^n = (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1}/(1+\tfrac{1}{n+1}) \to \tfrac{e}{1} = e, \quad (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} = (1+\tfrac{1}{n})^n(1+\tfrac{1}{n}) \to e\cdot 1 = e.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$e-\epsilon < (1+\tfrac{1}{n+1})^n < e+\epsilon, \qquad e-\epsilon < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} < e+\epsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Τότε για κάθε (όχι κατ' ανάγκη φυσικό) $x > n_0$ συνεπάγεται $[x] \geq n_0$, οπότε

$$e-\epsilon < \big(1+\tfrac{1}{[x]+1}\big)^{[x]} \leq (1+\tfrac{1}{x})^x \leq \big(1+\tfrac{1}{[x]}\big)^{[x]+1} < e+\epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 > 0$ ώστε να ισχύει $e-\epsilon < (1+\frac{1}{x})^x < e+\epsilon$ ή, ισοδύναμα, $|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \epsilon$ για κάθε $x > n_0$.

Παράδειγμα 3.3.40. Για τα όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων έχουμε τα εξής.
Από την $|\sin x| \leq |x|$ και την $\cos x - \cos\xi = -2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}$, βρίσκουμε

$$|\cos x - \cos\xi| = 2\big|\sin\tfrac{x-\xi}{2}\big|\big|\sin\tfrac{x+\xi}{2}\big| \leq 2\big|\sin\tfrac{x-\xi}{2}\big| \leq 2\big|\tfrac{x-\xi}{2}\big| = |x-\xi|.$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \epsilon$ και, τότε, για κάθε x με $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $|\cos x - \cos\xi| \leq |x-\xi| < \epsilon$. Άρα

$$\lim_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, από την $\sin x - \sin\xi = 2\sin\frac{x-\xi}{2}\cos\frac{x+\xi}{2}$ αποδεικνύουμε ότι $|\sin x - \sin\xi| \leq |x-\xi|$ και, επομένως,

$$\lim_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi.$$

Από τον κανόνα λόγου:

$$\lim_{x\to\xi}\tan x = \tan\xi, \qquad \text{αν } \xi \neq \tfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ για κάθε } k\in\mathbb{Z}.$$

$$\lim_{x\to\xi}\cot x = \cot\xi, \qquad \text{αν } \xi \neq k\pi \text{ για κάθε } k\in\mathbb{Z}.$$

Επίσης, από τον κανόνα λόγου,

$$\lim_{x\to\xi-}\tan x = +\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\tan x = -\infty \qquad \text{αν } \xi = \tfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ για κάποιον } k\in\mathbb{Z}.$$

$$\lim_{x\to\xi-}\cot x = -\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\cot x = +\infty \qquad \text{αν } \xi = k\pi \text{ για κάποιον } k\in\mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα 3.3.41. Αξίζει να αποδείξουμε ακόμα δυο πολύ χρήσιμα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{x^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Και τα δυο όρια εντάσσονται στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$.
Συνδυάζοντας την ανισότητα $|\sin x| \leq |x|$ και την $|x| \leq |\tan x|$, η οποία ισχύει όταν $|x| < \frac{\pi}{2}$, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\cos x \leq \tfrac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \text{για κάθε } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, 0)\cup(0,\tfrac{\pi}{2}).$$

Επειδή $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.
Για το δεύτερο όριο γράφουμε

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\sin(x/2)}{x/2}\big)^2 = \lim_{y\to 0}\tfrac{1}{2}(\tfrac{\sin y}{y})^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Με άλλο τρόπο:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\big(\tfrac{\sin x}{x}\big)^2\tfrac{1}{1+\cos x} = 1^2\,\tfrac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 3.3.42. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$.

Παράδειγμα 3.3.43. Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ γράφουμε $\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin(ax)/(ax)}{\sin(bx)/(bx)}$. Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(bx)}{bx}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. Επομένως, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b}$.

Τέλος, θα διατυπώσουμε την πρόταση 3.14, αλλά θα την αποδείξουμε στην ενότητα 4.2.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η* **δύναμη** *μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$, όπου $f(x)>0$ για κάθε $x\in A$, με εκθέτη την συνάρτηση $g:A\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f^g:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $(f^g)(x)=f(x)^{g(x)}$ για κάθε $x\in A$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.14. *Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta,\zeta\in\overline{\mathbb{R}}$ και έστω ότι ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in A$. Τότε για τα όρια όταν $x\to\xi$ έχουμε τα εξής. Αν $f(x)\to\eta$, $g(x)\to\zeta$ και το η^ζ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $f(x)^{g(x)}\to\eta^\zeta$. Ακόμη, αν $f(x)\to 0$, $g(x)\to-\infty$, τότε $f(x)^{g(x)}\to+\infty$.*

Η τελευταία περίπτωση της πρότασης 3.14 συμφωνεί με το $(0+)^{-\infty}=+\infty$ που ορίστηκε στο τέλος της ενότητας 2.3.

Ασκήσεις.

3.3.1. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4+x^3-4x^2+x+1}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}$.

3.3.2. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x+1)^3(3x^2+2)^6}{(x^2+1)(x+4)^{13}}$, $\lim_{x\to 0\pm}(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{|x|})$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-|x|}$.

3.3.3. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^{-2}+2x^{6/5}-4}{x^{6/5}-2x^{9/8}+2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}-2x^{6/5}}{4x^{4/3}+2}$.

3.3.4. Έστω $a\neq 0$. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{x^a-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^a-1)^2}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^{3a}-1}{x^a-1}$.

3.3.5. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$.

3.3.6. Αν $a>0$ και $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=0$, βρείτε τους A,B συναρτήσει των a,b,c και, με τους ίδιους A,B, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}$.

3.3.7. Βρείτε με τον κανόνα σύνθεσης τα $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3x^2-7x}{x^2+1})^{1/2}$, $\lim_{x\to 0}(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})^{1/5}$.

3.3.8. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}(e^x-e^{2x}+1)$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2x}+e^x+1}{2e^{2x}+1}$, $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{e^x-1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(e^x-1)^2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\log\frac{e^x}{e^{x/2}+1}$.

3.3.9. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0}\frac{\log(2x)}{\log(3x)}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{\log x}$, $\lim_{x\to 0}\log\frac{1-\log x}{1+(\log x)^2}$.

3.3.10. Για κάθε $\xi\in\mathbb{R}$ βρείτε τα $\lim_{x\to\xi\pm}[x]$. Για ποιούς ξ υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}[x]$;
Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}[1/x]$, $\lim_{x\to\pm\infty}x[1/x]$.
Αν $a,b>0$, βρείτε τα $\lim_{x\to 0\pm}(b/x)[x/a]$.

3.3.11. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0}x\cot x$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\sin x)^2}$, $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(3x)}{\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x+\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(8x)-\cos(15x)}{x^2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-(\pi/2)}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos((\pi/2)\cos x)}{\sin(\sin x)}$.

3.3.12. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}[x]$, $\lim_{x\to\pm\infty}([x]/x)$, $\lim_{x\to\pm\infty}([x^2]/x)$, $\lim_{x\to+\infty}([x]/x^2)$.
Αν $a,b>0$, βρείτε τα $\lim_{x\to 0\pm}(x/a)[b/x]$.
Αν $n\in\mathbb{N}$, βρείτε τα $\lim_{x\to 0\pm}x\big([1/x]+[2/x]+\cdots+[n/x]\big)$.

3.3.13. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^a \sin x = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > -1 \\ 1, & \text{αν } a = -1 \\ +\infty, & \text{αν } a < -1 \end{cases}$

3.3.14. Σχεδιάστε τα γραφήματα των $x\sin x$, $x^2\sin x$, $\sqrt{x}\sin x$ και $\frac{1}{x}\sin x$ και μελετήστε τα όριά τους στα $\pm\infty$.
Σχεδιάστε τα γραφήματα των $x\sin\frac{1}{x}$, $x^2\sin\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ και μελετήστε τα όριά τους στα $0\pm$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^a \sin\frac{1}{x} \begin{cases} = 0, & \text{αν } a > 0 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \le 0 \end{cases}$

3.3.15. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1\pm} f(x)$, αν ισχύει $(x-1)f(x) \ge 1$ για κάθε x με $0 < |x-1| < \frac{1}{4}$.

3.3.16. Υπολογίστε τις πιθανές τιμές του $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ αν γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει και ότι ισχύει $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1$ για κάθε $x > 0$.

3.3.17. Υπολογίζοντας κατάλληλα όρια, απαντήστε στα εξής. Ισχύει $\frac{3x^2+1}{x^2-5} < \frac{301}{100}$ κοντά στο $+\infty$; Ισχύει $\frac{x^8+1}{4x^4-x^2+2x-1} \ge \frac{5}{8}$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 1; Ισχύει $x^5 - 7x^3 + x^2 \le 10^7$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$; Ισχύει $-10^{-8} < \frac{x^4+13x^3+25x^2+33}{x^5+2x+1} < 10^{-7}$ κοντά στο $-\infty$;

3.3.18. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων των συναρτήσεων $\frac{1}{x}$, x^2, $\frac{3x^4-5x^2+x-1}{x^3+x^2-2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\sqrt{x}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \ge 1 \\ 3x/(x-1), & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

3.3.19. Έστω $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(|x|) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0+} f(x) = l$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x^2) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0+} f(x) = l$.
Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(1/x)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(1/x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0+} f(x) = l$ και ότι $\lim_{x\to-\infty} f(1/x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0-} f(x) = l$.
Βρείτε συνάρτηση $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(|x|)$ και να μην υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3.3.20. Έστω $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to 0}\big(f(x) + \frac{1}{f(x)}\big) = 2$, βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.
Έστω $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to 0}\big(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\big) = 0$, βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3.3.21. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) < \lim_{x\to\xi} g(x)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο ξ.

3.3.22. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}\max\{f(x), g(x)\} = \max\{\eta,\zeta\}$ και $\lim_{x\to\xi}\min\{f(x), g(x)\} = \min\{\eta,\zeta\}$.

3.3.23. Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x))$ αλλά δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.
Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x)$ και όχι τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.

3.3.24. [5] Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to -\infty$ και η $f(x) + g(x)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 0$, $g(x) \to +\infty$ και η $f(x)g(x)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

[5] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών.

Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ και η $\frac{f(x)}{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ και η $\frac{f(x)}{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\frac{f(x)}{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

3.3.25. [6] Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 0$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 0$, $g(x) \to -\infty$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \{+\infty, -\infty\}$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in \mathbb{R}$;
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 1$, $g(x) \to +\infty$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 1$, $g(x) \to -\infty$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

3.3.26. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq \eta$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq \xi$. Αποδείξτε ότι $\sup\{f(x) \,|\, x \in A, x \neq \xi\} = \eta$.

3.3.27. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Αποδείξτε ότι $\inf\{f(x) \,|\, x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta\} \leq \eta \leq \sup\{f(x) \,|\, x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta\}$ για κάθε $\delta > 0$.

3.3.28. Έστω ότι ισχύει $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

3.3.29. [α] Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $(0, +\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$, αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$.
[β] Έστω $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(2x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$. Αν η f είναι φραγμένη στο $(0, 1]$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to0} f(x) = 0$.

3.3.30. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ, αποδείξτε ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου τιμών $\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Να συμπεράνετε ότι στην πρόταση 3.13 κάποια από τις υποθέσεις είναι περιττή.

3.3.31. [α] Βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων της συνάρτησης $y = \frac{2x+1}{x-1}$ και της αντίστροφής της $x = \frac{y+1}{y-2}$.
[β] Θεωρήστε τη συνάρτηση $y = 2x - \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \frac{1}{4}(y + \sqrt{y^2 + 8})$. Βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων των δυο αυτών συναρτήσεων.
[γ] Γενικότερα, πώς σχετίζονται οι πλάγιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης f και της αντίστροφής της f^{-1};

[6]Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών δύναμης.

3.4 Όρια συναρτήσεων και ακολουθίες.

Στο θεώρημα 3.1 έχουμε μια συσχέτιση της έννοιας του ορίου συνάρτησης και της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Θεωρούμε και τις ακολουθίες (x_n) στο A με τις ιδιότητες: (i) $x_n \neq \xi$ για κάθε n και (ii) $x_n \to \xi$.*
[α] *Αν $f(x) \to \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ όταν $x \to \xi$, τότε για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) ισχύει $f(x_n) \to \eta$.*
[β] *Αντιστρόφως, αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο, τότε η f έχει όριο στο ξ.*

Απόδειξη. [α] Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii).
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(x) \in N_\eta(\epsilon) \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \cap N_\xi(\delta) \ \text{ με } \ x \neq \xi. \tag{3.5}$$

Επειδή $x_n \to \xi$, ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta)$. Επειδή ισχύει $x_n \in A$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$x_n \in A \cap N_\xi(\delta) \ \text{ και } \ x_n \neq \xi. \tag{3.6}$$

Από την (3.6) και την (3.5) με $x = x_n$ συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$f(x_n) \in N_\eta(\epsilon).$$

Άρα $f(x_n) \to \eta$.
[β] Έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$.
Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι *υπάρχει* τουλάχιστον μια ακολουθία στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Πράγματι, επειδή το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, για κάθε n υπάρχει κάποιο

$$x_n \in A \cap N_\xi(\tfrac{1}{n}) \ \text{ με } \ x_n \neq \xi.$$

Τώρα, η ακολουθία (x_n) που δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο είναι στο A και έχει τις ιδιότητες (i), (ii). Το ότι έχει την ιδιότητα (i) είναι προφανές. Κατόπιν, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $\frac{1}{n} < \epsilon$, οπότε ισχύει τελικά $N_\xi(\frac{1}{n}) \subseteq N_\xi(\epsilon)$ οπότε ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\epsilon)$. Άρα $x_n \to \xi$.
Τώρα, έστω τυχούσες ακολουθίες $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο A με τις ιδιότητες (i), (ii), οπότε οι αντίστοιχες ακολουθίες $(f(x_n{}'))$, $(f(x_n{}''))$ έχουν όρια (*πιθανόν διαφορετικά*) στο $\overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε τη "μικτή" ακολουθία

$$(x_1{}', x_1{}'', x_2{}', x_2{}'', x_3{}', x_3{}'', \ldots),$$

η οποία έχει κι αυτή τις ιδιότητες (i), (ii) (εδώ χρειάζεται η Πρόταση 2.15). Άρα η αντίστοιχη ακολουθία

$$\big(f(x_1{}'), f(x_1{}''), f(x_2{}'), f(x_2{}''), f(x_3{}'), f(x_3{}''), \ldots\big)$$

έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Άρα οι $(f(x_n{}'))$, $(f(x_n{}''))$, ως υποακολουθίες της τελευταίας ακολουθίας, έχουν *το ίδιο όριο*.
Άρα υπάρχει $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) να ισχύει $f(x_n) \to \eta$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι *δεν* ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να είναι λάθος το ότι ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $f(x) \notin N_\eta(\epsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Άρα για κάθε n υπάρχει

$$x_n \in A \cap N_\xi(\tfrac{1}{n}) \ \text{ με } \ x_n \neq \xi \ \text{ ώστε } \ f(x_n) \notin N_\eta(\epsilon).$$

Λίγο πιο πάνω αποδείξαμε η ακολουθία (x_n) που σχηματίζεται είναι στο A και έχει τις ιδιότητες (i), (ii). Άρα, σύμφωνα με το συμπέρασμα της προηγούμενης παραγράφου, ισχύει $f(x_n) \to \eta$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $f(x_n) \notin N_\eta(\epsilon)$ για κάθε n.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. $\square$

Παράδειγμα 3.4.1. Από το $\lim_{x\to e}(1 + x^2 - 3x^3) = 1 + e^2 - 3e^3$ προκύπτει το $1 + (1 + \frac{1}{n})^{2n} - 3(1+\frac{1}{n})^{3n} \to 1+e^2-3e^3$. Διότι η ακολουθία $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $1 + x^2 - 3x^3$, διότι ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n \neq e$ για κάθε n και διότι $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$.

Παράδειγμα 3.4.2. Στο θεώρημα 3.1 η υπόθεση ότι "ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n" είναι απαραίτητη. Πράγματι, έστω η $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και η (x_n) με τύπο $x_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n. Τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και $x_n \to 0$. Δεν είναι σωστό ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n, διότι ισχύει $x_n = 0$ για κάθε άρτιο n. Τώρα, ισχύει $f(x_n) = 0$ για κάθε περιττό n και $f(x_n) = 1$ για κάθε άρτιο n και, επομένως, η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν έχει όριο.

Υπάρχουν και οι παραλλαγές του θεωρήματος 3.1 όπου το "σημείο συσσώρευσης" μετατρέπεται σε "από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης", το $x_n \neq \xi$ μετατρέπεται σε $x_n > \xi$ $(x_n < \xi)$ και το $\lim_{x\to\xi}$ μετατρέπεται σε $\lim_{x\to\xi+}$ $(\lim_{x\to\xi-})$.

Το θεώρημα 3.1 χρησιμοποιείται συνήθως με δυο τρόπους. Όπως κάναμε στο παράδειγμα 3.4.1, γνωρίζοντας ήδη κάποια όρια συναρτήσεων, βγάζουμε συμπεράσματα για όρια ακολουθιών. Επίσης, έστω ότι δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Αν βρούμε μια ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f η οποία έχει όριο ξ, όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$ και η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν έχει όριο, συμπεραίνουμε ότι ούτε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει. Ή, αν βρούμε δυο ακολουθίες $({x_n}')$, $({x_n}'')$ στο πεδίο ορισμού της f οι οποίες έχουν όριο ξ, όλοι οι όροι τους είναι $\neq \xi$ και οι ακολουθίες $(f({x_n}'))$ και $(f({x_n}''))$ έχουν διαφορετικά όρια, συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3.4.3. Θα ξανααποδείξουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.
Η ακολουθία (n) είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(-1)^{[x]}$ και $n \to +\infty$ αλλά η ακολουθία $((-1)^n)$ δεν έχει όριο. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$.
Με την ακολουθία $(-n)$ αποδεικνύεται ότι και το $\lim_{x\to-\infty}(-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3.4.4. Θα ξανααποδείξουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ δεν υπάρχει.
Οι ακολουθίες $(2n\pi)$ και $(\frac{\pi}{2}+2n\pi)$ είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sin x$ και $2n\pi \to +\infty$ και $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$. Όμως, $\sin(2n\pi) = 0 \to 0$ και $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \to 1$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.
Με τις ακολουθίες $(-2n\pi)$ και $(\frac{\pi}{2} - 2n\pi)$ αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty} \sin x$.
Φυσικά, με κάποιες ανάλογες ακολουθίες αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν και τα $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$.

Ασκήσεις.

3.4.1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to 0\pm}(-1)^{[1/x]}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x - [x])$, $\lim_{x\to 0\pm} \sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0\pm} \cos\frac{1}{x}$, χρησιμοποιώντας κατάλληλες ακολουθίες.

3.4.2. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big((\frac{2^n}{4^n+1})^{3/4}\big)$, $\big((\frac{n^3+n+1}{2n^2-1})^{\sqrt{2}}\big)$, $\big((\frac{n^5+1}{2n^6+1})^{1/4}\big)$, $\big(\log\frac{n^2+1}{n^2}\big)$, $\big((\frac{4^n-2^n}{4^n-3^n+2})^{1/5}\big)$, $\big(e^{-n^3/(n+1)}\big)$, $\big(\log\frac{e^{2n}+1}{e^n+1}\big)$, $\big(\frac{(\log n)^2-\log n+2}{-(\log n)^2+\log n-8}\big)$.

3.4.3. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, ακολουθία (x_n) στο A ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και $x_n \to \xi$.
Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει $f(x_n) \geq l$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι $\eta \geq l$.
Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει $f(x_n) \leq u$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι $\eta \leq u$.
Αν $u < l$ και ισχύει $f(x_n) \geq l$ για άπειρους n και $f(x_n) \leq u$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

3.4.4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau > 0$, δηλαδή έστω $f(x + \tau) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει ένα από τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.
Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x - [x])$.

3.4.5. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.1, αποδείξτε όλες τις προτάσεις της ενότητας 3.3 βασισμένοι στις αντίστοιχες προτάσεις της ενότητας 2.3.

3.5 Μονότονες συναρτήσεις.

Το θεώρημα 3.2 είναι ιδιαίτερα σημαντικό, τόσο όσο και το αντίστοιχο θεώρημα 2.1 για μονότονες ακολουθίες. Το θεώρημα 3.2 ουσιαστικά λέει ότι μια συνάρτηση μονότονη κοντά στο ξ από τα δεξιά (αριστερά) του έχει οπωσδήποτε δεξιό (αριστερό) πλευρικό όριο στο ξ και ότι, αν επιπλέον η συνάρτηση είναι φραγμένη κοντά στο ξ από τα δεξιά (αριστερά) του, τότε το όριό της είναι αριθμός ενώ, στην αντίθετη περίπτωση, το όριό της είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2. [α] *Έστω $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A \subseteq (-\infty, \xi)$, $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι άνω φραγμένη, είτε $+\infty$, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη.*
[β] *Με τις υποθέσεις του* [α], *αν η f είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι κάτω φραγμένη, είτε $-\infty$, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη.*
[γ] *Έστω $\xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $A \subseteq (\xi, +\infty)$, $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι κάτω φραγμένη, είτε $-\infty$, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη.*
[δ] *Με τις υποθέσεις του* [γ], *αν η f είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι άνω φραγμένη, είτε $+\infty$, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη.*

Απόδειξη. [α] Έστω ότι η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Τότε το μη-κενό σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x \in A\}$ είναι άνω φραγμένο, οπότε το

$$\eta = \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}$$

είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Έστω $\epsilon > 0$. Ο $\eta - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, x \in A\}$, οπότε υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $\eta - \epsilon < f(x_0)$. Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$ ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) > \eta - \epsilon.$$

Επειδή ο η είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, x \in A\}$, ισχύει

$$f(x) \leq \eta < \eta + \epsilon$$

για κάθε $x \in A$. Άρα ισχύει

$$\eta - \epsilon < f(x) < \eta + \epsilon$$

ή, ισοδύναμα, $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$. Άρα ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Έστω ότι η f είναι αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη. Τότε το μη-κενό $\{f(x) \,|\, x \in A\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε

$$\sup\{f(x) \,|\, x \in A\} = +\infty.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
Έστω $M > 0$. Ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, x \in A\}$, οπότε υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) > M$. Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$ ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) > M.$$

Άρα ισχύει $f(x) > M$ κοντά στο ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
[β] - [δ] Ομοίως. □

Στα [α] και [β] του θεωρήματος 3.2, αν $\xi \in \mathbb{R}$, μπορούμε να γράψουμε $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ αντί $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Ομοίως, στα [γ] και [δ], αν $\xi \in \mathbb{R}$, μπορούμε να γράψουμε $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ αντί $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Τώρα, έστω ότι έχουμε την περίπτωση [α] του θεωρήματος 3.2. Είδαμε ότι το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των τιμών της f, οπότε ισχύει $f(x) \leq \eta$ για κάθε $x \in A$. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι κοντά στο ξ σταθερή, τότε ισχύει $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, αν ήταν $f(x_0) = \eta$ για κάποιον $x_0 \in A$, τότε, επειδή η f είναι αύξουσα στο A, θα ίσχυε $\eta = f(x_0) \leq f(x) \leq \eta$ για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$, οπότε η f θα ήταν σταθερή η κοντά στο ξ. Ειδικώτερα, αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, τότε ισχύει $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Παρόμοια συμπεράσματα έχουμε και στις άλλες περιπτώσεις του θεωρήματος 3.2. Συνοψίζουμε:
Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο $A \subseteq (-\infty, \xi)$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, τότε ισχύει $f(x) \leq \eta$ ($f(x) \geq \eta$) για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, η f δεν είναι κοντά στο ξ σταθερή και, ειδικώτερα, είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) στο A, τότε ισχύει $f(x) < \eta$ ($f(x) > \eta$) για κάθε $x \in A$.
Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο $A \subseteq (\xi, +\infty)$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, τότε ισχύει $f(x) \geq \eta$ ($f(x) \leq \eta$) για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, η f δεν είναι κοντά στο ξ σταθερή και, ειδικώτερα, είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) στο A, τότε ισχύει $f(x) > \eta$ ($f(x) < \eta$) για κάθε $x \in A$.

Παράδειγμα 3.5.1. Αν $a > 0$, θα αποδείξουμε τα $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$, $\lim_{x\to0+} x^a = 0$, γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση x^a είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η μονοτονία εγγυάται την ύπαρξη των δυο ορίων καθώς και ότι το πρώτο είναι αριθμός ή $+\infty$ και ότι το δεύτερο είναι αριθμός ή $-\infty$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $\lim_{x\to+\infty} x^a = \eta \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{y\to+\infty} y^a = \eta$$

και, επομένως,

$$\eta = \lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{x\to+\infty} 2^a x^a = 2^a \lim_{x\to+\infty} x^a = 2^a\eta.$$

Άρα $\eta = 0$. Άτοπο, διότι ισχύει $x^a \geq 1^a = 1$ για κάθε $x \geq 1$, οπότε $\eta = \lim_{x\to+\infty} x^a \geq 1$.
Άρα $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.
Επειδή $x^a > 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to0+} x^a \geq 0$ και, επομένως, το δεύτερο όριο είναι αριθμός μη-αρνητικός: $\lim_{x\to0+} x^a = \eta \geq 0$. Όπως πριν,

$$\lim_{x\to0+}(2x)^a = \lim_{y\to0+} y^a = \eta.$$

Άρα

$$\eta = \lim_{x\to0+}(2x)^a = \lim_{x\to0+} 2^a x^a = 2^a\eta$$

και, επομένως, $\eta = 0$.

Ασκήσεις.

3.5.1. [α] Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) \geq \sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.

[β] Έστω $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ φθίνουσα στο $(0,2)$ ώστε να ισχύει $f(\frac{1}{n})=1-\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.

[γ] Τί αλλάζει ως προς τα προηγούμενα συμπεράσματα αν δεν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f είναι μονότονες;

3.5.2. Έστω $a>1$.

[α] Χρησιμοποιήστε το ότι ισχύει $\log_a(ax)=1+\log_a x$ για κάθε $x>0$ καθώς και τη μονοτονία της $\log_a x$ και βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}\log_a x$, $\lim_{x\to 0}\log_a x$.

[β] Χρησιμοποιήστε το ότι ισχύει $a^{x+1}=aa^x$ για κάθε x καθώς και τη μονοτονία της a^x και βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty} a^x$.

3.5.3. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ αύξουσα στο A και $\xi\in\mathbb{R}$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα όρια $\eta=\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και $\zeta=\lim_{x\to\xi+} f(x)$, ότι είναι αριθμοί και ότι $\eta\leq\zeta$.

Θεωρήστε τους αριθμούς y με την ιδιότητα: ισχύει $f(x')\leq y\leq f(x'')$ για κάθε $x',x''\in A$ με $x'<\xi<x''$. Αποδείξτε ότι αυτοί οι αριθμοί y είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[\eta,\zeta]$.

Προσαρμόστε τα προηγούμενα στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα στο A.

3.5.4. [7] Έστω $\xi\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $A\subseteq(-\infty,\xi)$, $f:A\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα στο A και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει το $\eta=\lim_{x\to\xi} f(x)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ και ότι ισχύει $f(x)<\eta$ για κάθε $x\in A$. Άρα το σύνολο τιμών $B=\{f(x)\,|\,x\in A\}$ είναι $\subseteq(-\infty,\eta)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:B\to A$ και είναι γνησίως αύξουσα στο B.

Αποδείξτε[8] ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι $\lim_{y\to\eta} f^{-1}(y)=\xi$.

Προσαρμόστε τα προηγούμενα στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A καθώς και στην περίπτωση που είναι $A\subseteq(\xi,+\infty)$, το $\xi\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι γνησίως μονότονη στο A.

3.5.5. [9] Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Το $\eta\in\overline{\mathbb{R}}$ χαρακτηρίζεται **οριακή τιμή** της f στο ξ αν για κάθε $\epsilon>0$ ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Αποδείξτε ότι το $\eta\in\overline{\mathbb{R}}$ είναι οριακή τιμή της f στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε να ισχύει $x_n\neq\xi$ για κάθε n, $x_n\to\xi$ και $f(x_n)\to\eta$.

Αποδείξτε ότι το σύνολο $L\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ των οριακών τιμών της f στο ξ είναι μη-κενό και να ορίσετε $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)=\inf L$ και $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)=\sup L$.

Αποδείξτε ότι τα $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ και $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ είναι στοιχεία του L, οπότε είναι η ελάχιστη και η μέγιστη οριακή τιμή της f στο ξ.

Τα $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ και $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ ονομάζονται **ανώτατο όριο** και **κατώτατο όριο** της f στον ξ και συμβολίζονται και $\limsup_{x\to\xi} f(x)$ και $\liminf_{x\to\xi} f(x)$.

Αποδείξτε: (i) αν $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)<y$, τότε ισχύει $f(x)<y$ κοντά στο ξ, (ii) αν $y<\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$, τότε ισχύει $y<f(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Αποδείξτε: (i) αν $y<\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$, τότε ισχύει $y<f(x)$ κοντά στο ξ, (ii) αν $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)<y$, τότε ισχύει $f(x)<y$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)\leq\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)=\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ και ότι σ'

---

[7] Εδώ περιγράφεται μια σημαντική σχέση ανάμεσα στο όριο συνάρτησης και στο όριο της αντίστροφής της.

[8] Δείτε και την άσκηση 3.3.30.

[9] Το *ανώτατο όριο* και το *κατώτατο όριο* συνάρτησης που θα δούμε εδώ είναι έννοιες ανάλογες των αντίστοιχων εννοιών για ακολουθίες. Η *οριακή τιμή* συνάρτησης είναι έννοια ανάλογη της έννοιας του υποακολουθιακού ορίου ακολουθίας.

αυτήν την περίπτωση είναι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)$.
Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta_+$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta_-$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \min\{\eta_-, \eta_+\}$ και $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \max\{\eta_-, \eta_+\}$.
Βρείτε τα $\underline{\lim}_{x\to 0}$ και $\overline{\lim}_{x\to 0}$ των $[x]$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\sin\frac{1}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.
Έστω ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή ότι υπάρχει $\delta_0{}' > 0$ ώστε η f να είναι άνω φραγμένη στο $(A\setminus\{\xi\})\cap N_\xi(\delta_0{}')$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $u : (0, \delta_0{}'] \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(\delta) = \sup\{f(x) \,|\, x \in (A\setminus\{\xi\})\cap N_\xi(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0{}']$. Αποδείξτε ότι η u είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0{}']$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta\to 0} u(\delta)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{\delta\to 0} u(\delta) = \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.
Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x) \,|\, x \in (A\setminus\{\xi\})\cap N_\xi(\delta)\} = +\infty$. Παρατηρήστε ότι τότε $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
Έστω ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0{}'' > 0$ ώστε η f να είναι κάτω φραγμένη στο $(A\setminus\{\xi\})\cap N_\xi(\delta_0{}'')$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $l : (0, \delta_0{}''] \to \mathbb{R}$ με τύπο $l(\delta) = \inf\{f(x) \,|\, x \in (A\setminus\{\xi\})\cap N_\xi(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0{}'']$. Αποδείξτε ότι η l είναι φθίνουσα στο $(0, \delta_0{}'']$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta\to 0} l(\delta)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{\delta\to 0} l(\delta) = \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.
Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ είναι $\inf\{f(x) \,|\, x \in (A\setminus\{\xi\})\cap N_\xi(\delta)\} = -\infty$. Παρατηρήστε ότι τότε $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.

3.6 Το κριτήριο του Cauchy.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε η f έχει όριο στο ξ, το οποίο είναι αριθμός, αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x', x'' \neq \xi$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$. Άρα για κάθε $x', x'' \in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x', x'' \neq \xi$ ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - \eta| + |f(x'') - \eta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x', x'' \neq \xi$.
Έστω ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες: (i) ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και (ii) $x_n \to \xi$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο δ. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in A\cap N_\xi(\delta)$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε n, m με $n, m \geq n_0$ ισχύει $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$. Άρα η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει.
Αποδείξαμε ότι για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο στο $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. $\square$

Το "για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x', x'' \neq \xi$" το διατυπώνουμε

$$\lim_{x',x''\to\xi}(f(x') - f(x'')) = 0.$$

Η χρησιμότητα του κριτηρίου του Cauchy, όπως και του ανάλογου κριτηρίου του Cauchy για ακολουθίες, είναι ότι παρέχει έναν τρόπο απόδειξης της σύγκλισης μιας συνάρτησης όταν δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή του υποψήφιου ορίου της. Αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|f(x)-\eta|$ των τιμών της f από τον άγνωστο η, μελετάμε τις αποστάσεις $|f(x')-f(x'')|$ μεταξύ των τιμών της f.

Ασκήσεις.

3.6.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\delta > 0$, $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x')-f(x'')| \leq M|x'-x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $0 < |x'-\xi| < \delta$ και $0 < |x''-\xi| < \delta$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.

3.6.2. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta_0)$.
Αποδείξτε ότι $0 \leq \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\} < +\infty$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$.
Ορίζουμε την $\omega^* : (0, \delta_0] \to \mathbb{R}_0^+$ με τύπο $\omega^*(\delta) = \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$.
Αποδείξτε ότι η ω^* είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0]$, ότι υπάρχει το $\lim_{\delta \to 0} \omega^*(\delta)$ και είναι αριθμός ≥ 0.
Ορίζουμε $\omega^*(f; \xi) = \lim_{\delta \to 0} \omega^*(\delta)$.

Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ.
Αποδείξτε ότι $\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\} = +\infty$ για κάθε $\delta > 0$.
Τότε ορίζουμε $\omega^*(f; \xi) = +\infty$.[10]

Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega^*(f; \xi) = 0$.

Έστω ότι υπάρχουν τα $\lim_{x \to \xi\pm} f(x)$. Αποδείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x \to \xi\pm} f(x)$ δεν είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega^*(f; \xi) = +\infty$ και ότι τα $\lim_{x \to \xi\pm} f(x)$ είναι και τα δυο αριθμοί αν και μόνο αν $0 \leq \omega^*(f; \xi) < +\infty$ και τότε σ' αυτήν την περίπτωση είναι $\omega^*(f; \xi) = |\lim_{x \to \xi+} f(x) - \lim_{x \to \xi-} f(x)|$.

Δείτε την άσκηση 3.5.5 και αποδείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα $\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$, $\underline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$ δεν είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega^*(f; \xi) = +\infty$ και ότι τα $\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$, $\underline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$ είναι και τα δυο αριθμοί αν και μόνο αν $0 \leq \omega^*(f; \xi) < +\infty$ και τότε σ' αυτήν την περίπτωση είναι $\omega^*(f; \xi) = \overline{\lim}_{x \to \xi} f(x) - \underline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$.

Βρείτε τα $\omega^*(f; 0)$ των $[x]$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\sin \frac{1}{x}$, $x \sin \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

[10]Και στις δυο περιπτώσεις [α], [β], το $\omega^*(f; \xi)$ ονομάζεται **ταλάντωση** της f στο ξ. Μια παραλλαγή της έννοιας της ταλάντωσης σε σημείο θα δούμε στην άσκηση 4.1.16.

Κεφάλαιο 4

Συνεχείς συναρτήσεις.

4.1 Συνεχείς συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Η f χαρακτηρίζεται* **συνεχής** *στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$.*

Με άλλα λόγια: *η f είναι συνεχής στον ξ αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα τον $f(\xi)$ όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ (χωρίς τον περιορισμό να παραμένει διαφορετικός από τον ξ).* Ή, κοιτάζοντας το γράφημα της f, λέμε: *η f είναι συνεχής στον ξ αν, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ, το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f πλησιάζει απεριόριστα το σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Όταν η f είναι συνεχής στον ξ, το ότι ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ μπορούμε να το εκφράσουμε και ως εξής: *η f απεικονίζει το σύνολο $A \cap N_\xi(\delta)$ μέσα στην περιοχή $N_{f(\xi)}(\epsilon)$ ή, ισοδύναμα,*

$$f\big(A \cap N_\xi(\delta)\big) \subseteq N_{f(\xi)}(\epsilon).$$

Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: Ο $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Προφανώς, συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$. (Αν κάποιοι x έχουν μια ιδιότητα, τότε και οι λιγότεροι x έχουν, επίσης, την ίδια ιδιότητα.) Επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$. Παρατηρούμε ότι, αν $x = \xi$, τότε έτσι κι αλλιώς ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει (ο ίδιος με πριν) $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. (Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι οι λιγότεροι x έχουν μια ιδιότητα, αλλά εκ των υστέρων βλέπουμε ότι και οι περισσότεροι x έχουν την ίδια ιδιότητα.) Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.

Δεύτερη περίπτωση: Ο $\xi \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A ή, ισοδύναμα, είναι μεμονωμένο σημείο του A. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta) = \{\xi\}$.

Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ θεωρούμε τον συγκεκριμένο δ και τότε, προφανώς, για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ισχύει $x = \xi$, οπότε ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.

Συνοψίζουμε:

Αν ο $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Αν ο $\xi \in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, συνεχής στον ξ.

Πρέπει να τονιστεί ότι για να έχει νόημα η συνέχεια ή η μη-συνέχεια της f στον ξ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή ότι ορίζεται ο $f(\xi)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$.*
Η f χαρακτηρίζεται **αριστερά συνεχής** *στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $\xi - \delta < x \leq \xi$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_{\xi-}(\delta)$.*
Η f χαρακτηρίζεται **δεξιά συνεχής** *στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $\xi \leq x < \xi + \delta$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_{\xi+}(\delta)$.*

Προσαρμόζοντας με προφανή τρόπο τα προηγούμενα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι δεξιά (αριστερά) συνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$ ($\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$) και ότι, αν ο ξ δεν είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, δεξιά (αριστερά) συνεχής στον ξ.

Από τις προτάσεις 3.1 και 3.2 προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα. (i) Αν ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι αριστερά και δεξιά συνεχής στον ξ. (ii) Αν ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι αριστερά συνεχής στον ξ. (iii) Αν ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι δεξιά συνεχής στον ξ.

Παράδειγμα 4.1.1. Η συνάρτηση x^2 είναι συνεχής στον 3, διότι $\lim_{x\to3} x^2 = 9 = 3^2$.
Για να αποδείξουμε τη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε το όριο της συνάρτησης. Ας δούμε την απόδειξη και με βάση τον ορισμό της συνέχειας.
Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε κάποιον $\delta > 0$ ώστε για κάθε x με $|x - 3| < \delta$ να ισχύει $|x^2 - 9| < \epsilon$.
Τώρα, το $|x^2-9| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|x+3||x-3| < \epsilon$. Δεν είναι δύσκολο να χειριστούμε κατ' ευθείαν αλγεβρικά τις ανισότητες αυτές και να τις "λύσουμε" ως προς τον x, αλλά κάτι τέτοιο είναι και λίγο άβολο, οπότε θα κάνουμε κάτι παρόμοιο με αυτό που κάναμε και στο παράδειγμα 3.2.3. Θα αντικαταστήσουμε το $|x + 3||x - 3|$ με κάτι *μεγαλύτερο και απλούστερο*. Πιο συγκεκριμένα, θα πετύχουμε να ισχύει $|x + 3||x - 3| \leq M|x - 3|$ σε κάποια περιοχή του 3, όπου M θα είναι κάποιος αριθμός ανεξάρτητος του x στην περιοχή αυτή. Για να ισχύει κάτι τέτοιο είναι αρκετό να ισχύει $|x + 3| \leq M$. Αυτό *είναι* εφικτό αφού, αν ο x είναι κοντά στον 3, τότε ο $|x + 3|$ δεν μπορεί να είναι πολύ μεγάλος. Πράγματι, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$, τότε για κάθε x με $|x - 3| < \delta$ ισχύει $|x - 3| < 1$ και, επομένως, ισχύει $|x + 3| = |(x - 3) + 6| \leq |x - 3| + 6 < 7$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$, τότε για κάθε x με $|x - 3| < \delta$ ισχύει $|x + 3||x - 3| < 7|x - 3|$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq 1 \;: \qquad |x - 3| < \delta \;\Rightarrow\; |x + 3||x - 3| < 7|x - 3|. \tag{4.1}$$

Τώρα βλέπουμε ότι το $7|x-3| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|x-3| < \frac{\epsilon}{7}$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq \frac{\epsilon}{7}$, τότε για κάθε x με $|x - 3| < \delta$ ισχύει $|x - 3| < \frac{\epsilon}{7}$ και, επομένως, $7|x - 3| < \epsilon$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq \tfrac{\epsilon}{7} \;: \qquad |x - 3| < \delta \;\Rightarrow\; 7|x - 3| < \epsilon. \tag{4.2}$$

Άρα, συνολικά, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$ *και* $\delta \leq \frac{\epsilon}{7}$, τότε συνδυάζουμε τις (4.1) και (4.2) ως εξής: για κάθε x με $|x - 3| < \delta$ ισχύει $|x + 3||x - 3| < 7|x - 3|$ (διότι $\delta \leq 1$) και $7|x - 3| < \epsilon$ (διότι $\delta \leq \frac{\epsilon}{7}$) και, επομένως, ισχύει $|x + 3||x - 3| < \epsilon$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq \min\{1, \tfrac{\epsilon}{7}\} \;: \qquad |x-3| < \delta \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix} |x + 3||x - 3| < 7|x - 3| \\ 7|x - 3| < \epsilon \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; |x+3||x-3| < \epsilon.$$

Παράδειγμα 4.1.2. Η συνάρτηση $\sqrt{-x^2(x + 1)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup \{0\}$. Ο 0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0.

Παράδειγμα 4.1.3. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $[x]$.
Έστω $\xi \in \mathbb{Z}$. Η $[x]$ είναι σταθερή $\xi-1$ στο διάστημα $[\xi-1,\xi)$ αριστερά του ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi-}[x] = \lim_{x\to\xi-}(\xi-1) = \xi-1 \neq [\xi]$. Επίσης, είναι σταθερή ξ στο διάστημα $(\xi,\xi+1)$ δεξιά του ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi+}[x] = \lim_{x\to\xi+}\xi = \xi = [\xi]$. Άρα η $[x]$ είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον ξ, οπότε δεν είναι συνεχής στον ξ.
Έστω $\xi \notin \mathbb{Z}$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ και, συγκεκριμένα, ο $n = [\xi]$ ώστε $n < \xi < n+1$. Η συνάρτηση είναι σταθερή n στην ένωση $[n,\xi) \cup (\xi, n+1)$, οπότε $\lim_{x\to\xi}[x] = \lim_{x\to\xi} n = n = [\xi]$. Άρα η $[x]$ είναι συνεχής στον ξ.
Άρα η $[x]$ σε κάθε ακέραιο αριθμό δεν είναι συνεχής και σε κάθε άλλο αριθμό είναι συνεχής.

Παράδειγμα 4.1.4. Η σταθερή συνάρτηση c είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in \mathbb{R}$, διότι $\lim_{x\to\xi} c = c$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η $f : A \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **συνεχής** στο A ή, απλώς, **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της A.*

Παράδειγμα 4.1.5. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι συνεχής, αφού για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to\xi} P(x) = P(\xi)$.

Παράδειγμα 4.1.6. Κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ο οποίος δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$, ισχύει $\lim_{x\to\xi} R(x) = R(\xi)$.

Παράδειγμα 4.1.7. Η x^a είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (το οποίο εξαρτάται από τον a) ισχύει $\lim_{x\to\xi} x^a = \xi^a$.

Παράδειγμα 4.1.8. Η a^x είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$.

Παράδειγμα 4.1.9. Η $\log_a x$ είναι συνεχής, αφού για κάθε $\xi > 0$ ισχύει $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi$.

Παράδειγμα 4.1.10. Οι συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$ είναι συνεχείς, διότι ισχύει $\lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\xi$ για κάθε ξ. Ομοίως, οι συναρτήσεις $\tan x$, $\cot x$ είναι συνεχείς. Για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού τους ισχύει $\lim_{x\to\xi} \tan x = \tan\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \cot x = \cot\xi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής** στο B αν ο περιορισμός της f στο B, δηλαδή η $g : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x)$ για $x \in B$, είναι συνεχής στο B.*

Παράδειγμα 4.1.11. Έστω η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$ με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.
Η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού δεν είναι συνεχής στους 0 και 1. Πράγματι: $\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} 0 = 0 \neq 1 = f(0)$ και $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} 1 = 1 = f(0)$. Δηλαδή η f είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 0. Ομοίως, η f είναι αριστερά συνεχής αλλά όχι δεξιά συνεχής στον 1.
Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $[0,1]$, δηλαδή την σταθερή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 1$. Είναι σαφές ότι η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Άρα η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Εδώ χρειάζεται ένα σχόλιο. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ μπορεί να μην είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $\xi \in A$, αλλά είναι οπωσδήποτε (γιατί;) συνεχής στο μονοσύνολο $\{\xi\}$. Ομολογουμένως, αυτό είναι κάπως περίεργο!

Είδη ασυνεχειών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο συνέχειας** της f. Αν η f δεν είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας** της f ή ότι η f έχει (ή παρουσιάζει) **ασυνέχεια** στον ξ.*

Στην περίπτωση που ο ξ είναι *σημείο ασυνέχειας* της f και, επομένως, και *σημείο συσσώρευσης* του A, θα τον κατατάξουμε σε ακριβώς τρεις κατηγορίες με τρεις αντίστοιχους ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ότι υπάρχει το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι αριθμός αλλά $\eta \neq f(\xi)$. Τότε λέμε ότι ο ξ είναι* **σημείο άρσιμης ασυνέχειας** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **άρσιμη ασυνέχεια** *στον ξ.*

Αν ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f, μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της f στον ξ και μόνο στον ξ έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια νέα συνάρτηση συνεχής στον ξ. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε την $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A,\, x \neq \xi \\ \eta, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$$

Η g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την f και διαφέρει από την f μόνο στον ξ. Επειδή $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq \xi$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Επομένως, επειδή $g(\xi) = \eta$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$, οπότε η g είναι συνεχής στον ξ.

Παράδειγμα 4.1.12. Η $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$ είναι αριθμός και $f(0) \neq 1$. Η $g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στον 0. Παρατηρήστε ότι η g ταυτίζεται με τη συνάρτηση $x+1$ στο $\mathbb{R}$, ενώ η f ταυτίζεται με τη συνάρτηση $x+1$ στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω είτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$ είτε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικά. Τότε λέμε ότι ο ξ είναι* **σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **ασυνέχεια πρώτου είδους** *στον ξ. Στη δεύτερη υποπερίπτωση το $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x)$, που είναι $\neq 0$, ονομάζεται* **άλμα** *της f στον ξ.*

Παράδειγμα 4.1.13. Η $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Το ίδιο ισχύει για την $f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 4.1.14. Η $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, με άλμα στον 0 ίσο με $+\infty - (-\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.1.15. Η $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geq 0 \\ x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, αφού $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$. Το άλμα στον 0 είναι ίσο με $1 - 0 = 1$. Η f είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 0.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f και δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ ή αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f και δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, τότε λέμε ότι ο ξ είναι* **σημείο ασυνέχειας δεύτερου είδους** *ή* **σημείο ουσιώδους ασυνέχειας** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **ασυνέχεια δεύτερου είδους** *ή* **ουσιώδη ασυνέχεια** *στον ξ.*

Παράδειγμα 4.1.16. Η $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x > 0 \\ x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sin(1/x)$ δεν υπάρχει. Επειδή $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0 = f(0)$, η f είναι αριστερά συνεχής στον 0.

Παράδειγμα 4.1.17. Η $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει κανένα από τα πλευρικά όρια στον 0.

Παράδειγμα 4.1.18. Η $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει το δεξιό πλευρικό όριο στον 0.

Δείτε, όμως, και το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1.19. Η $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στον 0. Πράγματι, είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0 = f(0)$, διότι $\lim_{x\to 0} x = 0$ και η $\sin(1/x)$ είναι φραγμένη.

Αν ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου ή δεύτερου είδους της f, τότε ο ξ δεν μπορεί να μετατραπεί σε σημείο συνέχειας με απλή αλλαγή της τιμής $f(\xi)$. Αυτό γίνεται μόνο στην περίπτωση που ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας.[1]

Ασυνέχειες μονότονων συναρτήσεων.

Για την καλύτερη κατανόηση των παρακάτω θα βοηθούσε ένα προσεκτικό σχέδιο του γραφήματος της f στις διάφορες περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μονότονη στο A και $\xi \in A$.*
[α] *Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε ο ξ είναι είτε σημείο συνέχειας είτε σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους της f. Στη δεύτερη περίπτωση η f έχει θετικό άλμα στον ξ, αν είναι αύξουσα, και αρνητικό άλμα στον ξ, αν είναι φθίνουσα.*
[β] *Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του ή μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε ο ξ είναι είτε σημείο συνέχειας είτε σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.*

Απόδειξη. [α] Έστω f αύξουσα στο A.
Τότε η f είναι αύξουσα στο $A\cap(-\infty,\xi)$ και άνω φραγμένη στο σύνολο αυτό, αφού ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A\cap(-\infty,\xi)$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.2, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι αριθμός και, μάλιστα,

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi).$$

Ομοίως, η f είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη στο $A\cap(\xi,+\infty)$, αφού ισχύει $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A\cap(\xi,+\infty)$. Άρα υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι αριθμός και

$$f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Άρα τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ είναι αριθμοί και

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x). \tag{4.3}$$

Τώρα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Στην πρώτη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ.
Στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$, οπότε η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ με άλμα $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x) > 0$.
Η απόδειξη είναι ίδια αν η f είναι φθίνουσα στο A: απλώς, τότε όλες οι προηγούμενες ανισότητες αλλάζουν φορά και βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to\xi-} f(x) \geq f(\xi) \geq \lim_{x\to\xi+} f(x)$.
[β] Έστω f αύξουσα στο A και ξ μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.
Όπως πριν, το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και $\lim_{x\to\xi+} f(x) \geq f(\xi)$. Επομένως, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και $\lim_{x\to\xi} f(x) \geq f(\xi)$.
Πάλι έχουμε δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και, επομένως, η f είναι

[1] Δείτε την άσκηση 4.1.8.

συνεχής στον ξ. Στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) > f(\xi)$, οπότε ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.
Η απόδειξη είναι ίδια σε κάθε άλλη περίπτωση. $\square$

Ας μελετήσουμε λίγο παραπάνω την κατάσταση που περιγράφει η πρόταση 4.1, επιμένοντας σε ένα προσεκτικό σχέδιο του γραφήματος της f. Αυτά που θα πούμε τώρα θα παίξουν ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη της πρότασης 4.14.[2]

(i) Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A, ο $\xi \in A$ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f *δεν* είναι συνεχής στον ξ, οπότε ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους. Αν θέσουμε

$$\eta_- = \lim_{x\to\xi-} f(x), \qquad \eta_+ = \lim_{x\to\xi+} f(x),$$

τότε το άλμα της f στον ξ είναι ίσο με $\eta_+ - \eta_- > 0$. Η (4.3) πιο πάνω λέει ότι

$$\eta_- \leq f(\xi) \leq \eta_+.$$

Επίσης, επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει

$$f(x) \leq \eta_- \quad \text{για } x \in A \cap (-\infty, \xi) \qquad \text{και} \qquad \eta_+ \leq f(x) \quad \text{για } x \in A \cap (\xi, +\infty).$$

Άρα η μοναδική τιμή της f η οποία *ενδέχεται* να ανήκει στο ανοικτό διάστημα (η_-, η_+) είναι η $f(\xi)$. Πιο συγκεκριμένα, αν $f(\xi) = \eta_-$ ή $f(\xi) = \eta_+$, τότε το διάστημα (η_-, η_+) δεν περιέχει καμιά τιμή της f και, αν $\eta_- < f(\xi) < \eta_+$, τότε η ένωση $(\eta_-, f(\xi)) \cup (f(\xi), \eta_+)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Με τις ίδιες υποθέσεις αλλά με την f να είναι φθίνουσα αντί αύξουσα, συνεπάγεται $\eta_+ < \eta_-$ και $\eta_+ \leq f(\xi) \leq \eta_-$ και έχουμε όμοια αποτελέσματα: είτε το διάστημα (η_+, η_-) δεν περιέχει καμιά τιμή της f είτε η ένωση $(\eta_+, f(\xi)) \cup (f(\xi), \eta_-)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.

(ii) Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A, ο $\xi \in A$ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f *δεν* είναι συνεχής στον ξ, οπότε ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας. Αν θέσουμε $\eta_+ = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, αποδείξαμε ότι $f(\xi) < \eta_+$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (-\infty, \xi)$ και $\eta_+ \leq f(x)$ για κάθε $x \in A \cap (\xi, +\infty)$. Άρα το ανοικτό διάστημα $(f(\xi), \eta_+)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Με τις ίδιες υποθέσεις αλλά με την f να είναι φθίνουσα αντί αύξουσα, συνεπάγεται $\eta_+ < f(\xi)$ και το διάστημα $(\eta_+, f(\xi))$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Αν η f είναι μονότονη στο A και ο $\xi \in A$ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε, αν θέσουμε $\eta_- = \lim_{x\to\xi-} f(x)$, συμπεραίνουμε ότι, αν η f είναι αύξουσα, το διάστημα $(\eta_-, f(\xi)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f και, αν η f είναι φθίνουσα, το διάστημα $(f(\xi), \eta_-)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Τελικό συμπέρασμα:
Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη στο A, ο $\xi \in A$ είναι τουλάχιστον από αριστερά του ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f δεν είναι συνεχής στον ξ. Τότε ανάμεσα στις τιμές της f παρεμβάλεται τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα - του οποίου ένα από τα άκρα είναι ο $f(\xi)$ - το οποίο δεν περιέχει καμιά τιμή της.

Ασκήσεις.

4.1.1. Αποδείξτε βάσει του ορισμού ότι οι x, $2x-3$, x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\frac{x^2+1}{x+1}$ είναι συνεχείς στον 1.

4.1.2. Έστω οι $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x < 0 \\ x+1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1/x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} (1-\cos x)/x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Ποιές από αυτές είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς στον 0;

[2] Δείτε και την άσκηση 4.1.15.

4.1.3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $[x]$, $x-[x]$, $x-[x]-\frac{1}{2}$, $\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|$, $[x]+\sqrt{x-[x]}$. Σε ποιά σημεία είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς; Σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

4.1.4. Έστω οι $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\neq 0 \\ 1, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} 1/|x|, & \text{αν } x\neq 0 \\ -1, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\leq 0 \\ 1/x, & \text{αν } x>0 \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x>0 \\ 1, & \text{αν } x\leq 0 \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} (\tan x)/x, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας που παρουσιάζουν στον 0. Σε περίπτωση άρσιμης ασυνέχειας αλλάξτε την τιμή της f στον 0 ώστε να γίνει συνεχής στον 0. Σε περίπτωση άλματος βρείτε το.

4.1.5. Σε ποιά σημεία είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$; Σχεδιάστε το γράφημά της.

4.1.6. Έστω $f:(\xi-\delta,\xi+\delta)\to\mathbb{R}$.
[α] Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{h\to 0}(f(\xi+h)-f(\xi-h))=0$.
Από την $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ και τον $\xi=0$ τί συμπεραίνετε για την ισχύ του αντιστρόφου;
[β] Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{h\to 0}(f(\xi+h)+f(\xi-h)-2f(\xi))=0$.
Με κατάλληλη παραλλαγή του παραδείγματος στο [α] βγάλτε ανάλογο συμπέρασμα για την ισχύ του αντιστρόφου.

4.1.7. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $\xi\in A$ και $\delta>0$, $M\geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in A$ με $|x-\xi|<\delta$. Θεωρούμε την $g:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=(x-\xi)f(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στον ξ.

4.1.8. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $\xi\in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας της f. Αν υπάρχει $\eta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση με τύπο $g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\in A,\, x\neq\xi \\ \eta, & \text{αν } x=\xi \end{cases}$ να είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.

4.1.9. Αποδείξτε ότι η $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{Z}$ και συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Αποδείξτε ότι η $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε x.
Αποδείξτε ότι η $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ x, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε κάθε $x\neq 0$.
Αποδείξτε ότι η $f(x)=\begin{cases} 1/n, & \text{αν } x=m/n \text{ για κάποιους } m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N} \text{ με } \gcd(m,n)=1 \\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{Q}$ και συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας σε κάθε σημείο ασυνέχειας των συναρτήσεων αυτών.

4.1.10. Έστω $A\subseteq B$, $\xi\in A$, $g:B\to\mathbb{R}$ και έστω ότι η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ο περιορισμός της g στο A. Αποδείξτε ότι, αν η g είναι συνεχής στον ξ, τότε και η f είναι συνεχής στον ξ.

4.1.11. [3] Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0.

[3] Συνήθως, λέμε ότι το να είναι μια συνάρτηση f συνεχής στον ξ σημαίνει ότι το γράφημά της *"δεν διακόπτεται"* ή *"είναι συνεχές" στο σημείο* $(\xi, f(\xi))$. Όπως φαίνεται σ' αυτήν την άσκηση, αυτή η διατύπωση είναι ασαφής.

Ακόμη χειρότερα: η τρίτη συνάρτηση της άσκησης 4.1.9 είναι συνεχής μόνο στον 0 και ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Το γράφημα αυτής της συνάρτησης είναι αδύνατο να σχεδιαστεί!

4.1.12. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ και $\delta > 0$, $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| \leq M|x - \xi|^{\rho}$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ.[4]

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $|x|$, x^2, $\sqrt{|x|}$, $x\sqrt{|x|}$ έχουν την παραπάνω ιδιότητα με $\xi = 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους *μέγιστους* εκθέτες ρ. Αποδείξτε ότι οι ίδιες συναρτήσεις έχουν την παραπάνω ιδιότητα με οποιονδήποτε $\xi \neq 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους *μέγιστους* εκθέτες ρ. Παρατηρήστε ότι για τις δυο τελευταίες συναρτήσεις είναι άλλος ο μέγιστος εκθέτης ρ για τον $\xi = 0$ και άλλος για τον οποιονδήποτε $\xi \neq 0$.[5]

4.1.13. Έστω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ένα πεπερασμένο σύνολο A_n ώστε $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \neq n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } x \in A_n \text{ για κάποιον } n \\ 0, & \text{αν } x \notin A_n \text{ για κάθε } n \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ και ασυνεχής σε κάθε $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

4.1.14. Έστω μη-κενό σύνολο B. Ορίζουμε $f(x) = \inf\{|x - b| \,|\, b \in B\}$ για κάθε x.[6]

Σχεδιάστε το γράφημα της f στις περιπτώσεις που το B είναι ένα από τα σύνολα $\{a\}$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, b] \cup [c, d]$, $[a, b] \cup [c, d] \cup [p, q]$ (όπου $a < b < c < d < p < q$), $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Αποδείξτε ότι, γενικά, ισχύει $|f(x') - f(x'') \leq |x' - x''|$ για κάθε x', x'' και, επομένως, ότι η f είναι συνεχής.

4.1.15. [7] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ μονότονη στο I.

Αν το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα J, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο I.

Αν, επιπλέον, η $f : I \to J$ είναι γνησίως μονότονη στο I, αποδείξτε ότι και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ είναι συνεχής στο J.

4.1.16. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$.

Έστω ότι η f είναι φραγμένη κοντά στον ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $A \cap N_{\xi}(\delta_0)$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_{\xi}(\delta)\} < +\infty$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$. Ορίζουμε συνάρτηση $\omega : (0, \delta_0] \to \mathbb{R}_0^+$ με τύπο $\omega(\delta) = \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_{\xi}(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$. Αποδείξτε ότι η ω είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0]$, οπότε υπάρχει το $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$ και είναι αριθμός ≥ 0. Ορίζουμε $\omega(f; \xi) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$.

Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι φραγμένη κοντά στον ξ. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_{\xi}(\delta)\} = +\infty$. Τότε ορίζουμε $\omega(f; \xi) = +\infty$.[8]

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\omega(f; \xi) = 0$.

4.1.17. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο I.

Αν $a, b \in I$ και $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ και $j_k = \lim_{x \to x_k+} f(x) - \lim_{x \to x_k-} f(x)$ είναι το άλμα της f στον x_k για $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι $j_1 + \cdots + j_n \leq \lim_{x \to b-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x)$.

Αν $a, b \in I$ και $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι το πλήθος των σημείων $x \in (a, b)$, σε καθένα από τα οποία το άλμα της f είναι $\geq \frac{1}{k}$, είναι $\leq k(\lim_{x \to b-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x))$.

---

[4]Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, τότε χαρακτηρίζεται **Hölder-συνεχής** στον ξ με Hölder-εκθέτη ρ. Στην ειδική περίπτωση $\rho = 1$, η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz-συνεχής** στον ξ. Για παραλλαγές αυτών των εννοιών δείτε την άσκηση 4.6.3.

[5]Δείτε και την άσκηση 5.6.7.

[6]Ο αριθμός $\inf\{|x - b| \,|\, b \in B\}$ συνήθως συμβολίζεται $\mathrm{dist}(x, B)$ και ονομάζεται **απόσταση** του x από το B.

[7]Μια σημαντική περίπτωση, όπου η συνέχεια μιας συνάρτησης προκύπτει από τη μονοτονία της. Και ένα σημαντικό αποτέλεσμα για τη συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης. Θα το ξαναδούμε στην απόδειξη της πρότασης 4.14 αλλά και σε άλλες ασκήσεις.

[8]Και στις δυο περιπτώσεις, το $\omega(f; \xi)$ ονομάζεται **ταλάντωση** της f στον ξ. Μια παραλλαγή της έννοιας της ταλάντωσης σε σημείο είναι στην άσκηση 3.6.2. Η έννοια της ταλάντωσης σε *διάστημα* είναι στην άσκηση 6.1.3.

Θεωρήστε ακολουθίες (a_m), (b_m) στο I ώστε η (a_m) να είναι γνησίως φθίνουσα με όριο το αριστερό άκρο του I, η (b_m) να είναι γνησίως αύξουσα με όριο το δεξιό άκρο του I και ώστε $a_1 < b_1$. Αριθμήστε τα σημεία του (a_1, b_1) στα οποία το άλμα της f είναι ≥ 1. Κατόπιν αριθμήστε τα σημεία του (a_2, b_2) στα οποία το άλμα της f είναι $\geq \frac{1}{2}$, παραλείποντας τα σημεία που έχετε ήδη αριθμήσει. Κατόπιν αριθμήστε τα σημεία του (a_3, b_3) στα οποία το άλμα της f είναι $\geq \frac{1}{3}$, παραλείποντας τα σημεία που έχετε ήδη αριθμήσει. Συνεχίζοντας επ' άπειρον, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του I είναι αριθμήσιμο. Άρα το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο I είναι αριθμήσιμο.

Τί γίνεται αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα στο I;

Συζητήστε τη συνάρτηση $[x]$ στο $\mathbb{R}$ και την $[\frac{1}{x}]$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα.[9]

4.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ. Αν η μια από τις f, g είναι συνεχής στον ξ, το ίδιο ισχύει και για την άλλη.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ.
Τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και, επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ, ισχύει $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi} g(x) = f(\xi) = g(\xi)$.
Άρα η g είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 4.2.1. Οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x < 1 \\ x^2, & \text{αν } 1 \leq x < 4 \end{cases}$ και x^2 ταυτίζονται στο διάστημα $[1, 4)$. Η x^2 είναι συνεχής στον 2, οπότε και η $f(x)$ είναι συνεχής στον 2. Το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλον ξ στο ανοικτό διάστημα $(1, 4)$. Επίσης, η $f(x)$ και η συνάρτηση $x + 1$ ταυτίζονται στο $(-\infty, 1)$. Η $x + 1$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο $(-\infty, 1)$, οπότε και η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε τέτοιον ξ. Τα επιχειρήματα αυτά, τα οποία βασίζονται στην πρόταση 4.2, δεν ισχύουν για τον $\xi = 1$. Και, πράγματι, η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στον $\xi = 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ.*
[α] *Αν $f(\xi) > u$, τότε ισχύει $f(x) > u$ κοντά στον ξ.*
[β] *Αν $f(\xi) < l$, τότε ισχύει $f(x) < l$ κοντά στον ξ.*
[γ] *Αν $u < f(\xi) < l$, τότε ισχύει $u < f(x) < l$ κοντά στον ξ.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.4 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

Παράδειγμα 4.2.2. Η συνάρτηση $\frac{x^8+x^3+1}{x^5+3x^4-x^2+1}$ είναι συνεχής στον 1 και $\frac{1^8+1^3+1}{1^5+3\cdot1^4-1^2+1} = \frac{3}{4} = 0.75$. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $0.7499999 < \frac{x^8+x^3+1}{x^5+3x^4-x^2+1} < 0.7500001$ για κάθε $x \in (1-\delta, 1+\delta)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.6 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

Παράδειγμα 4.2.3. Η συνάρτηση $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής στον $\frac{1}{2}$, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον $\frac{1}{2}$. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η $\frac{1}{x(x-1)}$ να είναι φραγμένη στο διάστημα $(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$. Επειδή η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $(0, 1)$, πρέπει να είναι $\delta < \frac{1}{2}$.

[9] Στις ασκήσεις 10.1.23 και 10.1.24 υπάρχουν παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες είναι αύξουσες και έχουν σύνολο σημείων ασυνέχειας το $\mathbb{Q}$ ή και οποιοδήποτε άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A.*
[α] *Αν η f είναι συνεχής στον ξ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \geq l$.*
[β] *Αν η f είναι συνεχής στον ξ και ισχύει $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \leq u$.*
[γ] *Αν $u < l$ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ και $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε η f είναι ασυνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.7 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.6. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι συνεχείς στον ξ και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \leq g(\xi)$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.8 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$. □

Παράδειγμα 4.2.4. Έστω $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ συνεχής στον 0 και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq x^3$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Τότε $f(0) \leq 0^3 = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.7. *Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, h είναι συνεχείς στον ξ, αν ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ και αν $f(\xi) = g(\xi) = h(\xi)$, τότε και η g είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.10 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, $\lim_{x\to\xi} h(x) = h(\xi)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.8. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$, αριθμός λ και έστω ότι οι f, g είναι συνεχείς στον ξ. Τότε και οι $f + g, f - g, fg, \lambda f, |f| : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στον ξ. Αν, επιπλέον, ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και η $f/g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Αν ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε όλες οι συναρτήσεις είναι, αυτομάτως, συνεχείς στον ξ. Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε το αποτέλεσμα προκύπτει από την πρόταση 3.11 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$. □

Παράδειγμα 4.2.5. Οι συναρτήσεις $\frac{\sqrt{x}+e^x}{(x-2x^2)\log x}$ και $\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sin x+\cos x}$ είναι συνεχείς.

Ας πούμε κάτι ακόμη για την περίπτωση της συνάρτησης f/g. Έστω πάλι $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι οι f, g είναι συνεχείς στον ξ. Τώρα δεν θα υποθέσουμε ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, οπότε μπορεί να μην ορίζεται η f/g σε ολόκληρο το A. Θα υποθέσουμε, όμως, μόνο ότι $g(\xi) \neq 0$. Τότε από την πρόταση 4.3 συνεπάγεται ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στον ξ. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Μάλιστα, η g έχει κοντά στον ξ το ίδιο πρόσημο που έχει και η τιμή $g(\xi)$. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι ορίζεται η $f/g : A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχής στον ξ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.9. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ και η g είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ και η g είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y) - g(\eta)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } y \in B \text{ με } |y - \eta| < \delta'. \tag{4.4}$$

Επίσης, για τον ίδιο δ' υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - \eta| = |f(x) - f(\xi)| < \delta' \qquad \text{για κάθε } x \in A \text{ με } |x - \xi| < \delta. \tag{4.5}$$

Από την (4.5) και την (4.4) με $y = f(x)$ (και επειδή $f(x) \in B$) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ισχύει $|g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$ και, επομένως, $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| < \epsilon$.
Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 4.2.6. Οι συναρτήσεις $e^{\sqrt{x}}$, $\sqrt{\log x}$, $\sin\sqrt{x}$ και $\sqrt{\sin x}$ είναι συνεχείς.

Ένα θέμα παρεμφερές με την πρόταση 4.9 αλλά και - ίσως πιο πολύ - με την πρόταση 3.13 είναι ο υπολογισμός του ορίου της σύνθεσης $g\circ f$ στην περίπτωση που το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι *αριθμός* και η g είναι *συνεχής* στον η.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, ξ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in B$ και η g είναι συνεχής στον η, τότε $\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = g(\eta)$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in B$ και ότι η g είναι συνεχής στον η.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y) - g(\eta)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ y \in B \ \text{ με } \ |y-\eta| < \delta'. \tag{4.6}$$

Επίσης, για τον ίδιο δ', υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - \eta| < \delta' \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ με } \ 0 < |x-\xi| < \delta. \tag{4.7}$$

Τώρα, από την (4.7) και την (4.6) με $y = f(x)$ (και επειδή $f(x) \in B$) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ με $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $\big|g\big(f(x)\big) - g(\eta)\big| < \epsilon$ και, επομένως, $|(g\circ f)(x) - g(\eta)| < \epsilon$.
Άρα $\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = g(\eta)$. □

Όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα σύνθεσης, χρησιμοποιούμε την έκφραση "κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$" και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y) = g(\eta).$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = g(\eta)$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ συνδυάζονται στη μορφή

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = g\big(\lim_{x\to\xi} f(x)\big).$$

Όπως είδαμε, αυτή η "εναλλαγή" των συμβόλων $\lim_{x\to\xi}$ και g ισχύει με την προϋπόθεση ότι η g είναι συνεχής στον η, δηλαδή στο όριο της f.

Παράδειγμα 4.2.7. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{(x^7+1)^4}{(x^7+1)^8+(x^7+1)^{12}+5}$.
Είναι $\lim_{x\to 0}(x^7+1) = 1$ και η συνάρτηση $\frac{y^4}{y^8+y^{12}+5}$ είναι συνεχής στον 1. Άρα, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = x^7+1$, βρίσκουμε $\lim_{x\to 0} \frac{(x^7+1)^4}{(x^7+1)^8+(x^7+1)^{12}+5} = \frac{1^4}{1^8+1^{12}+5} = \frac{1}{7}$.

Παράδειγμα 4.2.8. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\frac{x-1}{x^2+x+1})^5+4(\frac{x-1}{x^2+x+1})^3+1}{3(\frac{x-1}{x^2+x+1})^4+2(\frac{x-1}{x^2+x+1})^2+1}$.
Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+x+1} = 0$ και η $\frac{y^5+4y^3+1}{3y^4+2y^2+1}$ είναι συνεχής στον 0. Άρα, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$, έχουμε $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\frac{x-1}{x^2+x+1})^5+4(\frac{x-1}{x^2+x+1})^3+1}{3(\frac{x-1}{x^2+x+1})^4+2(\frac{x-1}{x^2+x+1})^2+1} = \frac{0^5+4\cdot 0^3+1}{3\cdot 0^4+2\cdot 0^2+1} = 1$.

Παράδειγμα 4.2.9. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty} \big((\frac{\sin x}{x})^3 + \frac{\sin x}{x}\big)$.
Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και η συνάρτηση y^3+y είναι συνεχής στον 0. Άρα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \frac{\sin x}{x}$, βρίσκουμε $\lim_{x\to+\infty} \big((\frac{\sin x}{x})^3 + \frac{\sin x}{x}\big) = 0^3+0 = 0$.

Ας δούμε κάποιες διαφορές ανάμεσα στις προτάσεις 3.13 και 4.10.
(i) Στην πρόταση 3.13 το όριο της f δεν χρειάζεται να είναι αριθμός ενώ στην πρόταση 4.10 το όριο της f πρέπει να είναι αριθμός. Άρα η πρόταση 4.10 δεν εφαρμόζεται στο παράδειγμα 3.3.32.
(ii) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, μια από τις υποθέσεις της πρότασης 3.13 είναι ότι ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ. Στην πρόταση 4.10 υπάρχει η υπόθεση ότι η g είναι συνεχής στον η. Άρα η πρόταση 4.10 δεν εφαρμόζεται στο παράδειγμα 3.3.33, διότι η συνάρτηση $y^{-2}+y^{-4}$ δεν είναι συνεχής στον 0, και η πρόταση 3.13 δεν εφαρμόζεται στο παράδειγμα 4.2.9, διότι δεν υπάρχει κανένας N

ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x} \neq 0$ για κάθε $x > N$. Τέλος, καμιά από τις δυο προτάσεις δεν εφαρμόζεται στο παράδειγμα 3.3.34, διότι η g δεν είναι συνεχής στον 0 και διότι, και πάλι, δεν υπάρχει κανένας N ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x} \neq 0$ για κάθε $x > N$.
Το πλεονέκτημα της πρότασης 4.10 σε σχέση με την πρόταση 3.13 είναι ότι, με την προϋπόθεση ότι η g είναι συνεχής στο η, *δεν χρειάζεται να ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ*.

Παράδειγμα 4.2.10. Τώρα είναι ευκαιρία να συμπληρώσουμε το παράδειγμα 3.3.39, αποδεικνύοντας, για κάθε t, ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \tfrac{t}{x}\right)^x = e^t.$$

Το παράδειγμα 3.3.39 είναι η περίπτωση $t = 1$ του ορίου αυτού. Πάμε στην περίπτωση $t = -1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(1 - \tfrac{1}{x})^x &= \lim_{x\to+\infty}(\tfrac{x-1}{x})^x = \lim_{y\to+\infty}(\tfrac{y}{y+1})^{y+1} \\ &= \lim_{y\to+\infty}(\tfrac{y}{y+1})/(1 + \tfrac{1}{y})^y = \tfrac{1}{e} = e^{-1}.\end{aligned}$$

Οι περιπτώσεις $t > 0$ και $t < 0$ ανάγονται στις $t = 1$ και $t = -1$, αντιστοίχως, ως εξής. Αν $t > 0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}(1 + \tfrac{t}{x})^x = \lim_{y\to+\infty}(1 + \tfrac{1}{y})^{ty} = \lim_{y\to+\infty} \left((1 + \tfrac{1}{y})^y\right)^t = \lim_{z\to e} z^t = e^t$$

και, αν $t < 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}(1 + \tfrac{t}{x})^x = \lim_{y\to+\infty}(1 - \tfrac{1}{y})^{-ty} = \lim_{y\to+\infty} \left((1 - \tfrac{1}{y})^y\right)^{-t} = \lim_{z\to e^{-1}} z^{-t} = e^t.$$

Η περίπτωση $t = 0$ είναι, φυσικά, τετριμμένη.

Απόδειξη της πρότασης 3.14. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)^{g(x)}$ και έστω $f(x) \to \eta$ και $g(x) \to \zeta$.
Υποθέτουμε ότι $0 < \eta < +\infty$, $-\infty < \zeta < +\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $h(x) \to \eta^\zeta$. Σύμφωνα με την πρόταση 4.10, είναι $\log f(x) \to \log\eta$ και, επομένως, $\log h(x) = g(x)\log f(x) \to \zeta\log\eta$.
Πάλι από την πρόταση 4.10, είναι $h(x) = e^{\log h(x)} \to e^{\zeta\log\eta} = \eta^\zeta$.
Για τις περιπτώσεις που απομένουν εφαρμόζουμε τις προτάσεις 3.13 και 4.10.
Αν $0 < \eta < 1$ και $\zeta = -\infty$, τότε $\log f(x) \to \log\eta$ οπότε $\log h(x) = g(x)\log f(x) \to +\infty$ και, επομένως, $h(x) = e^{\log h(x)} \to +\infty = \eta^\zeta$.
Αν $0 < \eta < 1$ και $\zeta = +\infty$, τότε $\log f(x) \to \log\eta$ οπότε $\log h(x) = g(x)\log f(x) \to -\infty$ και, επομένως, $h(x) = e^{\log h(x)} \to 0 = \eta^\zeta$.
Αν $\eta > 1$ και $\zeta = -\infty$, τότε $\log f(x) \to \log\eta$ οπότε $\log h(x) = g(x)\log f(x) \to -\infty$ και, επομένως, $h(x) = e^{\log h(x)} \to 0 = \eta^\zeta$.
Αν $\eta > 1$ και $\zeta = +\infty$, τότε $\log f(x) \to \log\eta$ οπότε $\log h(x) = g(x)\log f(x) \to +\infty$ και, επομένως, $h(x) = e^{\log h(x)} \to +\infty = \eta^\zeta$.
Αν $\eta = +\infty$ και $0 < \zeta \leq +\infty$, τότε $\log f(x) \to +\infty$ οπότε $\log h(x) = g(x)\log f(x) \to +\infty$ και, επομένως, $h(x) = e^{\log h(x)} \to +\infty = \eta^\zeta$.
Αν $\eta = +\infty$ και $-\infty \leq \zeta < 0$, τότε $\log f(x) \to +\infty$ οπότε $\log h(x) = g(x)\log f(x) \to -\infty$ και, επομένως, $h(x) = e^{\log h(x)} \to 0 = \eta^\zeta$.
Αν $\eta = 0$ και $\zeta = -\infty$, τότε $\log f(x) \to -\infty$ οπότε $\log h(x) = g(x)\log f(x) \to +\infty$ και, επομένως, $h(x) = e^{\log h(x)} \to +\infty$. □

Ασκήσεις.

4.2.1. Βρείτε τα σημεία συνέχειας των συναρτήσεων $\frac{x^2\log x + xe^x}{x-1}$, $x^{3/4}\log(1-x)$, $\log(x^2+1)$, $\log(x^2-5x+6)$, $(e^x-1)^{-1/2}$, $\sqrt{1-\cos x}$, $e^{1/\log x}$, $(1-x+[x])(x-[x])$, $\sqrt{[x]}$, $\sin(\log x)$, $e^{1/\sin x}$, $\log(\sin x)$, $\log(1-\cos x)$.

4.2.2. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στον $\xi \in A$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι η $f^g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$ είναι συνεχής στον ξ.

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x^x, $(x^2-3)^{(x-2)/(x+2)}$, $(\log x)^{\log x}$ είναι συνεχείς. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους;

4.2.3. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}$, $\lim_{x\to+\infty} e^{[x]/x}$, $\lim_{x\to 0} e^{x\sin(1/x)}$, $\lim_{x\to-\infty} \cos\frac{\sin x}{x}$ βάσει της πρότασης 4.10. Σε ποιά από αυτά εφαρμόζεται η πρόταση 3.13;

4.2.4. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι συνεχής στον ξ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ και $f(x) \leq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, βρείτε την τιμή του $f(\xi)$.

4.2.5. Έστω $f : (\xi-\delta, \xi+\delta) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = l \in \mathbb{R}$ και $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)+f(\xi-h)-2f(\xi)}{h} = m \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Τί γίνεται αν δεν υποθέσουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και ότι είναι αριθμός;

4.2.6. Από τις $f, g : A \to \mathbb{R}$ ορίζουμε τις $\max\{f,g\} : A \to \mathbb{R}$ και $\min\{f,g\} : A \to \mathbb{R}$ με τύπους $\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ και $\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ για κάθε $x \in A$.

Αποδείξτε ότι, αν οι f, g είναι συνεχείς στον $\xi \in A$, τότε και οι $\max\{f,g\}$ και $\min\{f,g\}$ είναι συνεχείς στον ξ.

4.2.7. Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο A. Ορίζουμε $m : A \to \mathbb{R}$ ώστε, για κάθε $x \in A$, ο $m(x)$ να είναι από τους $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ εκείνος που βρίσκεται ανάμεσα στους δυο άλλους.

Αποδείξτε ότι η m είναι συνεχής στο A.

4.2.8. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ ενώ η $|f|$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$.

4.2.9. Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } x = m/n \text{ για κάποιους } m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \text{ με } \gcd(m,n) = 1 \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα σημείο κοντά στο οποίο η f να είναι φραγμένη.

4.2.10. [10] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$.

Αν $f(a) = 0$ και $f(b) \neq 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει μέγιστη ρίζα της f στο $[a,b]$.

Αν $f(a) \neq 0$ και $f(b) = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει ελάχιστη ρίζα της f στο $[a,b]$.

4.2.11. [11] Έστω διάστημα I το οποίο δεν είναι μονοσύνολο και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I.

Αν ισχύει $f(r) \geq 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$.

Αν ισχύει $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.

Αν η $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει $f(r) = r^2$ για κάθε ρητό $r \in [0,2]$, βρείτε τον $f(\sqrt{2})$.

4.2.12. [12] [α] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = cx$ για κάποια σταθερά c.

[β] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1+x_2-x_3) = f(x_1) + f(x_2) - f(x_3)$ για κάθε x_1, x_2, x_3. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = cx + d$ για κάποιες σταθερές c, d.

[γ] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2 και $f(0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = e^{cx}$ για κάποια σταθερά c.

[10] Ένα σημαντικό αποτέλεσμα για ρίζες συνεχών συναρτήσεων.

[11] Μια σημαντική άσκηση για την πυκνότητα των ρητών. Θα την ξαναδούμε ως άσκηση 4.3.2.

[12] Τρεις σημαντικές "συναρτησιακές εξισώσεις".

4.2.13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, αν η f δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο,[13] τότε το σύνολο των περιόδων της είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο, τότε είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η μη-σταθερή συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ έχει ως περίοδο κάθε μη-μηδενικό ρητό αριθμό.

4.2.14. Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένη στο A. Ορίζουμε συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sup\{f(t) \,|\, t \in A, t \leq x\}$ για κάθε $x \in A$.

Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα στο A και ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση $h : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και ισχύει $f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε ισχύει $g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in A$. Με άλλα λόγια, η g είναι η μικρότερη από τις συναρτήσεις που είναι αύξουσες στο A και είναι μεγαλύτερες ή ίσες της f στο A.

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον $\xi \in A$, τότε και η g είναι συνεχής στον ξ.

4.2.15. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ορίζουμε συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\}$ για κάθε y.

Για καθεμιά από τις συναρτήσεις $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq -1 \\ 0, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ x-1, & \text{αν } 1 \leq x \end{cases}$ βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση g.

Αποδείξτε ότι ισχύει $f(g(y)) = y$ για κάθε y.

Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα, αποδείξτε ότι η g είναι η αντίστροφη της f.

Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και αριστερά συνεχής σε κάθε y. Είναι η g δεξιά συνεχής σε κάθε y;

4.3 Συνεχείς συναρτήσεις και ακολουθίες.

Το θεώρημα 4.1 ανάγει την έννοια της συνέχειας στην έννοια του ορίου ακολουθίας. Το ανάλογο θεώρημα 3.1 ανάγει την έννοια του ορίου συνάρτησης, επίσης, στην έννοια του ορίου ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ και έστω ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(\xi)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in A \text{ με } |x - \xi| < \delta. \tag{4.8}$$

Για τον ίδιο δ, ισχύει τελικά

$$|x_n - \xi| < \delta. \tag{4.9}$$

Από την (4.9) και την (4.8) με $x = x_n$ συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|f(x_n) - f(\xi)| < \epsilon.$$

[13] Αν υπάρχει ελάχιστη θετική περίοδος της f, τότε αυτή χαρακτηρίζεται **βασική περίοδος** της f.

Άρα $f(x_n) \to f(\xi)$.
Τώρα, έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στον ξ. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon$. Εφαρμόζοντας αυτό το τελευταίο με $\delta = \frac{1}{n}$, συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_n \in A \ \text{ με } \ |x_n - \xi| < \tfrac{1}{n} \ \text{ ώστε } \ |f(x_n) - f(\xi)| \geq \epsilon.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ για την οποία, όμως, δεν ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$. Άτοπο.
Άρα η f είναι συνεχής στον ξ. $\square$

Παράδειγμα 4.3.1. Αν $P(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση και $x_n \to \xi$, τότε $P(x_n) \to P(\xi)$.

Παράδειγμα 4.3.2. Αν η $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, αν $Q(\xi) \neq 0$ και ισχύει $Q(x_n) \neq 0$ για κάθε n και αν $x_n \to \xi$, τότε $R(x_n) \to R(\xi)$.

Παράδειγμα 4.3.3. Αν $x_n \to \xi$, τότε $e^{x_n} \to e^{\xi}$.

Παράδειγμα 4.3.4. Αν $\xi > 0$ και ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και αν $x_n \to \xi$, τότε $\log x_n \to \log \xi$.

Παράδειγμα 4.3.5. Αν $x_n \to \xi$, τότε $\cos x_n \to \cos \xi$ και $\sin x_n \to \sin \xi$.

Οι σχέσεις $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$ συνδυάζονται στην

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big).$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή η “εναλλαγή” των συμβόλων $\lim_{n\to+\infty}$ και f ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στον ξ, δηλαδή στο όριο της (x_n).

Έχουμε και την ανάλογη παραλλαγή του θεωρήματος 4.1, όπου η συνέχεια αντικαθίσταται με την δεξιά (αριστερή) συνέχεια και υπάρχει η επιπλέον υπόθεση ότι ισχύει $x_n \geq \xi$ ($x_n \leq \xi$) για κάθε n.

Όπως είπαμε, το θεώρημα 4.1 σχετίζεται με το θεώρημα 3.1. Παρατηρήστε ότι, ενώ στο θεώρημα 4.1 δεν χρειάζεται να υποθέσουμε τίποτα για τους όρους της ακολουθίας (πέρα από το ότι ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης) στο θεώρημα 3.1 πρέπει να υποθέσουμε, επιπλέον, ότι όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$.

Παράδειγμα 4.3.6. $\frac{1+(-1)^n}{n} \to 0$ και η $\sin x$ είναι συνεχής στον 0. Άρα $\sin \frac{1+(-1)^n}{n} \to \sin 0 = 0$. Δεν εφαρμόζεται το θεώρημα 3.1, διότι ισχύει $\frac{1+(-1)^n}{n} = 0$ για άπειρους n.

Απόδειξη της πρότασης 2.12. Ορίζουμε $z_n = {x_n}^{y_n}$ και έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$.
Υποθέτουμε ότι $0 < x < +\infty$ και $-\infty < y < +\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $z_n \to x^y$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.1, είναι $\log x_n \to \log x$ και, επομένως, $\log z_n = y_n \log x_n \to y \log x$. Πάλι από το θεώρημα 4.1, $z_n = e^{\log z_n} \to e^{y \log x} = x^y$.
Για τις περιπτώσεις που απομένουν εφαρμόζουμε τα θεωρήματα 3.1 και 4.1.

Αν $0 < x < 1$ και $y = -\infty$, τότε $\log x_n \to \log x$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.

Αν $0 < x < 1$ και $y = +\infty$, τότε $\log x_n \to \log x$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.

Αν $x > 1$ και $y = -\infty$, τότε $\log x_n \to \log x$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.

Αν $x > 1$ και $y = +\infty$, τότε $\log x_n \to \log x$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.

Αν $x = +\infty$ και $0 < y \leq +\infty$, τότε $\log x_n \to +\infty$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.

Αν $x = +\infty$ και $-\infty \leq y < 0$, τότε $\log x_n \to +\infty$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.

Αν $x = 0$ και $y = -\infty$, τότε $\log x_n \to -\infty$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty$. □

Δυνάμεις αρνητικών αριθμών με μη-ακέραιους εκθέτες.

Στο σημείο αυτό θα δούμε γιατί αποφεύγουμε να ορίσουμε τις δυνάμεις αρνητικών αριθμών με μη-ακέραιους εκθέτες. Θα δούμε ότι, για $a < 0$, δεν είναι δυνατό να ορίσουμε την δύναμη a^x για κάθε τιμή του x σε κάποιο σύνολο A, αν θέλουμε να ικανοποιούνται κάποια "ελάχιστα κριτήρια" και αν θέλουμε το σύνολο A να είναι "στοιχειωδώς μεγάλο". Θα θέλαμε, για παράδειγμα, το A να είναι μεγαλύτερο από το $\mathbb{Z}$ (διότι έχουμε ήδη ορίσει τον a^x για κάθε $x \in \mathbb{Z}$) και το επιθυμητό θα ήταν το A να είναι τουλάχιστον το $\mathbb{Q}$ ή, ιδανικά, να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.
Στα παρακάτω θα είναι $a < 0$.
Μια πρώτη λογική απαίτηση ώστε να ορίσουμε τον a^x για κάθε x στο σύνολο A είναι να ικανοποιείται η συνήθης αλγεβρική ιδιότητα $a^x a^y = a^{x+y}$ για κάθε $x, y \in A$. Αυτό συνεπάγεται, ειδικώτερα, ότι το A πρέπει να έχει την ιδιότητα: $x + y \in A$ για κάθε $x, y \in A$.
Έστω $r \in \mathbb{Q}$. Τότε, όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν μοναδικοί $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $\gcd(m, n) = 1$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Αυτή η γραφή του r ονομάζεται *ανάγωγη μορφή* του. Παρακάτω θα χρειαστούμε τα εξής δυο απλά αποτελέσματα: (i) Αν $r = \frac{m}{n}$ είναι η ανάγωγη μορφή του r και ο n είναι άρτιος, τότε ο m είναι περιττός. (ii) Αν $r = \frac{m'}{n'}$, όπου $m' \in \mathbb{Z}$ και $n' \in \mathbb{N}$, τότε η ανάγωγη μορφή $r = \frac{m}{n}$ του r προκύπτει με απλοποίηση του λόγου $\frac{m'}{n'}$. Άρα ο m είναι διαιρέτης του m' και ο n είναι διαιρέτης του n'. Άρα, αν ο m' είναι περιττός, τότε και ο m είναι περιττός και, αν ο n' είναι περιττός, τότε και ο n είναι περιττός.
Έστω, λοιπόν, $r \in \mathbb{Q}$ και $r = \frac{m}{n}$ η ανάγωγη μορφή του r. Όπως κι αν ορίσουμε τον a^r, πρέπει (λόγω της αναγκαίας αλγεβρικής ιδιότητας) να ισχύει

$$(a^r)^n = a^r \cdots a^r = a^{r+\cdots+r} = a^{nr} = a^m,$$

οπότε ο a^r είναι λύση της εξίσωσης $x^n = a^m$. Παρατηρούμε ότι, αν ο n είναι άρτιος, τότε ο m είναι περιττός, οπότε $(a^r)^n = a^m < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, αν η ανάγωγη μορφή του r έχει άρτιο παρονομαστή, τότε δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^r. Κατόπιν, παρατηρούμε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^n = a^m$ έχει ακριβώς μια λύση: η λύση αυτή είναι είτε η $\sqrt[n]{a^m}$, αν ο m είναι άρτιος (διότι τότε $a^m > 0$), είτε η $-\sqrt[n]{-a^m}$, αν ο m είναι περιττός (διότι τότε $a^m < 0$).
Συνοψίζουμε: *αν η ανάγωγη μορφή του r έχει άρτιο παρονομαστή, τότε δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^r και, αν η ανάγωγη μορφή $r = \frac{m}{n}$ του r έχει περιττό παρονομαστή, τότε μπορεί να ορισθεί ο a^r ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^n = a^m$.*
Τώρα θεωρούμε ως A το σύνολο όλων των ρητών των οποίων η ανάγωγη μορφή έχει περιττό παρονομαστή. Το A περιέχει όλους τους ακεραίους, διότι αν $m \in \mathbb{Z}$, τότε είναι σαφές ότι η ανάγωγη μορφή του m είναι η $m = \frac{m}{1}$ και ο 1 είναι περιττός. Άρα $\mathbb{Z} \subseteq A$. Από την άλλη μεριά, το A είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, διότι, για παράδειγμα, ο ρητός $\frac{1}{2}$ δεν ανήκει στο A. Το A έχει και την ιδιότητα που επισημάναμε προηγουμένως. Δηλαδή, αν $r, s \in A$, τότε $r + s \in A$. Πράγματι, έστω $r, s \in A$ και έστω $r = \frac{m}{n}$ και $s = \frac{k}{l}$ οι ανάγωγες μορφές των r, s, οπότε οι n, l είναι περιττοί. Τότε $r + s = \frac{ml+kn}{nl}$ και ο nl είναι περιττός. Άρα, σύμφωνα με μια προηγούμενη παρατήρησή μας, η ανάγωγη μορφή του $r + s$ (που μπορεί να μην είναι η $r + s = \frac{ml+kn}{nl}$) έχει περιττό παρονομαστή, οπότε $r + s \in A$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι, αν ορίσουμε τον a^r για κάθε $r \in A$ με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως, τότε *ισχύει* η αλγεβρική ιδιότητα $a^r a^s = a^{r+s}$ για κάθε $r, s \in A$. Θα παραλείψουμε την απόδειξη. Μάλιστα, μπορεί να αποδειχθεί σχετικά εύκολα ότι αν ορίσουμε, όπως παραπάνω, τον a^r *για κάθε* $a < 0$ *και κάθε* $r \in A$, τότε ισχύουν και οι τρεις αλγεβρικές ιδιότητες στην πρόταση 1.8[α].
Το σύνολο A δεν είναι βέβαια όσο "μεγάλο" θα θέλαμε: είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Πάντως,

είναι γνήσιο υπερσύνολο του $\mathbb{Z}$ και θα προσέφερε μια ικανοποιητική επέκταση του ορισμού του a^x σε ένα σύνολο μεγαλύτερο του $\mathbb{Z}$ αν, εκτός από το "αλγεβρικό κριτήριο" ικανοποιούνταν και ένα απαραίτητο "αναλυτικό κριτήριο". Το κριτήριο αυτό είναι: η συνάρτηση a^x πρέπει να είναι *συνεχής* στο πεδίο ορισμού της A. Θα δούμε ότι η συνάρτηση a^x με πεδίο ορισμού το A δεν είναι συνεχής και, μάλιστα, είναι ασυνεχής σε *κάθε* σημείο του A.
Έστω $r \in A$ και έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η a^x είναι συνεχής στον r. Έστω $r = \frac{m}{n}$ η ανάγωγη μορφή του r. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$t_k = \tfrac{2^k m}{2^k n+1}, \qquad s_k = \tfrac{2^k m+1}{2^k n+1}.$$

Επειδή ο παρονομαστής $2^k n + 1$ είναι περιττός, οι ανάγωγες μορφές των t_k, s_k έχουν περιττούς παρονομαστές, οπότε $t_k, s_k \in A$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$t_k \to r, \qquad s_k \to r.$$

Λόγω συνέχειας της a^x στον r, συνεπάγεται ότι

$$a^{t_k} \to a^r, \qquad a^{s_k} \to a^r.$$

Ο αριθμός a^{t_k} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{2^k n+1} = a^{2^k m} > 0$, οπότε $a^{t_k} > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$a^r \geq 0.$$

Ο αριθμός a^{s_k} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{2^k n+1} = a^{2^k m+1} < 0$, οπότε $a^{s_k} < 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$a^r \leq 0.$$

Επομένως, $a^r = 0$. Αυτό είναι αδύνατο διότι

$$a^r a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^0 = 1.$$

Ίσως αναρωτηθεί κανείς αν είναι δυνατό (με $a < 0$) να ορισθεί ο a^x για κάθε x σε ένα σύνολο A το οποίο, εκτός, από τους ακεραίους, περιέχει και τους αρρήτους. Και πάλι, όμως, βλέπουμε ότι αυτό δεν γίνεται, διότι δεν θα ικανοποιείται τουλάχιστον το "αλγεβρικό κριτήριο": δηλαδή ότι, αν $x, y \in A$, τότε $x + y \in A$. Πράγματι, έστω ότι ισχύει: αν $x, y \in A$, τότε $x + y \in A$. Έστω οποιοσδήποτε ρητός r. Επειδή το A περιέχει τους αρρήτους, πρέπει να είναι $r - \sqrt{2} \in A$ και $\sqrt{2} \in A$, οπότε $r = (r - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \in A$. Άρα το A περιέχει όλους τους ρητούς. Αυτό είναι άτοπο, διότι είδαμε ότι δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^x για κάθε $x \in \mathbb{Q}$.
Άρα, αφού δεν μπορεί να υπάρχει σύνολο A, το οποίο να είναι "στοιχειωδώς μεγάλο", στο οποίο να ορίζεται η δύναμη a^x, το μόνο που απομένει είναι να ορισθεί ο a^x για μεμονωμένους "λίγους" αριθμούς x πέραν των ακεραίων. Αυτό, όμως, θα ήταν ουσιαστικά άχρηστο, οπότε παραμένουμε στον ορισμό του a^x μόνο για ακέραιους x.

Ασκήσεις.

4.3.1. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big((1+\frac{1}{n})^8 + 4(1+\frac{1}{n})^5 + 7\big)$, $\big(\exp\frac{1+(-1)^n}{n}\big)$, $\big(\log(1+\frac{1}{n})\big)$, $\big(n\log(1+\frac{1}{n})\big)$, $\big(\exp\frac{3n^4+n-4}{n^4+n^3+4}\big)$, $\big((\frac{n^2+3}{4n^2-3})^{3/2}\big)$, $(\tan\frac{1}{2^n})$, $\big(2^{\log(\cos(1/n))}\big)$.

4.3.2. Αφού δείτε την άσκηση 2.3.32, λύστε με δεύτερο τρόπο την άσκηση 4.2.11.

4.3.3. Λύστε την άσκηση 2.3.41[δ] χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και το αποτέλεσμα της άσκησης 2.3.41[α].

4.3.4. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Έστω ότι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $x' \in [a,b]$ ώστε $|f(x')| \leq \frac{|f(x)|}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = 0$.

4.3.5. [14] Έστω $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ και έστω ότι υπάρχει M ώστε $0 \leq M < 1$ και ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in [a, +\infty)$. Βάσει της άσκησης 4.1.12, η f είναι συνεχής στο $[a, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in [a, +\infty)$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

Αποδείξτε ότι το προηγούμενο ισχύει με οποιοδήποτε από τα $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ στη θέση του $[a, +\infty)$.

4.3.6. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και ακολουθία (x_n) στο A ώστε $\overline{\lim}\, x_n \in A$.
Αν η f είναι αύξουσα στο A και συνεχής στο $\overline{\lim}\, x_n$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, f(x_n) = f(\overline{\lim}\, x_n)$.

Ποιό είναι το ανάλογο συμπέρασμα για το $\underline{\lim}\, x_n$; Ποιά είναι τα ανάλογα συμπεράσματα αν η f είναι φθίνουσα στο A;

4.4 Τα τρία βασικά θεωρήματα.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις τρεις πιο σημαντικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και, μάλιστα, θα δούμε δυο αποδείξεις για καθεμιά από αυτές. Θα παρατηρήσετε ότι και οι τρεις ιδιότητες αναφέρονται σε συναρτήσεις συνεχείς σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΦΡΑΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.*

Πρώτη απόδειξη. [15] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$.
Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in [a, b] \,|\, \text{η } f \text{ είναι φραγμένη στο } [a, x]\}.$$

Προφανώς, $a \in A$ αφού η f είναι φραγμένη στο μονοσύνολο $[a, a]$. Επίσης, ο b είναι άνω φράγμα του A αφού, προφανώς, $A \subseteq [a, b]$. Άρα, αν θέσουμε

$$\xi = \sup A,$$

τότε $\xi \in [a, b]$.
Η f είναι συνεχής στον a, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον a, οπότε υπάρχει $c \in (a, b]$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[a, c]$. Άρα $c \in A$, οπότε $a < c \leq \xi \leq b$, οπότε

$$a < \xi \leq b.$$

Η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ, οπότε υπάρχει $c \in [a, \xi)$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[c, \xi]$. Επίσης, επειδή $\xi = \sup A$, υπάρχει $d \in A$ ώστε $c < d \leq \xi$. Τώρα, η f είναι φραγμένη στο $[a, d]$ και στο $[c, \xi]$, οπότε είναι φραγμένη στο $[a, \xi]$. Άρα

$$\xi \in A.$$

Έστω $\xi < b$. Η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ, οπότε υπάρχει $c \in (\xi, b]$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[\xi, c]$. Τώρα, η f είναι φραγμένη στο $[a, \xi]$ και στο $[\xi, c]$, οπότε είναι φραγμένη στο $[a, c]$ και, επομένως, $c \in A$. Άτοπο, διότι $\xi < c$ και ο ξ είναι άνω φράγμα του A.
Άρα $\xi = b$ και, επομένως, η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

Δεύτερη απόδειξη. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ ώστε

$$|f(x_n)| > n.$$

[14] Μια συνάρτηση $f : A \to A$ χαρακτηρίζεται **γνησίως συστολική** στο A αν υπάρχει M ώστε $0 \leq M < 1$ και ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in A$. Ένας $\xi \in A$ χαρακτηρίζεται **σταθερό σημείο** της f στο A αν $f(\xi) = \xi$. Το αποτέλεσμα της άσκησης ονομάζεται **θεώρημα σταθερού σημείου**. Άλλες παραλλαγές του θεωρήματος σταθερού σημείου είναι στην άσκηση 4.4.10.

[15] Για δυο ακόμη αποδείξεις δείτε τις ασκήσεις 4.4.24 και 4.4.25.

Έτσι προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $|f(x_n)| > n$ για κάθε n και, επομένως,

$$|f(x_n)| \to +\infty. \tag{4.10}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$. Επειδή $\xi \in [a, b]$, η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε από το $x_{n_k} \to \xi$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi)$$

και, επομένως, $|f(x_{n_k})| \to |f(\xi)|$. Όμως, από την (4.10) έχουμε $|f(x_{n_k})| \to +\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Παράδειγμα 4.4.1. Η $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής ούτε φραγμένη στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα 4.4.2. Η $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ασυνεχής και φραγμένη στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα 4.4.3. Η $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο $(0, 1)$.

Παράδειγμα 4.4.4. Η x είναι συνεχής και φραγμένη στο $(-1, 1)$.

Παράδειγμα 4.4.5. Η x είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.4.6. Η $\frac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.4.7. Η $x + \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(0, +\infty)$, διότι είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Όμως, δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1]$ ούτε στο $[1, +\infty)$.

Παράδειγμα 4.4.8. Έστω $0 < a < b$. Τότε υπάρχει u ώστε να ορίζεται η συνάρτηση $\log(u - x - \frac{1}{x})$ στο διάστημα $[a, b]$. Πράγματι, η $x + \frac{1}{x}$ ως συνεχής στο $[a, b]$ είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει u ώστε να ισχύει $x + \frac{1}{x} < u$ για κάθε $x \in [a, b]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Πρώτη απόδειξη. [16] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$.
Σύμφωνα με το θεώρημα φραγμένης συνάρτησης, η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$ είναι φραγμένο.
Θέτουμε

$$u = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}, \tag{4.11}$$

οπότε ο u είναι αριθμός.
Προφανώς, ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι ισχύει $f(x) < u$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε η συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \tfrac{1}{u - f(x)} \tag{4.12}$$

είναι συνεχής και, επομένως, φραγμένη στο $[a, b]$. Δηλαδή, υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$g(x) \leq M \tag{4.13}$$

[16] Μια κοινή απόδειξη των θεωρημάτων φραγμένης συνάρτησης και μέγιστης - ελάχιστης τιμής υπάρχει στην άσκηση 4.4.25.

για κάθε $x \in [a,b]$. Από τις (4.12) και (4.13) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) \le u - \tfrac{1}{M}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα ο $u - \frac{1}{M}$ είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, x \in [a,b]\}$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο λόγω της (4.11).
Άρα υπάρχει $\eta \in [a,b]$ ώστε $f(\eta) = u$, οπότε ισχύει $f(x) \le f(\eta)$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Με τον ίδιο τρόπο, από το infimum του $\{f(x) \,|\, a \le x \le b\}$, προκύπτει η ύπαρξη ενός ζ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \le f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Δεύτερη απόδειξη. Αρχίζουμε όπως και στην πρώτη απόδειξη με τον $u = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a,b]\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $u - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, a \le x \le b\}$, οπότε υπάρχει $x_n \in [a,b]$ ώστε

$$u - \tfrac{1}{n} < f(x_n).$$

Ο u είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, a \le x \le b\}$, οπότε

$$u - \tfrac{1}{n} < f(x_n) \le u.$$

Άρα προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $u - \frac{1}{n} < f(x_n) \le u$ για κάθε n, οπότε

$$f(x_n) \to u. \tag{4.14}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \eta.$$

Επειδή ισχύει $a \le x_{n_k} \le b$ για κάθε k, συνεπάγεται $a \le \eta \le b$, οπότε η f είναι συνεχής στον η. Από το $x_{n_k} \to \eta$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to f(\eta).$$

Λόγω της (4.14) συνεπάγεται $f(x_{n_k}) \to u$ και, επομένως,

$$f(\eta) = u,$$

οπότε ισχύει $f(x) \le f(\eta)$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Με τον ίδιο τρόπο, από το infimum του $\{f(x) \,|\, a \le x \le b\}$, προκύπτει ο ζ. □

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι ζ, η στο θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής μπορεί να μην είναι μοναδικοί. Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ζ στους οποίους η f έχει την ελάχιστη τιμή της και περισσότεροι από ένας η στους οποίους η f έχει την μέγιστη τιμή της. Επίσης, το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης των ζ, η στους οποίους η f έχει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της ούτε τρόπο εύρεσης της ελάχιστης και μέγιστης τιμής της. Για τέτοιους υπολογισμούς θα δούμε διάφορες μεθόδους στο κεφάλαιο 5.

Παράδειγμα 4.4.9. Η $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ x-1, & \text{αν } 0 < x \le 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή. Είναι, όμως, φραγμένη στο $[-1,1]$.

Παράδειγμα 4.4.10. Η $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 1, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$ αλλά έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 4.4.11. Η x είναι συνεχής (και φραγμένη) στό $(-1,1)$ αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στό $(-1,1)$.

Παράδειγμα 4.4.12. Η $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } -2 < x < -1 \\ -x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ x-2, & \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $(-2,2)$ και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 4.4.13. Η $\frac{x|x|}{x^2+1}$ είναι συνεχής (και φραγμένη) στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 4.4.14. Η $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } |x| > 1 \\ x, & \text{αν } |x| \leq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 4.4.15. Ας δούμε πάλι το παράδειγμα 4.4.8. Δεν υπάρχει κάποιος *ελάχιστος* u ώστε να ορίζεται η συνάρτηση $\log(u - x - \frac{1}{x})$ στο διάστημα $[a,b]$. Πράγματι, επειδή η $x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, υπάρχει $\eta \in [a,b]$ ώστε να ισχύει $x + \frac{1}{x} \leq \eta + \frac{1}{\eta}$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα ως u μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε αριθμό μεγαλύτερο του $\eta + \frac{1}{\eta}$ αλλά όχι τον $\eta + \frac{1}{\eta}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.*

Πρώτη απόδειξη. [17] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$.
Θεωρούμε το σύνολο
$$A = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \leq \lambda\}.$$
Το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, αφού $a \in A$ και $A \subseteq [a,b]$. Θέτουμε
$$\xi = \sup A,$$
οπότε $\xi \in [a,b]$ και $A \subseteq [a,\xi]$.
Έστω $f(\xi) > \lambda$. Τότε, προφανώς, $\xi \in (a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $c \in [a,\xi)$ ώστε να ισχύει $f(x) > \lambda$ για κάθε $x \in (c,\xi]$. Συνεπάγεται $A \subseteq [a,c]$. Άτοπο, διότι $c < \xi$ και $\xi = \sup A$. Άρα $f(\xi) \leq \lambda$.
Έστω $f(\xi) < \lambda$. Τότε, προφανώς, $\xi \in [a,b)$. Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $c \in (\xi,b]$ ώστε να ισχύει $f(x) < \lambda$ για κάθε $x \in [\xi,c)$. Άρα $[\xi,c) \subseteq A$. Άτοπο διότι $A \subseteq [a,\xi]$. Άρα $f(\xi) \geq \lambda$.
Από τις $f(\xi) \leq \lambda$ και $f(\xi) \geq \lambda$ συνεπάγεται $f(\xi) = \lambda$.
Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.[18]
Η απόδειξη είναι όμοια στην περίπτωση $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$.

Δεύτερη απόδειξη. Έστω $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$.
Θεωρούμε τα ισομήκη διαστήματα $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ και παρατηρούμε ότι είτε $f(a) \leq \lambda \leq f(\frac{a+b}{2})$ είτε $f(\frac{a+b}{2}) \leq \lambda \leq f(b)$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζουμε $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $[a_1,b_1] \subseteq [a,b]$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ και $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$.
Κατόπιν, θεωρούμε τα ισομήκη διαστήματα $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ και είναι είτε $f(a_1) \leq \lambda \leq f(\frac{a_1+b_1}{2})$ είτε $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \leq \lambda \leq f(b_1)$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζουμε $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $[a_2,b_2] \subseteq [a_1,b_1]$, $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2}$ και $f(a_2) \leq \lambda \leq f(b_2)$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.
Δημιουργούμε έτσι διαδοχικά διαστήματα $[a_n,b_n]$ για κάθε n ώστε να ισχύει
$$[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n], \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \tfrac{b_n-a_n}{2}, \qquad f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n) \tag{4.15}$$

[17] Για μια ακόμη απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής δείτε την άσκηση 4.6.13.

[18] Παρατηρήστε ότι, με τον παραπάνω τρόπο, αποδείχθηκε η ύπαρξη του *μέγιστου* ξ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Θεωρώντας το σύνολο $A = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \geq \lambda\}$ και το $\xi = \inf A$, αποδεικνύουμε την ύπαρξη του *ελάχιστου* ξ ώστε $f(\xi) = \lambda$.

για κάθε n.
Από τη δεύτερη σχέση (4.15) συνεπάγεται ότι ισχύει $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ για κάθε n και, επομένως,

$$b_n - a_n \to 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση για τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Έστω

$$a_n \to \xi, \qquad b_n \to \xi.$$

Επειδή $a_n, b_n \in [a, b]$ για κάθε n, συνεπάγεται $\xi \in [a, b]$, οπότε η f είναι συνεχής στον ξ. Άρα

$$f(a_n) \to f(\xi), \qquad f(b_n) \to f(\xi)$$

και, βάσει της τρίτης σχέσης (4.15) συνεπάγεται $f(\xi) = \lambda$.
Αν $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Παρατηρήστε τα εξής σε σχέση με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Αν $f(a) = f(b)$, τότε, αναγκαστικά, $\lambda = f(a) = f(b)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δυο προφανείς λύσεις: τους a, b. Επίσης, αν $f(a) \neq f(b)$ και $\lambda = f(a)$ ή $\lambda = f(b)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια προφανή λύση: τον a ή τον b, αντιστοίχως. Άρα μόνο αν υποθέσουμε ότι $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$ το συμπέρασμα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής αποκτά ενδιαφέρον. Φυσικά, τότε οι a, b δεν είναι λύσεις της $f(x) = \lambda$, οπότε το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Άρα έχουμε και την εξής ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής:
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.

Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δεν υποδεικνύει *πώς* υπολογίζουμε τον ξ. Επίσης, ο ξ μπορεί να μην είναι μοναδικός: μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ξ στους οποίους η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή λ.

Παράδειγμα 4.4.16. Η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Κανένας λ στο διάστημα $(f(0), f(1)) = (0, 1)$ δεν είναι τιμή της f.

Παράδειγμα 4.4.17. Η $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < 1/2 \\ x - (1/2), & \text{αν } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$, αλλά κάθε λ στο διάστημα $(f(0), f(1)) = (0, \frac{1}{2})$ είναι τιμή της f.

Τώρα θα δούμε τρεις τυπικές εφαρμογές του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

Παράδειγμα 4.4.18. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $3x^7 - 1 = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[0, 1]$.
Η συνάρτηση $3x^7 - 1 - x$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Είναι $3 \cdot 0^7 - 1 - 0 = -1$ και $3 \cdot 1^7 - 1 - 1 = 1$ και $-1 < 0 < 1$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi \in (0, 1)$ ώστε $3\xi^7 - 1 - \xi = 0$.

Παράδειγμα 4.4.19. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 5x^2 - 18x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση, χωρίς να μας ενδιαφέρει να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα.
Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 - 18x + 7$. Βρίσκουμε μόνοι μας a, b ώστε $a < b$ και ο 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a), f(b)$. Δοκιμάζουμε λίγο - πολύ στην τύχη: $f(0) = 7$, $f(1) = -15$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.
Μάλιστα, δεν είναι ανάγκη ούτε καν να θεωρήσουμε συγκεκριμένο διάστημα. Αυτό γίνεται (τώρα *όχι στην τύχη*) ως εξής. Επειδή $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος αρνητικός a (δεν είναι ανάγκη να βρούμε συγκεκριμένη τιμή) ώστε $f(a) < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος θετικός b ώστε $f(b) > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

Παράδειγμα 4.4.20. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $y > 0$.
Επειδή $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, υπάρχει $b > 0$ ώστε $b^n > y$. Αλλά και χωρίς αναφορά στο όριο, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε $b > \max\{y, 1\}$ και τότε είναι $b > 1$ και $b > y$ και, επομένως, $b^n > b > y$.
Η συνάρτηση x^n είναι συνεχής στο διάστημα $[0, b]$ και είναι $0^n < y < b^n$. Άρα υπάρχει $x \in (0, b)$ ώστε $x^n = y$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, με δεύτερο τρόπο το ουσιαστικό μέρος του θεωρήματος 1.2:
Για κάθε $y > 0$ υπάρχει $x > 0$ ώστε $x^n = y$.
Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης της εξίσωσης $x^n = y$ είναι απλή και γίνεται όπως στην αρχική απόδειξη του θεωρήματος 1.2 και η περίπτωση $y = 0$ είναι στοιχειώδης.

Ιδού, τέλος, δυο πορίσματα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$.
Τότε $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ή (b, a) και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = 0$. Άτοπο.
Άρα είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$. □

Αποδείξαμε το θεώρημα του Bolzano βάσει του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε και το αντίστροφο.
Πράγματι, έστω ότι ισχύει το θεώρημα του Bolzano και έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και λ με την ιδιότητα $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$.
Αν $\lambda = f(a)$ ή $\lambda = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$: ο a ή ο b, αντιστοίχως. Έστω, λοιπόν, $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x) - \lambda$ για κάθε $x \in [a, b]$. Η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και είναι $g(a)g(b) < 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $g(\xi) = 0$ και, επομένως, $f(\xi) = \lambda$.
Άρα αποδείξαμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.
Επομένως, *το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα του Bolzano είναι ισοδύναμα.*[19]

Τώρα, μπορούμε να κάνουμε την εξής απλή και χρήσιμη γενίκευση του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής:
Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν κάποιος λ είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της f, τότε και ο λ είναι τιμή της f.
Πράγματι, έστω $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ για κάποιους $a, b \in I$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ή $[b, a]$ και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = \lambda$ και έτσι ο λ είναι τιμή της f.

Ασκήσεις.

4.4.1. Έχει η συνάρτηση $x^2 - x + 1$ μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, 1)$;

[19] Μπορεί, επίσης, να αποδειχτεί ότι *το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα σταθερού προσήμου.* Δείτε την άσκηση 4.4.21.

4.4.2. Αποδείξτε ότι η $\sin\frac{1}{x}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0,+\infty)$ και ότι παίρνει και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε άπειρα σημεία του $(0,+\infty)$. Ποιά είναι αυτά τα σημεία;

Αποδείξτε ότι οι $x\sin x$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες στο $(0,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $\frac{1}{1+x}\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0,+\infty)$.

4.4.3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^7-3x^6+5x^5+13x^4-x^3-12x^2-5x+1=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[0,1]$.

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{x-3}=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$.

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x=x+2$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις.

4.4.4. Έστω $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n$. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=2(x-a_1)\cdots(x-a_n)+3(x-b_1)\cdots(x-b_n)$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες.

4.4.5. Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_1,\dots,x_n\in I$ υπάρχει $\xi\in I$ ώστε $f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

4.4.6. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)=f(1)$. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ με $k\geq 2$ αποδείξτε ότι υπάρχει $x\in[0,\frac{k-1}{k})$ ώστε $f(x)=f(x+\frac{1}{k})$.

4.4.7. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho>0$ ώστε να ισχύει $f(x)\geq g(x)+\rho$ για κάθε $x\in[a,b]$.

4.4.8. Θεωρώντας τη συνεχή συνάρτηση $|f|:[a,b]\to\mathbb{R}$, δώστε δεύτερη λύση της άσκησης 4.3.4.

4.4.9. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο (a,b) και έστω ότι ισχύει $f(x)\in\mathbb{Q}$ για κάθε $x\in(a,b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο (a,b).

4.4.10. [α] Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $f(a)\leq g(a)$ και $f(b)\geq g(b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

[β][20] Αποδείξτε ότι, αν η $f:[a,b]\to[a,b]$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=\xi$.

[γ] Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν δεν ισχύει $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ούτε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $f(\xi)=\xi$.

4.4.11. Έστω διάστημα I και $f,g:I\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο I ώστε να ισχύει $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\in I$.

Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in I$.

Έστω και $h:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν ισχύει $h(x)=f(x)$ ή $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x)=f(x)$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in I$.

4.4.12. [α] Έστω διάστημα I και $f,g:I\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Αν ισχύει $g(x)^2=f(x)^2>0$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι είτε ισχύει $g(x)=f(x)$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $g(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in I$.

[β] Έστω διάστημα $I\subseteq[0,+\infty)$ ή $I\subseteq(-\infty,0]$ και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $f(x)^2=x^2$ για κάθε $x\in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x)=x$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $f(x)=-x$ για κάθε $x\in I$.

Πόσες συνεχείς $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχουν ώστε να ισχύει $f(x)^2=x^2$ για κάθε x;

[γ] Έστω διάστημα $I\subseteq[-1,1]$ και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $x^2+f(x)^2=1$ για κάθε $x\in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x\in I$.

[20] Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 2.4.16[α]. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μια ακόμη παραλλαγή του θεωρήματος σταθερού σημείου. Μια άλλη παραλλαγή είναι στην άσκηση 4.3.5. Δείτε την υποσημείωση της άσκησης αυτής.

4.4.13. [21] [α] Έστω διάστημα I και $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Έστω ότι οι $f_1, \ldots, f_n$ σε κάθε $x \in I$ έχουν n *διαφορετικές* τιμές. Τί συμπεραίνετε σχετικά με τη διάταξη μεγέθους αυτών των συναρτήσεων;

Έστω, επιπλέον, ότι η $h : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι σε κάθε $x \in I$ η τιμή της είναι ίση με την τιμή (στον ίδιο x) μιας από τις n αρχικές συναρτήσεις ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει $(h(x) - f_1(x)) \cdots (h(x) - f_n(x)) = 0$ για κάθε $x \in I$. Τί συμπεραίνετε για τη σχέση της h με τις $f_1, \ldots, f_n$;

[β] Έστω διάστημα $I \subseteq [1, +\infty)$ ή $I \subseteq [0, 1]$ και $h : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $(h(x) - x)(h(x) - x^2)(h(x) - x^3) = 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = x$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = x^2$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = x^3$ για κάθε $x \in I$.

Αν $I = [0, +\infty)$, τότε - με τις ίδιες κατά τα άλλα υποθέσεις - ποιές είναι οι δυνατότητες για την h;

4.4.14. [22] Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b). Αποδείξτε ότι, αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to b} f(x)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) > \lim_{x\to a} f(x)$ και $f(x_0) > \lim_{x\to b} f(x)$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b).

Διατυπώστε τα προηγούμενα ώστε να προκύπτει ελάχιστη τιμή της f στο (a, b).

4.4.15. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι για κάθε $x \in I$, όχι δεξιό άκρο του I, και $\delta > 0$ υπάρχει $x' \in (x, x + \delta) \cap I$ ώστε $f(x) \leq f(x')$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.

Να αντιπαραβάλετε με το παράδειγμα της $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ καθώς και με την άσκηση 2.4.16[β].

4.4.16. [23] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ο x χαρακτηρίζεται *σημείο σκιάς* της f αν υπάρχει $x' > x$ ώστε $f(x') > f(x)$.[24] Έστω ότι κάθε $x \in (a, b)$ είναι σημείο σκιάς της f ενώ οι a, b δεν είναι σημεία σκιάς της f. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < f(b)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και ότι $f(a) = f(b)$.

4.4.17. Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη στο $(a + \infty)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $b > 0$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $(a, +\infty)$ ώστε $x_n \to +\infty$ και $f(x_n + b) - f(x_n) \to 0$.

4.4.18. Έστω $f, g : [a, b] \to [a, b]$ συνεχείς στο $[a, b]$. Έστω ότι η g είναι αύξουσα και $f \circ g = g \circ f$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi) = \xi$.[25]

4.4.19. [26] Αποδείξτε ότι, αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ένα-προς-ένα στο διάστημα I, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

Θεωρήστε την $f : [0, 1] \to [0, 1]$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x, & \text{αν } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα, ότι είναι συνεχής μόνο στον $\frac{1}{2}$ και ότι δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0, 1]$.

---

[21] Γενίκευση της άσκησης 4.4.11. Το θέμα αυτής της άσκησης έχει σχέση με τις *αλγεβρικές συναρτήσεις* που θα οριστούν στο τέλος της ενότητας 7.3. Δείτε και τις ασκήσεις 4.5.9, 4.5.10 και 4.5.11.

[22] Μια χρήσιμη επέκταση του θεωρήματος μέγιστης - ελάχιστης τιμής. Συμπλήρωμα αυτής της άσκησης αποτελεί η άσκηση 4.5.12 και οι δυο ασκήσεις γενικεύουν την πρόταση 4.13 η οποία αναφέρεται σε πολυωνυμικές συναρτήσεις άρτιου βαθμού.

[23] Το περιεχόμενο αυτής της άσκησης αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου**. Δείτε και την άσκηση 2.5.9.

[24] Ο $f(x)$ είναι πιο χαμηλά και, επομένως, στη σκιά του $f(x')$ όταν ο ήλιος ανατέλλει από το $+\infty$.

[25] Σύμφωνα με την ορολογία στις υποσημειώσεις των ασκήσεων 4.3.5 και 4.4.10, οι f, g έχουν κοινό σταθερό σημείο.

[26] Μια σημαντική άσκηση. Γνωρίζουμε ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Υπό την προϋπόθεση της συνέχειας, ισχύει και το αντίστροφο.

4.4.20. Έστω διάστημα I (όχι μονοσύνολο) και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είτε έχει ακριβώς δυο λύσεις είτε δεν έχει καμιά λύση. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο I. Μπορείτε, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις $I = [a, b)$, $I = (a, b)$, $I = [a, b]$ να βρείτε μια συνάρτηση f με τις παραπάνω ιδιότητες;

4.4.21. Αποδείξτε ότι η ιδιότητα σταθερού προσήμου είναι ισοδύναμη με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

4.4.22. Έστω μη-κενό σύνολο A το οποίο *δεν* είναι διάστημα. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.4, αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in A$ με $a < b$ και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A και λ με $f(a) < \lambda < f(b)$ ώστε να μην υπάρχει $\xi \in A$ με $f(\xi) = \lambda$. Με άλλα λόγια: κάθε $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο A αν και μόνο αν το A είναι διάστημα.

4.4.23. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$ για την οποία ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, δηλαδή ότι για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.

4.4.24. [27] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$.
Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Τότε η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, \frac{a+b}{2}]$ ή στο $[\frac{a+b}{2}, b]$. Έστω $[a_1, b_1]$ ένα από τα δυο υποδιαστήματα στο οποίο η f δεν είναι φραγμένη. Συνεχίστε επ' άπειρον, δημιουργώντας διαδοχικά διαστήματα $[a_n, b_n]$ για κάθε n ώστε να ισχύει $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ και η f να μην είναι φραγμένη στο $[a_n, b_n]$. Συμπεράνατε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $a_n \to \xi$ και $b_n \to \xi$ και η f να είναι φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι υπάρχει n_0 ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ και καταλήξτε σε άτοπο. Συμπεράνατε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

4.4.25. [28] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$.
Έστω $u = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$, όπου $u \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει (x_n) στο $[a, b]$ ώστε $f(x_n) \to u$. Συμπεράνατε ότι υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Έστω $x_{n_k} \to \eta$. Αποδείξτε ότι $f(x_{n_k}) \to f(\eta)$ και $f(\eta) = u$. Συμπεράνατε ότι ο u είναι η μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$.

4.5 Σύνολο τιμών. Αντίστροφη συνάρτηση.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f αφού κάτι τέτοιο μας δίνει τη δυνατότητα να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως, για παράδειγμα, αν για συγκεκριμένο λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει λύση ή όχι.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.11. *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα, τότε το σύνολο τιμών της είναι κι αυτό διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I.
Έστω $A = \{f(x) \,|\, x \in I\}$ το σύνολο τιμών της f και έστω $y_1, y_2 \in A$ και $y_1 < y < y_2$. Τότε ο y είναι ανάμεσα στις τιμές y_1 και y_2 της f, οπότε και ο y είναι τιμή της f, δηλαδή $y \in A$. Σύμφωνα με την πρόταση 1.4, το A είναι διάστημα. □

Ας δούμε λίγο πιο προσεκτικά την πρόταση 4.11 σε συνδυασμό και με την πρόταση 1.4. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και

$$l = \inf\{f(x) \,|\, x \in I\} \qquad u = \sup\{f(x) \,|\, x \in I\}.$$

[27] Τρίτη απόδειξη του θεωρήματος φραγμένης συνάρτησης.
[28] Ταυτόχρονη απόδειξη των θεωρημάτων φραγμένης συνάρτησης και μέγιστης - ελάχιστης τιμής.

Από την πρόταση 4.11 συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών $\{f(x)\,|\,x \in I\}$ είναι διάστημα και, σύμφωνα με την πρόταση 1.4, τα άκρα του είναι τα στοιχεία l, u του $\overline{\mathbb{R}}$. Δηλαδή,

$$\{f(x)\,|\,x \in I\} = (l,u) \text{ ή } [l,u] \text{ ή } (l,u] \text{ ή } [l,u).$$

Τώρα έχουμε τις εξής τέσσερις ανάλογες περιπτώσεις.

(i) Η f έχει ελάχιστη τιμή (δηλαδή ελάχιστο στοιχείο του συνόλου τιμών) και μέγιστη τιμή (δηλαδή μέγιστο στοιχείο του συνόλου τιμών), οπότε ο l είναι η ελάχιστη τιμή και ο u η μέγιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $[l,u]$.

(ii) Η f δεν έχει ελάχιστη τιμή ούτε μέγιστη τιμή, οπότε το σύνολο τιμών είναι ίσο με το (l,u).

(iii) Η f έχει ελάχιστη τιμή αλλά όχι μέγιστη τιμή, οπότε ο l είναι η ελάχιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $[l,u)$.

(iv) Η f έχει μέγιστη τιμή αλλά όχι ελάχιστη τιμή, οπότε ο u είναι η μέγιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $(l,u]$.

Με άλλα λόγια, *όταν έχουμε να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε διάστημα πρέπει μόνο να βρούμε το infimum και το supremum του συνόλου τιμών και να δούμε αν κανένα ή το ένα ή και τα δύο από αυτά είναι τιμή της συνάρτησης.*

Μπορεί να δοθεί πιο λεπτομερής περιγραφή του συνόλου τιμών συνάρτησης συνεχούς σε διάστημα οποιουδήποτε τύπου. Δείτε σχετικά την άσκηση 4.5.13. Στα επόμενα θα δούμε μερικές χρήσιμες χαρακτηριστικές περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα του προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης έχει απλή - τουλάχιστον θεωρητικά - λύση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε το σύνολο τιμών $\{f(x)\,|\,x \in [a,b]\}$ είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο I.*

Απόδειξη. Συνέπεια της πρότασης 4.11 και του θεωρήματος μέγιστης - ελάχιστης τιμής. $\square$

Άρα για να βρούμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι αρκετό να υπολογίσουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό. Στο κεφάλαιο 5 θα γνωρίσουμε, με τη βοήθεια των παραγώγων, μερικές μεθόδους υπολογισμού αυτών των τιμών της συνάρτησης. Πάντως, σε μερικές απλές περιπτώσεις οι υπολογισμοί αυτοί είναι και τώρα εφικτοί.

Παράδειγμα 4.5.1. Η συνάρτηση x^2 είναι αύξουσα στο διάστημα $[1,4]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο $[1,4]$ είναι ο $1^2 = 1$ και η μέγιστη τιμή της ο $4^2 = 16$. Άρα το σύνολο τιμών της x^2 που αντιστοιχεί στο $[1,4]$ είναι το διάστημα $[1,16]$.

Παράδειγμα 4.5.2. Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{1}{2},3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο $[\frac{1}{2},3]$ είναι ο $\frac{1}{3}$ και η μέγιστη τιμή της ο 2. Άρα το σύνολο τιμών της $\frac{1}{x}$ που αντιστοιχεί στο $[\frac{1}{2},3]$ είναι το διάστημα $[\frac{1}{3},2]$.

Παράδειγμα 4.5.3. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$ στο διάστημα $[-1,6]$. Η f είναι φθίνουσα στο $[-1,3]$ και αύξουσα στο $[3,6]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[-1,6]$ είναι ο $f(3) = -4$ και η μέγιστη τιμή της ο $\max\{f(-1), f(6)\} = 12$. Άρα το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $[-1,6]$ είναι το διάστημα $[-4,12]$.

Θα δούμε, τώρα, τη σημαντική περίπτωση υπολογισμού του συνόλου τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.13. [29] *Έστω η συνάρτηση $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.*

[α] *Έστω ότι η P είναι περιττού βαθμού, δηλαδή $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Τότε το σύνολο τιμών της P είναι το $(-\infty, +\infty)$.*

[β] *Έστω ότι η P είναι άρτιου βαθμού, δηλαδή $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Αν $a_n > 0$, τότε η P έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, και το σύνολο τιμών της είναι το $[l, +\infty)$. Αν $a_n < 0$, τότε η P έχει μέγιστη τιμή, έστω u, και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, u]$.*

[29] Για μια άμεση γενίκευση αυτής της πρότασης δείτε την άσκηση 4.5.12.

Απόδειξη. [α] Έστω $a_n > 0$, οπότε $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Άρα η P δεν είναι κάτω φραγμένη ούτε άνω φραγμένη, οπότε το σύνολο τιμών της έχει ως infimum το $-\infty$ και ως supremum το $+\infty$. Σύμφωνα με την πρόταση 4.11, το σύνολο τιμών της P είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Αν $a_n < 0$, τότε $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ και η απόδειξη είναι ίδια.
[β] Έστω $a_n > 0$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν a, b ώστε $a < 0 < b$ και ώστε να ισχύει

$$P(0) < P(x) \qquad \text{για } \; x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty). \tag{4.16}$$

Τώρα, η P είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, στο διάστημα αυτό. Δηλαδή,

$$l \leq P(x) \qquad \text{για } \; x \in [a, b]. \tag{4.17}$$

Επειδή $0 \in [a, b]$, είναι $l \leq P(0)$, οπότε, λόγω της (4.16), ισχύει

$$l < P(x) \qquad \text{για } \; x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty). \tag{4.18}$$

Τώρα από τις (4.17) και (4.18) συνεπάγεται ότι ο l είναι η ελάχιστη τιμή της P στο $\mathbb{R}$.
Επίσης, πάλι από τα όρια $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ συνεπάγεται ότι η P δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα το σύνολο τιμών της P έχει ως ελάχιστο στοιχείο τον l και ως supremum το $+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της P είναι το $[l, +\infty)$.
Αν $a_n < 0$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα 4.5.4. Το σύνολο τιμών της $-2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 - 1$ είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 4.5.5. Έστω η $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7 = x^2(x-2)^2 - 7$. Προφανώς, ισχύει $P(x) \geq -7$ για κάθε x και $-7 = P(0) = P(2)$. Άρα ο -7 είναι η ελάχιστη τιμή της P και το σύνολο τιμών της είναι το $[-7, +\infty)$.

Τώρα θα εξετάσουμε τη σημαντική ειδική περίπτωση που η συνάρτηση εκτός από συνεχής είναι *και γνησίως μονότονη* σε διάστημα.[30] Πριν διατυπώσουμε την πρόταση 4.14 ας θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με το θεώρημα 3.2, αν μια συνάρτηση είναι μονότονη σε διάστημα, τότε υπάρχουν τα (πλευρικά, μέσα από το διάστημα) όριά της στα άκρα του διαστήματος.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Ειδικώτερα, αν η $f : I \to J$ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα I με σύνολο τιμών ένα διάστημα J, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ με πεδίο ορισμού το J και σύνολο τιμών το I. Μάλιστα, αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε η f^{-1} είναι, αντιστοίχως, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Το επιπλέον στοιχείο, το οποίο εισάγεται στην πρόταση 4.14, είναι η *συνέχεια* της f και της f^{-1}.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.14. [α] *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$. Επίσης, η $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$.*
[β] *Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, b). Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το (A, B), όπου $A = \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $B = \lim_{x\to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Επίσης, η $f^{-1} : (A, B) \to (a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (A, B).*
[γ] *Έστω $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(A, B]$, όπου $A = \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $B = f(b)$. Επίσης, η $f^{-1} : (A, B] \to (a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(A, B]$.*
[δ] *Έστω $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b)$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B)$, όπου $A = f(a)$, $B = \lim_{x\to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Επίσης, η $f^{-1} : [A, B) \to$*

[30] Οι μέθοδοι του κεφαλαίου 5 επιτρέπουν να χωρίζουμε τα πεδία ορισμού των περισσότερων συναρτήσεων που εμφανίζονται στην πράξη σε διαστήματα στα οποία αυτές είναι γνησίως μονότονες.

$[a,b)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B)$.

Τα συμπεράσματα των [α] - [δ] *ισχύουν και στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα A, B αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση* [α] *πρέπει να είναι $[B,A]$ αντί $[A,B]$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς θα ασχοληθούμε με τη *μορφή* του συνόλου τιμών της f στις διάφορες περιπτώσεις. *Η βάση μας είναι η πρόταση 4.11 και το θεώρημα 3.2.*

[α] Σύμφωνα με την πρόταση 4.12 ή ακόμη και με την πρόταση 4.11, το σύνολο τιμών της f είναι το $[A,B]$, όπου $A=f(a)$, $B=f(b)$, οπότε η $f^{-1}:[A,B]\to[a,b]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[A,B]$ με σύνολο τιμών το $[a,b]$.

[β] Από το θεώρημα 3.2 και τα σχόλια μετά από αυτό γνωρίζουμε ότι το infimum και το supremum του συνόλου τιμών της f είναι τα όρια $A=\lim_{x\to a}f(x)$ και $B=\lim_{x\to b}f(x)$, αντιστοίχως, και ότι ισχύει $A<f(x)<B$ για κάθε $x\in(a,b)$. Άρα, βάσει της πρότασης 4.11 (και της συζήτησης μετά από αυτήν), το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το διάστημα (A,B), οπότε η $f^{-1}:(A,B)\to(a,b)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (A,B) με σύνολο τιμών το (a,b).

[γ] Τώρα το infimum του συνόλου τιμών της f είναι το όριο $A=\lim_{x\to a}f(x)$ και ισχύει $A<f(x)$ για κάθε $x\in(a,b]$. Η τιμή $B=f(b)$ είναι το μέγιστο στοιχείο του συνόλου τιμών. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το διάστημα $(A,B]$, οπότε η $f^{-1}:(A,B]\to(a,b]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(A,B]$ με σύνολο τιμών το $(a,b]$.

[δ] Το supremum του συνόλου τιμών της f είναι το όριο $B=\lim_{x\to b}f(x)$ και ισχύει $f(x)<B$ για κάθε $x\in[a,b)$. Η τιμή $A=f(a)$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου τιμών. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το διάστημα $[A,B)$, οπότε η $f^{-1}:[A,B)\to[a,b)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[A,B)$ με σύνολο τιμών το $[a,b)$.

Τέλος, οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι προφανείς.

Και τώρα ερχόμαστε στην απόδειξη της συνέχειας της αντίστροφης συνάρτησης.
Σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις η $f^{-1}:J\to I$ είναι γνησίως μονότονη σε ένα *διάστημα* J και το σύνολο τιμών της είναι ένα *διάστημα* I. Ας υποθέσουμε ότι η f^{-1} *δεν* είναι συνεχής σε κάποιο $\eta\in J$. Επειδή το J είναι διάστημα, το η είναι τουλάχιστον από αριστερά του ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του J. Η f^{-1} είναι μονότονη, οπότε, σύμφωνα με την συζήτηση μετά από την πρόταση 4.1, ανάμεσα στις τιμές της f^{-1} παρεμβάλλεται τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα το οποίο δεν περιέχει καμιά τιμή της f^{-1}. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι *ολόκληρο* το διάστημα I. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta\in J$. □

Παράδειγμα 4.5.6. Έστω $f:(1,3)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2x^2+1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1,3)$ και $\lim_{x\to1}f(x)=3$, $\lim_{x\to3}f(x)=19$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(3,19)$. Η $f^{-1}:(3,19)\to(1,3)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(3,19)$. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(3,19)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα $\lim_{y\to3}f^{-1}(y)$ και $\lim_{y\to19}f^{-1}(y)$. Όμως το σύνολο τιμών της είναι το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή το $(1,3)$. Άρα $\lim_{y\to3}f^{-1}(y)=1$ και $\lim_{y\to19}f^{-1}(y)=3$.
Είναι εύκολο να βρούμε τον τύπο της f^{-1}. Αυτός είναι: $f^{-1}(y)=\sqrt{(y-1)/2}$. Από τον τύπο της f^{-1} επιβεβαιώνεται η συνέχειά της καθώς και τα δυο όριά της στον 3 και στον 19.

Παράδειγμα 4.5.7. Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$ και $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(1,+\infty)$. Η $f^{-1}:(1,+\infty)\to(1,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα $\lim_{y\to+\infty}f^{-1}(y)$ και $\lim_{y\to1}f^{-1}(y)$. Επειδή το σύνολο τιμών της είναι το $(1,+\infty)$, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty}f^{-1}(y)=1$ και $\lim_{y\to1}f^{-1}(y)=+\infty$.
Ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(y)=\frac{y+1}{y-1}$. Άρα επιβεβαιώνεται η συνέχεια της f^{-1} και τα δυο όριά της στον 1 και στο $+\infty$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ο υπολογισμός του τύπου της f^{-1} είναι απλός. Από τον τύπο της f^{-1} προκύπτει αμέσως ότι αυτή είναι συνεχής. Όμως, η συνέχεια της f^{-1} προκύπτει και από την πρόταση 4.14 και αυτό είναι χρήσιμο σε περιπτώσεις που δεν μπορεί να υπολογιστεί ο τύπος της f^{-1}.

Παράδειγμα 4.5.8. Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^5+x^3+x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (το γνωρίζαμε, διότι η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού). Άρα η $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $\mathbb{R}$. Επίσης, από το σύνολο τιμών της f^{-1} υπολογίζουμε τα όρια $\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y)=-\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y)=+\infty$.
Μπορείτε να δείτε ότι δεν είναι εύκολο να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}.

Παράδειγμα 4.5.9. Η $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=-xe^x+1$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$. Είναι $f(0)=1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,1]$ και η $f^{-1}:(-\infty,1]\to[0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και *συνεχής* στο $(-\infty,1]$. Τέλος, από το σύνολο τιμών της f^{-1} υπολογίζουμε το όριο $\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y)=+\infty$.
Είναι αδύνατο να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}, αφού δεν υπάρχει τύπος για τη λύση x της $-xe^x+1=y$.

Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα με μερικά πιο σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.5.10. Έστω $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Στο θεώρημα 1.2 αλλά και στο παράδειγμα 4.4.20 αποδείξαμε ότι για κάθε $y\in[0,+\infty)$ η εξίσωση $x^n=y$ έχει μοναδική λύση στο $[0,+\infty)$. Ήδη από την ενότητα 1.4, την λύση αυτή την έχουμε συμβολίσει $\sqrt[n]{y}$ και την έχουμε ονομάσει n-οστή ρίζα του y. Επίσης, έχουμε ήδη αποδείξει τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης $x=\sqrt[n]{y}$, συμπεριλαμβανομένης της συνέχειάς της στο πεδίο ορισμού της $[0,+\infty)$.
Τώρα θα δούμε έναν δεύτερο τρόπο προσέγγισης βασισμένο στην πρόταση 4.14.
Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $y=x^n$ *περιορισμένη στο* $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ότι $0^n=0$ και $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$. Από την πρόταση 4.14 συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[0,+\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε $x=\sqrt[n]{y}$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $[0,+\infty)$. Το σύνολο τιμών της $x=\sqrt[n]{y}$ είναι το ίδιο με το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης, δηλαδή με το $[0,+\infty)$.
Από την συνέχεια της $x=\sqrt[n]{y}$ συμπεραίνουμε το (ήδη γνωστό) όριο

$$\lim_{y\to\eta}\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{\eta}\qquad\text{για κάθε }\ \eta\geq 0.$$

Επίσης, επειδή το σύνολο τιμών της $x=\sqrt[n]{y}$ είναι το $[0,+\infty)$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, πάλι από την πρόταση 4.14 συνεπάγεται

$$\lim_{y\to+\infty}\sqrt[n]{y}=+\infty.$$

Παράδειγμα 4.5.11. Έστω $a>1$. Γνωρίζουμε ότι η εκθετική συνάρτηση $y=a^x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$ και ότι $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$ και $\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, οπότε βάσει της πρότασης 4.14 το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.
Τώρα, επίσης γνωρίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή την $x=\log_a y$, και τις βασικές της ιδιότητες, όπως ότι είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ότι έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$.
Τώρα θα δούμε πώς μπορούμε να εισαγάγουμε την λογαριθμική συνάρτηση και να αποδείξουμε αυτές τις ιδιότητες με τη βοήθεια της πρότασης 4.14.
Από τις πιο πάνω ιδιότητες της $y=a^x$ συνεπάγεται από την πρόταση 4.14 ότι η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε $x=\log_a y$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $(0,+\infty)$. Το σύνολο τιμών της $x=\log_a y$ είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της $y=a^x$, δηλαδή με το $(-\infty,+\infty)$.
Από την συνέχεια της $x=\log_a y$ συμπεραίνουμε ότι

$$\log_{y\to\eta}\log_a y=\log_a\eta\qquad\text{για κάθε }\ \eta.$$

Επίσης, επειδή το σύνολο τιμών της $x=\log_a y$ είναι το $(-\infty,+\infty)$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, από την πρόταση 4.14 συνεπάγεται

$$\lim_{y\to+\infty}\log_a y=+\infty,\qquad \lim_{y\to 0+}\log_a y=-\infty.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να χειριστεί την περίπτωση $0 < a < 1$.
Επίσης, με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να εισαγάγει και να χειριστεί την εκθετική συνάρτηση ως την αντίστροφη της λογαριθμικής, αποδεχόμενος την μονοτονία και τη συνέχεια της λογαριθμικής συνάρτησης.

Στα επόμενα θα ορίσουμε τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις καθώς και τις υπερβολικές και τις αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Έστω ο περιορισμός της cos στο $[0, \pi]$. Η $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, \pi]$. Επειδή $\cos 0 = 1$ και $\cos \pi = -1$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *ονομάζεται* **τόξο συνημιτόνου** *και συμβολίζεται* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Επομένως, αν $x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, 1]$, τότε: $x = \arccos y$ αν και μόνο αν $\cos x = y$. Η $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

Έστω ο περιορισμός της sin στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Η $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ και $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *ονομάζεται* **τόξο ημιτόνου** *και συμβολίζεται* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Επομένως, αν $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1, 1]$, τότε: $x = \arcsin y$ αν και μόνο αν $\sin x = y$. Η $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Έστω ο περιορισμός της tan στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Η $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο εφαπτομένης** *και συμβολίζεται* $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Επομένως, αν $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y \in (-\infty, +\infty)$, τότε: $x = \arctan y$ αν και μόνο αν $\tan x = y$. Η $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Βρίσκουμε, επίσης, τα όρια

$$\lim_{y \to -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{y \to +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Τέλος, θεωρούμε τον περιορισμό της cot στο $(0, \pi)$. Η $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0, \pi)$. Επειδή $\lim_{x \to 0+} \cot x = +\infty$ και $\lim_{x \to \pi-} \cot x = -\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\cot : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο συνεφαπτομένης** *και συμβολίζεται* $\operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.

Επομένως, αν $x \in (0, \pi)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, τότε: $x = \operatorname{arccot} y$ αν και μόνο αν $\cot x = y$. Η $\operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, \pi)$.
Επίσης, είναι

$$\lim_{y \to -\infty} \operatorname{arccot} y = \pi, \qquad \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arccot} y = 0.$$

Οι υπερβολικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε τις συναρτήσεις* **υπερβολικό συνημίτονο**, **υπερβολικό ημίτονο**, **υπερβολική εφαπτόμενη** *και* **υπερβολική συνεφαπτόμενη** *με αντίστοιχους τύπους:*

$$\cosh x = \tfrac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \tfrac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \tfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \coth x = \tfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Οι τρείς πρώτες συναρτήσεις ορίζονται για κάθε x ενώ η τελευταία για κάθε $x \neq 0$.

Οι τέσσερις συναρτήσεις είναι συνεχείς και είναι εύκολο να αποδειχθούν οι εξής τύποι:

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1, \qquad \tanh x = \tfrac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \tfrac{\cosh x}{\sinh x},$$

$$\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2,$$

$$\sinh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \sinh x_2 + \sinh x_1 \cosh x_2.$$

Οι τύποι αυτοί μοιάζουν με ανάλογους τύπους των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ και $\cot x$. Η αναλογία δεν είναι τυχαία: εύκολα βλέπουμε ότι

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

και θυμόμαστε και τους ανάλογους τύπους

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

από τη στοιχειώδη μιγαδική ανάλυση.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η cosh είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επειδή $\cosh 0 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$, το σύνολο τιμών της cosh που αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ είναι το $[1, +\infty)$. Η cosh είναι προφανώς άρτια, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$. Επομένως, η cosh δεν είναι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{R}$. Όμως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση του περιορισμού της cosh στο $[0, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο υπερβολικού συνημιτόνου** *και συμβολίζεται* $\mathrm{arccosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$.

Η $\mathrm{arccosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Με έναν απλό υπολογισμό βρίσκουμε ότι έχει τύπο

$$\mathrm{arccosh}\, y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \qquad \text{για } \ 1 \leq y.$$

Η sinh είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Επίσης, $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της sinh είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\sinh : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο υπερβολικού ημιτόνου** *και συμβολίζεται* $\mathrm{arcsinh} : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.

Η $\mathrm{arcsinh} : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$ και εύκολα βρίσκουμε ότι έχει τύπο

$$\mathrm{arcsinh}\, y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \qquad \text{για κάθε } \ y.$$

Η tanh είναι περιττή και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Είναι $\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$ και $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$, οπότε το σύνολο τιμών της tanh είναι το $(-1, 1)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\tanh : (-\infty, +\infty) \to (-1, 1)$ *ονομάζεται* **τόξο υπερβολικής εφαπτομένης** *και συμβολίζεται* $\mathrm{arctanh} : (-1, 1) \to (-\infty, +\infty)$.

Η arctanh : $(-1,1) \to (-\infty,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-1,1)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\operatorname{arctanh} y = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1+y}{1-y} \qquad \text{για} \quad -1 < y < 1.$$

Η coth είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και έχουμε ότι $\lim_{x\to 0+}\coth x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\coth x = 1$, οπότε το σύνολο τιμών της coth που αντιστοιχεί στο $(0,+\infty)$ είναι το $(1,+\infty)$. Η coth είναι περιττή, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty,-1)$. Άρα η coth με πεδίο ορισμού το $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι ένα-προς-ένα με σύνολο τιμών το $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* coth : $(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \to (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο υπερβολικής συνεφαπτομένης** *και συμβολίζεται* arccoth : $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \to (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Η arccoth : $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \to (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$ με αντίστοιχα σύνολα τιμών τα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Προσέξτε: η arccoth *δεν* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ παρά το ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$. Εύκολα βρίσκουμε τον τύπο

$$\operatorname{arccoth} y = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y+1}{y-1} \qquad \text{για} \;\; y < -1 \;\; \text{ή} \;\; 1 < y.$$

Οι συναρτήσεις arctanh και arccoth σχηματίζουν *μία* συνάρτηση με τύπο $x = \frac{1}{2}\log|\frac{y+1}{y-1}|$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$.

Ασκήσεις.

4.5.1. Ποιά είναι τα σύνολα τιμών των $-2x^3+x^2-5x+6$, x^4-2x^2+7, $x^6-3x^4+3x^2-1$;

4.5.2. Βρείτε τα σύνολα τιμών της $x+\frac{1}{x}$ στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[-1,0)$, $(0,1]$, $[1,+\infty)$.

4.5.3. Πόσες *ακριβώς* λύσεις έχει η εξίσωση $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{x-3}=c$; Η απάντηση πιθανόν να εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου c.

4.5.4. Έστω οι συναρτήσεις x^2+2x στο $[0,1]$, $\frac{1}{x}$ στο $(0,1]$ και $\frac{1}{x^2+1}$ στο $[0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι είναι γνησίως μονότονες και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τί συμπεραίνετε για τις αντίστροφες συναρτήσεις;

4.5.5. Έστω η συνάρτηση $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. Αν $a_0a_n<0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi>0$ ώστε $P(\xi)=0$.

4.5.6. Βρείτε τους αντίστροφους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και ± 1.

4.5.7. Αποδείξτε ότι ισχύει $\operatorname{arctan} y+\operatorname{arccot} y=\frac{\pi}{2}$ για κάθε y και $\arccos y+\arcsin y=\frac{\pi}{2}$ για κάθε $y\in[-1,1]$.
Για ποιούς y ισχύουν οι ισότητες $y=\cos(\arccos y)$ και $y=\sin(\arcsin y)$; Για ποιούς y ισχύουν οι ισότητες $y=\tan(\arctan y)$ και $y=\cot(\operatorname{arccot} y)$;
Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan y+\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}$ για κάθε $y>0$ και $\arctan y+\arctan\frac{1}{y}=-\frac{\pi}{2}$ για κάθε $y<0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\arccos(\cos x)=x$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Γενικότερα, με τί είναι ίση η παράσταση $\arccos(\cos x)$ αν $x\in[k\pi,(k+1)\pi]$ για κάποιον $k\in\mathbb{Z}$;
Τι ανάλογο μπορείτε να πείτε για καθεμιά από τις παραστάσεις $\arcsin(\sin x)$, $\arctan(\tan x)$ και $\operatorname{arccot}(\cot x)$;

4.5.8. Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των υπερβολικών συναρτήσεων και των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων καθώς και της συνάρτησης $x=\frac{1}{2}\log|\frac{y+1}{y-1}|$.

4.5.9. [31] Έστω οι $f_1 : (-\infty, 0) \to (-\infty, +\infty)$, $f_2 : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$.

Αποδείξτε ότι οι f_1, f_2 είναι γνησίως αύξουσες με κοινό σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Χωρίς να βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, τι συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχειά τους;

Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) - 1 = 0$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$.

Έστω $g : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) - 1 = 0$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$.

Βρείτε τους τύπους και σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

4.5.10. Έστω οι $f_1 : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [-1, 0) \to \mathbb{R}$, $f_3 : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_4 : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = f_4(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$.

Αποδείξτε ότι οι f_1, f_4 είναι γνησίως αύξουσες και οι f_2, f_3 γνησίως φθίνουσες και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τί συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχεια των ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, ${f_4}^{-1}$;

Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, ${f_4}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) + 1 = 0$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.

Έστω $g : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(-\infty, -1]$ ώστε να ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) + 1 = 0$ για κάθε $y \in (-\infty, -1]$. Αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$.

Έστω $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) + 1 = 0$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$. Αποδείξτε ότι είτε $g = {f_3}^{-1}$ είτε $g = {f_4}^{-1}$.

Βρείτε τους τύπους και σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

4.5.11. Έστω οι $f_1 : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_3 : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x^3 - 3x$.

Αποδείξτε ότι οι f_1, f_3 είναι γνησίως αύξουσες και η f_2 γνησίως φθίνουσα και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τί συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχεια των ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$;

Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.

Έστω διάστημα I και $g : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I ώστε να ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε $y \in I$. Αν $I = [-2, +\infty)$, αποδείξτε ότι $g = {f_3}^{-1}$. Αν $I = (-\infty, 2]$, αποδείξτε ότι $g = {f_1}^{-1}$. Αν, όμως, $I = [-2, 2]$, αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$ είτε $g = {f_3}^{-1}$.

Βρείτε τους τύπους και σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

4.5.12. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b).

Έστω $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = -\infty$. Σύμφωνα με την άσκηση 4.4.14, η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν u είναι η μέγιστη τιμή της f, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, u]$.

Ποιό είναι το συμπέρασμα αν $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = +\infty$;

4.5.13. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b). Έστω ότι υπάρχουν τα $A = \lim_{x \to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $B = \lim_{x \to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ και $A < B$.

Αν ισχύει $A < f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι η f έχει σύνολο τιμών το (A, B).

Αν ισχύει $f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) \leq A$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή στο (a, b). Αν l είναι η ελάχιστη τιμή, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[l, B)$.

[31] Γι αυτήν και τις επόμενες δυο ασκήσεις δείτε και τις ασκήσεις 4.4.11 και 4.4.13. Οι συναρτήσεις g που εμφανίζονται σ' αυτές εδώ τις ασκήσεις είναι απλά αλλά μη-τετριμμένα παραδείγματα *αλγεβρικών συναρτήσεων*. Τις αλγεβρικές συναρτήσεις θα τις ορίσουμε στην ενότητα 7.3. Δείτε την άσκηση 7.3.28.

Αν ισχύει $A < f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $B \leq f(x_0)$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν u είναι η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(A, u]$.
Αν υπάρχουν ${x_0}', {x_0}'' \in (a, b)$ ώστε $f({x_0}') \leq A$ και $B \leq f({x_0}'')$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν l είναι η ελάχιστη και u η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[l, u]$.
Ποιά είναι τα αντίστοιχα συμπεράσματα αν $A > B$ ή $A = B$; Τί γίνεται αν το διάστημα είναι $(a, b]$ ή $[a, b)$ αντί (a, b);

4.6 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Κατ' αρχάς ας θυμηθούμε τον ορισμό της συνέχειας της f στον $\xi \in A$. Η f χαρακτηρίζεται συνεχής στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι *ο δ εξαρτάται από τον ϵ* **και** *από τον ξ*. Αυτό το εκφράζουμε συμβολικά ως εξής: $\delta = \delta(\epsilon, \xi)$. Πράγματι: (i) επιλέγουμε τον ξ, στον οποίο θέλουμε να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, επιλέγουμε τον ϵ και, μετά από τις συγκεκριμένες επιλογές των ξ, ϵ, επιλέγουμε τον κατάλληλο δ, (ii) αν επιλέξουμε διαφορετικό ξ ή ϵ, τότε μπορεί να πρέπει να επιλέξουμε διαφορετικό δ από τον προηγούμενο.

Στην παρούσα ενότητα μας ενδιαφέρει η εξάρτηση του δ από τον ξ.

Παράδειγμα 4.6.1. Έστω η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$.
Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε ξ. Επομένως, για κάθε ξ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$ για κάθε x με $|x - \xi| < \delta$. Θα δούμε ότι *δεν* υπάρχει επιλογή του δ ανεξάρτητη του ξ.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι, με προεπιλεγμένο και *σταθεροποιημένο* $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ εξαρτώμενο μόνο από τον ϵ και, επομένως, κι αυτό *σταθεροποιημένο* ώστε για *κάθε* ξ να ισχύει $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$ για κάθε x με $|x - \xi| < \delta$. Τώρα, για *κάθε* ξ, ο $x = \xi + \frac{\delta}{2}$ ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ και, επομένως, πρέπει να ικανοποιεί και την $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$. Άρα, μετά από πράξεις, για *κάθε* ξ ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$.
Συνοψίζουμε: για *κάθε* ξ πρέπει να ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$ *με σταθερούς* δ, ϵ. Αυτό είναι αδύνατο!!
Αν ο ξ αυξάνεται απεριόριστα, ο $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}|$ αυξάνεται απεριόριστα: $\lim_{\xi \to +\infty} |\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| = +\infty$.
Επομένως, δεν μπορεί να ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$ για κάθε ξ.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να κωδικοποιήσουμε σε μορφή ορισμού την κατάσταση που μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$ και, επιπλέον, στον ορισμό της συνέχειας ο δ δεν εξαρτάται από τον ξ αλλά μόνο από τον ϵ. Η κατάσταση αυτή πρέπει να διατυπωθεί ως εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $\xi \in A$ να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Πράγματι, από τη διατύπωση αυτή προκύπτει ότι ο δ εξαρτάται μόνο από τον ϵ: επιλέγουμε $\epsilon > 0$ και κατόπιν βρίσκουμε κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε η ανισότητα $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ να ισχύει, με τον ίδιο δ, για κάθε $\xi \in A$ και κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Ιδού μια μικρή απλοποίηση στη διατύπωση: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x, \xi \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο για τις τιμές x, ξ της ανεξάρτητης μεταβλητής, διατυπώνουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $|x' - x''| < \delta$.*

Είναι σαφές ότι, αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$. Όμως, δεν ισχύει το αντίστροφο.

Παράδειγμα 4.6.2. Όπως είδαμε στο παράδειγμα 4.6.1, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.6.3. Έστω η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=3x-2$.
Έστω $\epsilon>0$. Το $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$ συνεπάγεται από το $|(3x'-2)-(3x''-2)|<\epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $3|x'-x''|<\epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $|x'-x''|<\frac{\epsilon}{3}$. Με σύμβολα:

$$|f(x')-f(x'')|<\epsilon \;\Leftarrow\; |(3x'-2)-(3x''-2)|<\epsilon \;\Leftarrow\; 3|x'-x''|<\epsilon \;\Leftarrow\; |x'-x''|<\tfrac{\epsilon}{3}.$$

Θεωρούμε οποιονδήποτε δ με $0<\delta\leq\frac{\epsilon}{3}$. Τότε, για κάθε $x',x''\in\mathbb{R}$ με $|x'-x''|<\delta$ ισχύει $|x'-x''|<\frac{\epsilon}{3}$ και, επομένως, $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$.
Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Το θεώρημα 4.2 θα παίξει σημαντικό ρόλο στο κεφάλαιο 6 σε σχέση με το ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. [32] *Αν η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.
Τότε υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν $x',x''\in[a,b]$ με $|x'-x''|<\delta$ ώστε $|f(x')-f(x'')|\geq\epsilon$. Άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχουν

$$x_n{}',x_n{}''\in[a,b] \;\text{ ώστε }\; |x_n{}'-x_n{}''|<\tfrac{1}{n} \;\text{ και }\; |f(x_n{}')-f(x_n{}'')|\geq\epsilon.$$

Η ακολουθία $(x_n{}')$ είναι φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία $(x_{n_k}{}')$ που συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k}{}'\to\xi.$$

Επειδή ισχύει $a\leq x_{n_k}{}'\leq b$ για κάθε k, είναι $a\leq\xi\leq b$. Επειδή ισχύει $|x_{n_k}{}'-x_{n_k}{}''|<\frac{1}{n_k}$ για κάθε k, συνεπάγεται

$$x_{n_k}{}'-x_{n_k}{}''\to 0.$$

Άρα από το $x_{n_k}{}'\to\xi$ προκύπτει

$$x_{n_k}{}''\to\xi.$$

Επειδή $\xi\in[a,b]$, η f είναι συνεχής στον ξ. Άρα από τα $x_{n_k}{}'\to\xi$ και $x_{n_k}{}''\to\xi$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}{}')\to f(\xi) \;\text{ και }\; f(x_{n_k}{}'')\to f(\xi).$$

Επομένως,

$$f(x_{n_k}{}')-f(x_{n_k}{}'')\to 0.$$

Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|f(x_{n_k}{}')-f(x_{n_k}{}'')|\geq\epsilon$ για κάθε k.
Καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. □

Ασκήσεις.

4.6.1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in[0,1)\\ 1, & \text{αν } x\in(1,2]\end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1)\cup(1,2]$.

4.6.2. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $|x|$, $\sqrt{x^2+1}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ότι η $\frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $f(x)=x\sin(\log(x+1))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και μη-φραγμένη στο $[0,+\infty)$ και ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
Αποδείξτε ότι η $\sin(x^2)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $[0,+\infty)$ αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

[32] Πέρα από το θεώρημα 4.2, ένα χρήσιμο κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας - αλλά με χρήση παραγώγων - εμφανίζεται στην άσκηση 5.3.20. Επίσης, μερικά ενδιαφέροντα κριτήρια υπάρχουν στις ασκήσεις 4.6.3, 4.6.7, 4.6.9, 4.6.11 και 4.6.12.

4.6.3. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.[33]

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x και $|x|$ ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η x^2 ικανοποιεί την ίδια ανισότητα σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ αλλά όχι στο $\mathbb{R}$.

4.6.4. Έστω $A \subseteq B$, $f : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο A.

4.6.5. Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

4.6.6. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς στο A.

Αποδείξτε ότι η $f + g : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι οι f, g είναι φραγμένες, αποδείξτε ότι η $fg : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Βρείτε A και $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς στο A ώστε η fg να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

4.6.7. Έστω $a < b < c$, $f : (a, c) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στα $(a, b]$ και $[b, c)$, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο (a, c).

4.6.8. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(k/n) \to 0$.

4.6.9. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε δυο ακολουθίες $({x_n}')$, $({x_n}'')$ στο A ώστε ${x_n}' - {x_n}'' \to 0$ ισχύει $f({x_n}') - f({x_n}'') \to 0$.

4.6.10. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν η (x_n) στο A είναι ακολουθία Cauchy, αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι κι αυτή ακολουθία Cauchy.

Τί μπορούμε να συμπεράνουμε από τη συνάρτηση x^2 σχετικά με το αντίστροφο;

4.6.11. [34] Έστω $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b)$.

Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{x \to b} f(x)$ και είναι αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$.

Αποδείξτε ότι, αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$ και αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$, τότε υπάρχει το $\lim_{x \to b} f(x)$ και είναι αριθμός.

Αποδείξτε ότι, αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$ αν και μόνο αν υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$.

Προσαρμόστε τα προηγούμενα για διάστημα $(a, b]$ ή (a, b) αντί $[a, b)$.

4.6.12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική. Δηλαδή υπάρχει $\tau > 0$ ώστε να ισχύει $f(x + \tau) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4.6.13. [35] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < \lambda < f(b)$.
Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρήστε έναν $\delta > 0$ που να αντιστοιχεί στον $\epsilon = 1/k$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας. Χωρίστε το $[a, b]$ με σημεία $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ σε διαστήματα μήκους $< \delta$. Έστω n_k ο μεγαλύτερος από τους $1, \ldots, n-1$ ώστε $f(x_{n_k}) \leq \lambda$. Δείτε ότι $f(x_{n_k}) \leq \lambda < f(x_{n_k+1})$ και συμπεράνατε ότι $|f(x_{n_k}) - \lambda| < 1/k$ και, επομένως, $f(x_{n_k}) \to \lambda$. Μέσω του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.

[33] Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, χαρακτηρίζεται **Hölder-συνεχής** στο A με Hölder-εκθέτη ρ. Ειδικά, αν $\rho = 1$, η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz-συνεχής** στο A. Δείτε και τους ανάλογους ορισμούς στην άσκηση 4.1.12. Δείτε, όμως, και τις ασκήσεις 5.3.20 και 5.4.10.

[34] Μια σημαντική άσκηση.

[35] Τρίτη απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

4.6.14. [α] Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a,b\geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq ax+b$ για κάθε $x\geq 0$.

4.6.15. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Αν ισχύει $f(x+n)\to 0$ για κάθε $x\geq 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) ώστε $x_n\to+\infty$ και $x_{n+1}-x_n\to 0$ και $f(x_n)\to 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Μπορείτε να υποδείξετε μια ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $x_n\to+\infty$ και $x_{n+1}-x_n\to 0$;

4.6.16. Έστω φραγμένο σύνολο A και $f:A\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

4.6.17. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $\epsilon>0$. Ένας a χαρακτηρίζεται **ϵ-σχεδόν περίοδος** της f αν ισχύει $|f(a+x)-f(x)|<\epsilon$ για κάθε x.

Μια συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **σχεδόν περιοδική** αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $L>0$ ώστε σε κάθε διάστημα μήκους L να υπάρχει τουλάχιστον μια ϵ-σχεδόν περίοδος της f.

Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής περιοδική συνάρτηση είναι σχεδόν περιοδική.

Αποδείξτε ότι κάθε σχεδόν περιοδική συνάρτηση είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής.

Αποδείξτε ότι, αν οι $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι σχεδόν περιοδικές, τότε και οι $f+g$, fg είναι σχεδόν περιοδικές.

Η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π. Αν ο a είναι άρρητος, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\sin x+\sin(ax)$ είναι σχεδόν περιοδική αλλά όχι περιοδική.

Κεφάλαιο 5

Παράγωγοι συναρτήσεων.

5.1 Παράγωγοι συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ υπάρχει, το συμβολίζουμε $f'(\xi)$ και το ονομάζουμε* **παράγωγο** *της f στον ξ. Δηλαδή,*

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Από τον ορισμό της ως όριο, η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$. Αν $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** *ή* **διαφορίσιμη** *στον ξ.*

Εκτός από το σύμβολο $f'(\xi)$ χρησιμοποιούνται και τα σύμβολα

$$D_x f(\xi), \qquad \tfrac{df}{dx}(\xi), \qquad \tfrac{dy}{dx}(\xi).$$

Στο τρίτο σύμβολο εννοείται ότι ισχύει η σχέση $y = f(x)$ ανάμεσα στην ανεξάρτητη μεταβλητή x και στην εξαρτημένη μεταβλητή y. Πρέπει να τονίσουμε ότι στα δυο τελευταία σύμβολα οι λόγοι είναι "εικονικοί". Δηλαδή, *δεν υπάρχουν* δυο ανεξάρτητες ποσότητες dy και dx ώστε ο λόγος τους να ισούται με την παράγωγο $f'(\xi)$. Τα σύμβολα αυτά έχουν τη *μορφή* λόγων αλλά δεν είναι λόγοι. Η μορφή αυτή, αν και είναι εικονική, έχει επικρατήσει διότι εκφράζει κατά κάποιο τρόπο την ουσία της παραγώγου. Σχετικά με αυτό θα πούμε περισσότερα σε λίγο, όταν μιλήσουμε για τα *απειροστά*.

Αν, αντί της τιμής της παραγώγου στον ξ, θεωρήσουμε την τιμή της σε έναν γενικό x, τότε, αντί των συμβόλων $D_x f(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$ και $\frac{dy}{dx}(x)$, χρησιμοποιούμε τα απλούστερα

$$D_x f, \qquad \tfrac{df}{dx}, \qquad \tfrac{dy}{dx},$$

επειδή ήδη εμφανίζεται σ' αυτά το σύμβολο x της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Παράδειγμα 5.1.1. Είναι $\frac{dx^2}{dx}(1) = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$. Άρα η x^2 είναι παραγωγίσιμη στον 1.

Παράδειγμα 5.1.2. Είναι $\frac{d\sqrt[3]{x}}{dx}(0) = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$. Άρα η $\sqrt[3]{x}$ έχει παράγωγο στον 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0.

Μερικές φορές το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ το γράφουμε $\lim_{h\to0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $h = x - \xi$.

Παρατηρήστε ότι το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή διότι το όριο του παρονομαστή είναι 0. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε το όριο του αριθμητή είναι κι αυτό 0 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε αυτό συμβολίζεται $f'_-(\xi)$ και ονομάζεται* **αριστερή (πλευρική) παράγωγος** *της f στον ξ.*
Ομοίως, αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε αυτό συμβολίζεται $f'_+(\xi)$ και ονομάζεται **δεξιά (πλευρική) παράγωγος** *της f στον ξ.*

Καμιά φορά χρησιμοποιούμε και τα σύμβολα $D_{x\pm}f(\xi)$, $\frac{df}{dx\pm}(\xi)$ και $\frac{dy}{dx\pm}(\xi)$ για τις πλευρικές παραγώγους.

Τα παρακάτω είναι προφανή. (i) Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχουν οι $f'_-(\xi)$, $f'_+(\xi)$ και είναι ίσες και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi) = f'_-(\xi) = f'_+(\xi)$. (ii) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi) = f'_-(\xi)$. (iii) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi) = f'_+(\xi)$.

Παράδειγμα 5.1.3. $\frac{d|x|}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$ και $\frac{d|x|}{dx-}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$. Άρα η $|x|$ δεν έχει παράγωγο στον 0.

Παράδειγμα 5.1.4. $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = +\infty$ και $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx-}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\infty$. Άρα η $\sqrt{|x|}$ δεν έχει παράγωγο στον 0.

Παράδειγμα 5.1.5. Έστω η $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ Είναι $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$ και $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = +\infty$. Άρα η f έχει παράγωγο στον 0 ίση με $f'(0) = +\infty$.

Παράδειγμα 5.1.6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Η $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Η $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{x\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x}$, επίσης, δεν υπάρχει. Άρα η f δεν έχει δεξιά ούτε αριστερή παράγωγο στον 0.
Την ίδια συνάρτηση είδαμε και στο παράδειγμα 4.1.19 όπου αποδείξαμε ότι είναι συνεχής στον 0.

Παράδειγμα 5.1.7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Παραλλαγή της προηγούμενης συνάρτησης. Τώρα, όμως, έχουμε $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, διότι $\lim_{x\to 0} x = 0$ και η $\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 5.1.8. Η $\sqrt{x}$ ορίζεται στο $[0, +\infty)$. Άρα $\frac{d\sqrt{x}}{dx}(0) = \frac{d\sqrt{x}}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Αν για κάθε $\xi \in B$ υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε λέμε ότι η f έχει* **παράγωγο** *στο B. Αν για κάθε $\xi \in B$ υπάρχει η $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι* **παραγωγίσιμη** *στο B.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{\xi \in A \,|\, f'(\xi) \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή το σύνολο όλων των ξ στο πεδίο ορισμού της f στους οποίους αυτή είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται η* **παράγωγος συνάρτηση** *της f με πεδίο ορισμού το B και συμβολίζεται $f' : B \to \mathbb{R}$.*

Ας δούμε τώρα μερικά πιο γενικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.1.9. Για τη σταθερή συνάρτηση c έχουμε

$$\frac{dc}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{c-c}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 0 = 0$$

για κάθε ξ. Επομένως, η παράγωγος συνάρτηση είναι η σταθερή 0:

$$\frac{dc}{dx} = 0 \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 5.1.10. Η παράγωγος της x σε κάθε ξ είναι

$$\frac{dx}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 1 = 1.$$

Δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση είναι η σταθερή 1:

$$\frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 5.1.11. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \text{για κάθε } x, \text{ αν } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Προσέξτε: αποφεύγουμε να γράψουμε τον τύπο $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ στην περίπτωση $n = 1$. Ο τύπος $\frac{dx}{dx} = x^0$ δεν είναι ακριβώς σωστός. Το αριστερό μέλος είναι η σταθερή συνάρτηση 1, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, και ορίζεται για κάθε x ενώ το δεξιό μέλος είναι η συνάρτηση x^0 και ορίζεται για κάθε $x \neq 0$. Οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται στο κοινό μέρος των πεδίων ορισμού τους αλλά δεν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού.
Τώρα, η απόδειξη. Για κάθε ξ έχουμε

$$\frac{dx^n}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{x^n-\xi^n}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}(x^{n-1} + x^{n-2}\xi + \cdots + x\xi^{n-2} + \xi^{n-1}) = n\xi^{n-1}.$$

Αυτό το παράδειγμα θα το δούμε και στην επόμενη ενότητα μαζί με άλλα σχετικά παραδείγματα.

Εφαπτόμενες ευθείες.

Ας πούμε τώρα μερικά λόγια για το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας της παραγώγου. Η προσεκτική σχεδίαση σχημάτων θα βοηθήσει σημαντικά στην κατανόηση των επιχειρημάτων.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι δεξιά συνεχής στον ξ, δηλαδή ότι, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει απεριόριστα το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$. Για κάθε $x \in A$ με $x > \xi$ θεωρούμε την *ημιευθεία* $l_{x,+}$ με άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x, f(x))$. Αυτή η ημιευθεία βρίσκεται δεξιά του $(\xi, f(\xi))$ και καθορίζεται από το άκρο της και από την κλίση της, δηλαδή από το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και από τον λόγο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.
(i) Αν η $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, θεωρούμε την ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, κλίση $f'_+(\xi)$ και βρίσκεται δεξιά του $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την κλίση της σταθερής ημιευθείας l_+ και, επειδή οι ημιευθείες έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+. Από αυτό συνεπάγεται ότι η ημιευθεία l_+ *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι δεξιά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
(ii) Αν $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = +\infty$, θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται πάνω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική και, επειδή οι ημιευθείες $l_{x,+}$ και l_+ έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+. Άρα η ημιευθεία l_+ *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι δεξιά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
(iii) Αν $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = -\infty$, θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται κάτω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,+}$ και l_+ έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+. Άρα η ημιευθεία l_+ *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι δεξιά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
Φυσικά, στις περιπτώσεις (i) - (iii) αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία στο μέρος του γραφήματος της f που είναι δεξιά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.

Ας εξετάσουμε συνοπτικά και τη "συμμετρική" κατάσταση από την αριστερή μεριά του ξ.

Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι αριστερά συνεχής στον ξ. Για κάθε $x \in A$ με $x < \xi$ θεωρούμε την *ημιευθεία* $l_{x,-}$ με άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x, f(x))$, οπότε η κλίση της είναι ίση με τον λόγο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Διακρίνουμε πάλι τρεις περιπτώσεις.

(i) Αν η $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, θεωρούμε την ημιευθεία l_-, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, κλίση $f'_-(\xi)$ και βρίσκεται αριστερά του $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από αριστερά του, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την κλίση της σταθερής ημιευθείας l_- και, επειδή οι ημιευθείες έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_-. Άρα η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι αριστερά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.

(ii) Αν $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = +\infty$, θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_-, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται κάτω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από αριστερά του, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,-}$ και l_- έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_-. Άρα η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι αριστερά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.

(iii) Αν $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = -\infty$, θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_-, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται πάνω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,-}$ και l_- έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_-. Άρα η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι αριστερά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.

Αν, στις περιπτώσεις (i) - (iii), δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία στο μέρος του γραφήματος της f που είναι αριστερά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.

Έστω, τώρα, ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, αν οι δυο πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες, τότε οι εφαπτόμενες ημιευθείες l_- και l_+ στα μέρη του γραφήματος της f που είναι αριστερά και δεξιά, αντιστοίχως, του σημείου $(\xi, f(\xi))$ είναι αντίθετες και, επομένως, σχηματίζουν μια ευθεία, την ευθεία l η οποία εφάπτεται στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν οι δυο πλευρικές παράγωγοι υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσες, τότε οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες δεν είναι αντίθετες και, επομένως, δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Φυσικά, αν μια από τις δυο πλευρικές παραγώγους δεν υπάρχει, τότε ούτε η αντίστοιχη εφαπτόμενη ημιευθεία υπάρχει και, επομένως, δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία.

Παράδειγμα 5.1.12. Το γράφημα της $|x|$ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0,0)$. Η μια έχει άκρο το $(0,0)$, κλίση $\frac{d|x|}{dx+}(0) = 1$ και βρίσκεται δεξιά του σημείου $(0,0)$. Η άλλη έχει άκρο το $(0,0)$, κλίση $\frac{d|x|}{dx-}(0) = -1$ και βρίσκεται αριστερά του $(0,0)$. Αυτές οι ημιευθείες δεν είναι αντίθετες, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $|x|$ στο σημείο $(0,0)$.

Παράδειγμα 5.1.13. Το γράφημα της $\sqrt{|x|}$ έχει κι αυτό δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0,0)$. Επειδή $\frac{d\sqrt{x}}{dx+}(0) = +\infty$, η μια έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το $(0,0)$. Ομοίως, επειδή $\frac{d\sqrt{x}}{dx-}(0) = -\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κι αυτή κατακόρυφα πάνω από το $(0,0)$. Οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες ταυτίζονται, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $\sqrt{|x|}$ στο σημείο $(0,0)$. Μπορούμε, βέβαια, να πούμε ότι το γράφημα έχει εφαπτόμενη *ημιευθεία* στο σημείο $(0,0)$.

Παράδειγμα 5.1.14. Το γράφημα της $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } 0 \le x \\ -\sqrt{-x}, & \text{αν } x \le 0 \end{cases}$ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο $(0,0)$. Επειδή $f'_+(0) = +\infty$, η μια έχει άκρο το σημείο $(0,0)$ και βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το $(0,0)$. Ομοίως, επειδή $f'_-(0) = +\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κατακόρυφα κάτω από το $(0,0)$. Οι δυο ημιευθείες είναι αντίθετες και σχηματίζουν την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0,0)$, η οποία είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

Στην περίπτωση που ο ξ είναι μόνο από δεξιά του ή μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι, αντιστοίχως, δεξιά συνεχής ή αριστερά συνεχής στον ξ, μπορούμε να μιλάμε μόνο για μια εφαπτόμενη ημιευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Παράδειγμα 5.1.15. Το γράφημα της συνάρτησης $\sqrt{x}$ έχει μόνο μια εφαπτόμενη ημιευθεία στο σημείο $(0,0)$. Επειδή $\frac{d\sqrt{x}}{dx+}(0) = +\infty$, η ημιευθεία αυτή έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το $(0,0)$.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και ξ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον ξ (σε λίγο, στην πρόταση 5.3, θα αποδείξουμε ότι το δεύτερο συνεπάγεται το πρώτο). Όπως είδαμε, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας l στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με $f'(\xi)$, οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi).$$

Τέλος, αν η f είναι συνεχής στον ξ και $f'(\xi) = +\infty$ ή $f'(\xi) = -\infty$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\xi, f(\xi))$ είναι κατακόρυφη και έχει εξίσωση $x = \xi$.

Παράδειγμα 5.1.16. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης x^2 στο σημείο (ξ, ξ^2) είναι η $y = 2\xi(x - \xi) + \xi^2$.
Για να βρούμε σε ποιό σημείο (ξ, ξ^2) η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, εξισώνουμε τις κλίσεις των δυο ευθειών, $2\xi = 1$, και προκύπτει $\xi = \frac{1}{2}$.

Απειροστά. Διαφορικά.

Ας κάνουμε τώρα ένα σχόλιο για το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ της παραγώγου. Αν συμβολίσουμε $\Delta x = x - \xi$ τη διαφορά δυο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής και $\Delta y = y - \eta = f(x) - f(\xi)$ τη διαφορά των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, τότε ο λόγος διαφορών $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ γράφεται

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Όταν μελετάμε την παράγωγο $f'(\xi)$, τότε στην παράσταση $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ο παρονομαστής Δx πλησιάζει τον 0 διότι ο x πλησιάζει τον ξ. Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής στον ξ, τότε και ο αριθμητής Δy πλησιάζει τον 0. Τώρα, ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ προσεγγίζει την παράγωγο $f'(\xi)$. Επομένως, όταν γράφουμε $f'(\xi) = \frac{dy}{dx}$, θεωρούμε, αυτομάτως, ότι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ προσεγγίζει τον "λόγο" $\frac{dy}{dx}$. Φανταζόμαστε, λοιπόν, ότι το dx είναι κάποιο "πολύ μικρό" Δx (φανταστείτε: "μικρότερο από κάθε μη-μηδενικό αριθμό αλλά και όχι ίσο με το 0") και ότι το dy είναι κάποιο "πολύ μικρό" Δy. Τα dx και dy ονομάζονται **απειροστά** των μεταβλητών x και y. Τώρα, όταν το Δx είναι "πολύ μικρό", ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ είναι "περίπου ίσος" με την $f'(\xi)$ και, επομένως, *η διαφορά Δy είναι "περίπου $f'(\xi)$ φορές" η διαφορά Δx*. Μπορούμε, λοιπόν, να φανταστούμε ότι, *οριακά, το απειροστό dy είναι $f'(\xi)$ φορές το απειροστό dx*. Έτσι, έχουμε τις δυο συμβολικές σχέσεις

$$\frac{dy}{dx} = f'(\xi), \qquad dy = f'(\xi)dx. \tag{5.1}$$

Ξανατονίζουμε, διότι αυτό είναι πολύ σημαντικό και βρίσκεται *στη βάση κάθε εφαρμογής του απειροστικού λογισμού*:
Ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ καθώς και τα dx και dy είναι εικονικές ποσότητες και δεν έχουν πραγματική υπόσταση. Η πρώτη ισότητα (5.1) σημαίνει ότι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ είναι περίπου ίσος με την $f'(\xi)$ όταν το Δx είναι πολύ-πολύ μικρό και η δεύτερη ισότητα (5.1) σημαίνει ότι το Δy είναι περίπου $f'(\xi)$ φορές το Δx όταν το Δx είναι πολύ-πολύ μικρό.

Προσέξτε τη συμβολική "απλοποίηση" η οποία "επιτελείται" στη συμβολική ισότητα

$$dy = \tfrac{dy}{dx}dx.$$

Αν αντί της τιμής της παραγώγου στον ξ θεωρήσουμε την τιμή της στον γενικό x, δηλαδή την $f'(x)$, τότε γράφουμε

$$\tfrac{dy}{dx} = f'(x), \qquad dy = f'(x)dx.$$

για τη σχέση ανάμεσα στα απειροστά της μεταβλητής x και της μεταβλητής y, όπου $y = f(x)$ είναι η σχέση που συνδέει τις δυο μεταβλητές.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε συνάρτηση με τύπο $l(x) = \mu x$ χαρακτηρίζεται* **γραμμική συνάρτηση**. *Ενώ κάθε συνάρτηση με τύπο $l(x) = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται* **αφφινική συνάρτηση**.

Δηλαδή, οι γραμμικές συναρτήσεις αποτελούν υποκατηγορία των αφφινικών συναρτήσεων.

Γνωρίζουμε ότι οι γραμμικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις των οποίων τα γραφήματα είναι μη-κατακόρυφες ευθείες οι οποίες περιέχουν το σημείο $(0, 0)$. Οι αφφινικές συναρτήσεις είναι, απλώς, οι συναρτήσεις των οποίων τα γραφήματα είναι μη-κατακόρυφες ευθείες. Σε κάθε αφφινική συνάρτηση αντιστοιχεί ακριβώς μια γραμμική συνάρτηση, η οποία να είναι τέτοια ώστε οι δυο συναρτήσεις να έχουν παράλληλα γραφήματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση L ώστε $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-L(x-\xi)}{x-\xi} = 0$, τότε η L ονομάζεται* **διαφορικό** *της f στον ξ.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Υπάρχει διαφορικό της f στον ξ αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Επίσης, το διαφορικό της f στον ξ, αν υπάρχει, είναι μοναδικό και είναι εκείνη η γραμμική συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι ευθεία παράλληλη με την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Τότε

$$\lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) \quad \text{και} \quad f'(\xi) \in \mathbb{R},$$

οπότε

$$\lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)\cdot(x-\xi)}{x-\xi} = 0. \tag{5.2}$$

Άρα, αν θεωρήσουμε τη γραμμική συνάρτηση

$$L(x) = f'(\xi) \cdot x, \tag{5.3}$$

τότε η (5.2) γράφεται

$$\lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)-L(x-\xi)}{x-\xi} = 0$$

και, επομένως, η συνάρτηση L είναι διαφορικό της f στον ξ.
Αντιστρόφως, έστω ότι μια γραμμική συνάρτηση

$$L(x) = \mu \cdot x \tag{5.4}$$

είναι διαφορικό της f στον ξ, οπότε

$$\lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)-\mu\cdot(x-\xi)}{x-\xi} = 0.$$

Συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \mu.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi) = \mu$, οπότε ο τύπος (5.4) της L γράφεται $L(x) = f'(\xi) \cdot x$, δηλαδή γίνεται ο (5.3). Αυτό αποδεικνύει και τη μοναδικότητα της συνάρτησης L, δηλαδή του διαφορικού της f στον ξ.

Είδαμε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, τότε το διαφορικό της f στον ξ είναι η γραμμική συνάρτηση $f'(\xi)\cdot x$ το γράφημα της οποίας είναι, φυσικά, ευθεία που περιέχει το σημείο $(0,0)$. Τώρα, η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει, όπως έχουμε δει, εξίσωση $f'(\xi)\cdot(x-\xi)+f(\xi) = f'(\xi)\cdot x + f(\xi) - f'(\xi)\cdot\xi$. Οι δυο αυτές ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή του x, οπότε είναι παράλληλες. □

Ασκήσεις.

5.1.1. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$, $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+2}$, $f(x) = \operatorname{sign} x$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \leq 0 \\ -3x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ -3x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$ και $f(x) = (x^2+1)\operatorname{sign} x$. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις $f'(0)$, $f'_+(0)$, $f'_-(0)$.

5.1.2. Έστω $M \geq 0$, $\rho > 1$, $\delta > 0$ και έστω ότι ισχύει $|f(x) - f(\xi)| \leq M|x-\xi|^\rho$ για κάθε $x \in (\xi-\delta, \xi+\delta)$. Αποδείξτε ότι $f'(\xi) = 0$.

5.1.3. Έστω η $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ ax + b, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Βρείτε τους a, b ώστε να υπάρχει η $f'(0)$.

Κάντε το ίδιο για την $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ ax + b, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

5.1.4. Έστω $g : (a, \xi] \to \mathbb{R}$, $h : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ ώστε $g(\xi) = h(\xi)$ και $g'(\xi) = h'(\xi)$ και έστω η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } a < x \leq \xi \\ h(x), & \text{αν } \xi \leq x < b \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(\xi) = g'(\xi) = h'(\xi)$.

5.1.5. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ του παραδείγματος 5.1.6 αν και συνεχής στον 0, δεν έχει πλευρικές παραγώγους στον 0. Σχεδιάστε το γράφημα της f και μελετήστε τη συμπεριφορά καθώς $x \to 0+$ της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ με κορυφή το σταθερό σημείο $(0,0)$ η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$. Τείνει να ταυτιστεί η $l_{x,+}$ με κάποια ημιευθεία με κορυφή το σημείο $(0,0)$; Κάντε το ίδιο καθώς $x \to 0-$ για την ημιευθεία $l_{x,-}$ με κορυφή το σημείο $(0,0)$ η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$.

Η $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ του παραδείγματος 5.1.7 είναι συνεχής στον 0 και $f'(0) = 0$. Όπως πριν, μελετήστε τη συμπεριφορά καθώς $x \to 0+$ και $x \to 0-$ των ημιευθειών $l_{x,+}$ και $l_{x,-}$, αντιστοίχως, με κορυφή το σημείο $(0,0)$ οι οποίες διέρχονται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$.

5.1.6. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$. Σχεδιάστε το γράφημα της f. Παρατηρήστε ότι όσο θέλουμε κοντά στον 0 υπάρχουν σημεία ασυνέχειας της f.

Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Μπορείτε να σχεδιάσετε το γράφημα της f;

5.1.7. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ αν και μόνο αν υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ ώστε να ισχύει $f(x) - f(\xi) = g(x)(x-\xi)$ για κάθε $x \in A$.[1]

[1] Αυτή η ισοδύναμη με την παραγωγισιμότητα πρόταση "*υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ ώστε να ισχύει $f(x) - f(\xi) = g(x)(x-\xi)$ για κάθε $x \in A$*" είναι ο **ορισμός του Caratheodory** για την παραγωγισιμότητα.

5.1.8. Γνωρίζουμε από τη στοιχειώδη γεωμετρία ότι κάθε ευθεία η οποία εφάπτεται σε έναν κύκλο δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο εκτός από το σημείο επαφής. Ισχύει αυτό γενικότερα; Θεωρήστε την τετραγωνική παραβολή με εξίσωση $y = x^2$. Σε κάθε σημείο της καμπύλης υπολογίστε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη στο σημείο αυτό και βρείτε πόσα κοινά σημεία έχει η εφαπτόμενη ευθεία με την καμπύλη.

Κάντε το ίδιο για την κυβική παραβολή με εξίσωση $y = x^3$ καθώς και με τις $y = x^4$ και $y = x^2(x-1)^2$.

Γενικεύστε: πόσα σημεία κοινά μπορεί να έχουν η καμπύλη $y = p(x)$, όπου p είναι πολυώνυμο βαθμού n, με την εφαπτόμενή της ευθεία σε οποιοδήποτε σημείο της;

5.2 Ιδιότητες των παραγώγων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ. Αν υπάρχει η μια από τις παραγώγους $f'(\xi)$, $g'(\xi)$, τότε υπάρχει και η άλλη και $f'(\xi) = g'(\xi)$.*

Απόδειξη. Επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ και επειδή $f(\xi) = g(\xi)$, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$ κοντά στον ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$. □

Στην πρόταση 5.2, αν υποθέσουμε ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ από δεξιά του ή από αριστερά του, τότε ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα για τις αντίστοιχες πλευρικές παραγώγους. Όλες οι επόμενες προτάσεις μπορούν να διατυπωθούν με τρόπο ώστε να ισχύουν και για πλευρικές παραγώγους. Θα παραλείψουμε, ως προφανείς, τις σχετικές διατυπώσεις.

Παράδειγμα 5.2.1. Η $\operatorname{sign} x$ και η σταθερή συνάρτηση 1 ταυτίζονται στο $(0, +\infty)$. Επομένως, για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$ οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται στον ξ και κοντά στον ξ. Άρα $\operatorname{sign}' \xi = 0$ για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$. Ομοίως, η $\operatorname{sign} x$ και η σταθερή συνάρτηση -1 ταυτίζονται στο $(-\infty, 0)$. Άρα $\operatorname{sign}' \xi = 0$ για κάθε $\xi \in (-\infty, 0)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, δηλαδή αν $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Επειδή ισχύει

$$f(x) = \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x - \xi) + f(\xi)$$

για κάθε $x \in A$ με $x \neq \xi$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f'(\xi)0 + f(\xi) = f(\xi),$$

οπότε η f είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 5.2.2. Η συνάρτηση $|x|$ είναι συνεχής στον 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στον 0. Άρα το αντίστροφο της πρότασης 5.3 δεν ισχύει εν γένει.

Παράδειγμα 5.2.3. Στην πρόταση 5.3 υποθέτουμε ότι $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν $f'(\xi) = \pm\infty$, η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής στον ξ. Για παράδειγμα, η $\operatorname{sign} x$ δεν είναι ούτε δεξιά ούτε αριστερά συνεχής στον 0. Όμως, $\operatorname{sign}'_+ 0 = \lim_{x\to 0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty$ και $\operatorname{sign}'_- 0 = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-0}{x-0} = +\infty$, οπότε $\operatorname{sign}' 0 = +\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, τότε οι $f + g, f - g, fg : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ. Αν, επιπλέον, ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $f/g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ.*
Επίσης:

$$(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi), \qquad (f - g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi),$$
$$(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi), \qquad \left(\tfrac{f}{g}\right)'(\xi) = \tfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Απόδειξη. Για την $f+g$ έχουμε

$(f+g)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{(f(x)+g(x))-(f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right) = f'(\xi)+g'(\xi).$

Ομοίως για την $f-g$.
Για την fg είναι:

$$\begin{aligned}(fg)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \left(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}g(x) + f(\xi)\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)\\ &= f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi).\end{aligned}$$

Τέλος, για την f/g είναι:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{f}{g}\right)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \left(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{f(\xi)}{g(\xi)g(x)}\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)\\ &= f'(\xi)\tfrac{1}{g(\xi)} - \tfrac{f(\xi)}{(g(\xi))^2}g'(\xi) = \tfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.\end{aligned}$$

□

Με τα σύμβολα των απειροστών και αφού συμβολίσουμε $y_1 = f(x)$ και $y_2 = g(x)$, γράφουμε:

$$\frac{d(y_1\pm y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \pm \frac{dy_2}{dx}, \qquad \frac{d(y_1y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx}y_2 + y_1\frac{dy_2}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{1}{y_2}\frac{dy_1}{dx} - \frac{y_1}{{y_2}^2}\frac{dy_2}{dx}.$$

Οι συμβολικές αυτές σχέσεις με "απαλοιφή" του dx συνεπάγονται τις

$$d(y_1\pm y_2) = dy_1 \pm dy_2, \quad d(y_1y_2) = y_2dy_1 + y_1dy_2, \quad d(y_1/y_2) = (1/y_2)dy_1 - (y_1/{y_2}^2)dy_2.$$

Παράδειγμα 5.2.4. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $c \in \mathbb{R}$, τότε και η $cf : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$(cf)'(\xi) = cf'(\xi).$$

Πράγματι, $(cf)'(\xi) = c'(\xi)f(\xi) + c(\xi)f'(\xi) = 0f(\xi) + cf'(\xi) = cf'(\xi)$.

Παράδειγμα 5.2.5. Μπορούμε να ξαναποδείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Πράγματι,

$$\frac{dx^2}{dx} = \frac{d(xx)}{dx} = \frac{dx}{dx}x + x\frac{dx}{dx} = 1x + x1 = 2x$$

και, αν υποθέσουμε ότι είναι $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$, τότε

$$\frac{dx^{n+1}}{dx} = \frac{d(x^nx)}{dx} = \frac{dx^n}{dx}x + x^n\frac{dx}{dx} = nx^{n-1}x + x^n1 = (n+1)x^n.$$

Παράδειγμα 5.2.6. Ισχύει

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Άρα η παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού $n \geq 1$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n-1$.

Παράδειγμα 5.2.7. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0, \ \text{ αν } n \in \mathbb{N}, n \leq 0.$$

Αν $n = 0$ και $x \neq 0$, είναι $\frac{dx^0}{dx} = \frac{d1}{dx} = 0 = 0x^{0-1}$.
Αν $n \leq -1$ και $x \neq 0$, θέτουμε $m = -n \geq 1$ και τότε:

$$\frac{dx^n}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Παράδειγμα 5.2.8. Έστω ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Τότε, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της R, δηλαδή για κάθε x ώστε $Q(x) \neq 0$, είναι $R'(x) = \frac{P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2}$. Άρα η παράγωγος ρητής συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση.

Η επόμενη ιδιότητα είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τον υπολογισμό παραγώγων. Λέει ότι η παράγωγος της σύνθεσης δυο συναρτήσεων είναι ίση με το γινόμενο των παραγώγων τους.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta = f(\xi) \in B$ σημείο συσσώρευσης του B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και η g παραγωγίσιμη στον η, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και*

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $G : B \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}, & \text{αν } y \in B, y \neq \eta \\ g'(\eta), & \text{αν } y = \eta \end{cases}$$

Η G είναι συνεχής στον η διότι

$$\lim_{y\to\eta} G(y) = \lim_{y\to\eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = g'(\eta) = G(\eta).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, είναι συνεχής στον ξ, οπότε και η $G \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ. Άρα

$$\lim_{x\to\xi} G(f(x)) = G(f(\xi)) = G(\eta) = g'(\eta). \tag{5.5}$$

Επίσης, ισχύει

$$g(y) - g(\eta) = G(y)(y - \eta) \tag{5.6}$$

για κάθε $y \in B$. Πράγματι, αν $y \in B$ και $y \neq \eta$, τότε η ισότητα ισχύει λόγω του ορισμού του $G(y)$ και, αν $y = \eta$, τότε και τα δυο μέλη της ισότητας είναι ίσα με 0.
Χρησιμοποιώντας την (5.6) με $y = f(x)$ και την (5.5), έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\xi} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} &= \lim_{x\to\xi} \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{G(f(x))(f(x)-f(\xi))}{x-\xi} \\ &= \lim_{x\to\xi} G(f(x)) \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = g'(\eta)f'(\xi).\end{aligned}$$

Άρα $(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi)$. □

Συμβολίζοντας $y = f(x)$ και $z = g(y)$, γράφουμε με τα σύμβολα των απειροστών: $\frac{dz}{dy} = g'(\eta)$ και $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$. Επίσης, επειδή $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, είναι $\frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(\xi)$. Επομένως, η σχέση $(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi)$ γράφεται, με τα σύμβολα των απειροστών,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{5.7}$$

Προσέξτε την "απλοποίηση" η οποία "συμβαίνει" στον τύπο (5.7). Προσέξτε πώς ο ίδιος τύπος, με "απαλοιφή" του dx, καταλήγει στον γνωστό μας τύπο $dz = \frac{dz}{dy}dy$.

Παράδειγμα 5.2.9. Έστω η συνάρτηση $h(x) = (x^2 + 3)^5$. Θα υπολογίσουμε την $h'(2)$.
Θεωρούμε τις $f(x) = x^2 + 3$ και $g(y) = y^5$. Τότε $h = g \circ f$, οπότε $h'(2) = g'(f(2))f'(2) = g'(7)f'(2) = 5 \cdot 7^4 \cdot 4$.
Γενικά:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 5(f(x))^4 f'(x) = 10x(x^2 + 3)^4$$

για κάθε x.
Με τα απειροστά, γράφουμε $y = x^2 + 3$ και $z = y^5$ και τότε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 5y^4 2x = 10x(x^2 + 3)^4.$$

Θα κάνουμε μια διαφωτιστική παρατήρηση σχετικά με τον κανόνα αλυσίδας. Θα υποθέσουμε *επιπλέον* ότι η f είναι ένα-προς-ένα και θα δούμε μια *δεύτερη απόδειξη* του κανόνα. Αν η f είναι ένα-προς-ένα, τότε, αν $x \neq \xi$, συνεπάγεται $f(x) \neq f(\xi)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\tfrac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \tfrac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)} \, \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \tfrac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} \, \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}. \tag{5.8}$$

Τώρα, επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, οπότε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$, υπολογίζουμε το όριο

$$(g \circ f)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \lim_{y\to\eta} \tfrac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = g'(\eta)f'(\xi).$$

Θα παρατηρήσουμε ότι με τα σύμβολα $y = f(x)$ και $z = g(y)$ η σχέση (5.8) γράφεται

$$\tfrac{\Delta z}{\Delta x} = \tfrac{\Delta z}{\Delta y} \, \tfrac{\Delta y}{\Delta x} \, ,$$

οπότε, παίρνοντας όρια, καταλήγουμε στη συμβολική σχέση (5.7) με τα απειροστά.

Αυτή η απόδειξη είναι τελείως "διαφανής" ως προς την πραγματική σχέση ανάμεσα στις διαφορές των τριών μεταβλητών x, y και z και την συνεπαγόμενη σχέση ανάμεσα στα αντίστοιχα απειροστά των τριών μεταβλητών. Δυστυχώς, η απλή αυτή απόδειξη δεν λειτουργεί στη γενική περίπτωση, διότι, αν η f δεν είναι ένα-προς-ένα, τότε η διαφορά $\Delta y = y - \eta = f(x) - f(\xi)$ μπορεί να είναι ίση με 0 ακόμη κι αν η $\Delta x = x - \xi$ δεν είναι ίση με 0.[2]

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι *αύξουσα στο* A και ότι υπάρχει η $f'(\xi)$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq \xi$ και, επομένως, $f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$.
Ομοίως, αν η f είναι φθίνουσα στο A και υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε είναι $f'(\xi) \leq 0$.

Αν η συνάρτηση είναι μονότονη στο $A \cap (-\infty, \xi]$ ή στο $A \cap [\xi, +\infty)$, τότε έχουμε ανάλογα συμπεράσματα για το πρόσημο των αντίστοιχων $f'_-(\xi)$ ή $f'_+(\xi)$.

Η επόμενη ιδιότητα λέει ότι η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης είναι ίση με το αντίστροφο της παραγώγου της συνάρτησης.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. [3] *Έστω διάστημα I, $\xi \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο I και $\eta = f(\xi)$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα, έστω J, ότι, φυσικά, $\eta \in J$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J. Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε υπάρχει και η $(f^{-1})'(\eta)$ και*

$$(f^{-1})'(\eta) = \begin{cases} 1/f'(\xi), & \text{αν } 0 < f'(\xi) < +\infty \\ 0, & \text{αν } f'(\xi) = +\infty \\ +\infty, & \text{αν } f'(\xi) = 0 \end{cases}$$

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύουν τα ίδια αλλά με τις αντίθετες ανισότητες και με $-\infty$ αντί $+\infty$.

Απόδειξη. Έστω $f'(\xi) \in \mathbb{R}$ και $f'(\xi) > 0$. Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής στον η, συνεπάγεται $\lim_{y\to\eta} f^{-1}(y) = \xi$, οπότε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x = f^{-1}(y)$, βρίσκουμε

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y\to\eta} \tfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}{y-\eta} = \lim_{x\to\xi} \tfrac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \lim_{x\to\xi} 1\big/\big(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\big) = \tfrac{1}{f'(\xi)}.$$

Αν $f'(\xi) = +\infty$, τότε το τελευταίο όριο είναι ίσο με $\frac{1}{+\infty} = 0$, οπότε $(f^{-1})'(\eta) = 0$.
Τέλος, αν $f'(\xi) = 0$, τότε, επειδή ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε $x \in I$ με $x \neq \xi$, το τελευταίο όριο είναι ίσο με $+\infty$, οπότε $(f^{-1})'(\eta) = +\infty$. □

[2] Η απόδειξη αυτή μπορεί να προσαρμοστεί και στην γενική περίπτωση αλλά χάνει την απλότητά της.
[3] Στην άσκηση 5.2.18 υπάρχει μια άλλη μορφή του κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.

Θα διατυπώσουμε τη σχέση $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$ με τα σύμβολα των απειροστών. Γράφουμε $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$. Τότε $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$ και $\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(\eta)$. Άρα η $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$ γράφεται

$$\tfrac{dx}{dy} = 1/\big(\tfrac{dy}{dx}\big).$$

Παρατηρήστε ότι η σχέση αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από το όριο της προφανούς σχέσης

$$\tfrac{\Delta x}{\Delta y} = 1/\big(\tfrac{\Delta y}{\Delta x}\big),$$

η οποία χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του κανόνα αντίστροφης συνάρτησης. Παρατηρήστε, επίσης, την "απλοποίηση" του "σύνθετου λόγου" η οποία "υφίσταται" στον τύπο $\frac{dx}{dy} = 1/(\frac{dy}{dx})$.

Τα βασικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.2.10. Η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $y = x^n$, περιορισμένη στο $[0, +\infty)$, έχει ως αντίστροφη την $x = \sqrt[n]{y}$ με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Επομένως,

$$\tfrac{dx}{dy} = 1/(\tfrac{dy}{dx}) = \tfrac{1}{nx^{n-1}} = \tfrac{x}{nx^n} = \tfrac{\sqrt[n]{y}}{ny}$$

για $y > 0$. Αν $y = 0$, τότε, επειδή $\frac{dy}{dx}(0) = 0$, είναι $\frac{dx}{dy}(0) = +\infty$. Άρα

$$\tfrac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \begin{cases} \sqrt[n]{y}/(ny), & \text{αν } y > 0 \\ +\infty, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$$

Αυτό είναι ειδική περίπτωση του αμέσως επόμενου παραδείγματος αλλά θα χρησιμοποιηθεί και στην απόδειξή του.

Παράδειγμα 5.2.11. Με το παράδειγμα αυτό θα έχουμε καλύψει την παράγωγο της συνάρτησης δύναμη σε όλες τις περιπτώσεις ρητού εκθέτη.
Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{dx^r}{dx} = rx^{r-1} \qquad \text{για κάθε } \ x > 0, \ \text{ αν } \ r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}.$$

Πράγματι, έστω $r = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, οπότε $x^r = (\sqrt[n]{x})^m$. Θέτουμε $y = \sqrt[n]{x}$ και $z = x^r = y^m$ και τότε

$$\tfrac{dx^r}{dx} = \tfrac{dz}{dx} = \tfrac{dz}{dy}\tfrac{dy}{dx} = my^{m-1}\tfrac{\sqrt[n]{x}}{nx} = \tfrac{m(\sqrt[n]{x})^{m-1}\sqrt[n]{x}}{nx} = \tfrac{m}{n}x^{(m/n)-1} = rx^{r-1}.$$

Αν $r > 1$ και $x = 0$, τότε

$$\tfrac{dx^r}{dx}(0) = \tfrac{dx^r}{dx+}(0) = \lim_{x \to 0+} \tfrac{x^r - 0^r}{x-0} = \lim_{x \to 0+} x^{r-1} = 0 = r0^{r-1},$$

οπότε και σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει ο προηγούμενος γενικός τύπος για την παράγωγο της x^r.
Αν $0 < r < 1$ και $x = 0$, τότε

$$\tfrac{dx^r}{dx}(0) = \tfrac{dx^r}{dx+}(0) = \lim_{x \to 0+} \tfrac{x^r - 0^r}{x-0} = \lim_{x \to 0+} x^{r-1} = +\infty.$$

Ακριβώς στην περίπτωση $0 < r < 1$ εντάσσεται το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος 5.2.10, στο οποίο είναι $r = 1/n$.
Τέλος, αν $r < 0$, τότε ο 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της x^r, οπότε η παράγωγος στον 0 δεν έχει καν νόημα.

Παράδειγμα 5.2.12. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{d\log_a x}{dx} = \tfrac{1}{\log a}\,\tfrac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } \ x > 0.$$

Κατ' αρχάς θεωρούμε την περίπτωση $a = e$ και θυμόμαστε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\tfrac{t}{x})^x = e^t$$

που είδαμε στο παράδειγμα 4.2.10. Τώρα,

$$\begin{aligned}\tfrac{d\log x}{dx+} &= \lim_{h\to 0+}\tfrac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0+}\tfrac{1}{h}\log(1+\tfrac{h}{x})\\ &= \lim_{y\to+\infty}\log(1+\tfrac{1/x}{y})^y = \lim_{z\to e^{1/x}}\log z = \log e^{1/x} = \tfrac{1}{x}.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\tfrac{d\log x}{dx-} &= \lim_{h\to 0-}\tfrac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0-}\tfrac{1}{h}\log(1+\tfrac{h}{x})\\ &= -\lim_{y\to+\infty}\log(1+\tfrac{-1/x}{y})^y = -\lim_{z\to e^{-1/x}}\log z = -\log e^{-1/x} = \tfrac{1}{x}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\tfrac{d\log x}{dx} = \tfrac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } \ x > 0.$$

Στη γενική περίπτωση γράφουμε $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ και βρίσκουμε $\frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{\log a}\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

Παράδειγμα 5.2.13. Ισχύει

$$\tfrac{d\log|x|}{dx} = \tfrac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } \ x \neq 0.$$

Πράγματι, αν $x > 0$, τότε αναγόμαστε στο προηγούμενο παράδειγμα και, αν $x < 0$, τότε με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = -x = |x|$ έχουμε

$$\tfrac{d\log|x|}{dx} = \tfrac{d\log y}{dy}\tfrac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{y} = \tfrac{1}{x}.$$

Παράδειγμα 5.2.14. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{da^x}{dx} = a^x\log a \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης από το προηγούμενο παράδειγμα καθώς και το ότι οι $y = a^x$ και $x = \log_a y$ είναι αντίστροφες συναρτήσεις. Πράγματι,

$$\tfrac{dy}{dx} = 1/\big(\tfrac{dx}{dy}\big) = 1/\big(\tfrac{1}{\log a}\tfrac{1}{y}\big) = y\log a.$$

Φυσικά, στην ειδική περίπτωση $a = e$ έχουμε

$$\tfrac{de^x}{dx} = e^x \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

Παράδειγμα 5.2.15. Βάσει των ορισμών των υπερβολικών συναρτήσεων και των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\tfrac{d\cosh x}{dx} = \sinh x, \quad \tfrac{d\sinh x}{dx} = \cosh x, \quad \tfrac{d\tanh x}{dx} = \tfrac{1}{(\cosh x)^2}, \quad \tfrac{d\coth x}{dx} = -\tfrac{1}{(\sinh x)^2}.$$

Επίσης, αν $x = \operatorname{arccosh} y$ και $y = \cosh x$ για $y > 1$ και $x > 0$, τότε

$$\tfrac{dx}{dy} = 1/\big(\tfrac{dy}{dx}\big) = \tfrac{1}{\sinh x} = \tfrac{1}{\sqrt{(\cosh x)^2-1}} = \tfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Στην ισότητα $\sinh x = \pm\sqrt{(\cosh x)^2 - 1}$ κρατήσαμε το πρόσημο $+$ διότι ισχύει $\sinh x > 0$ για κάθε $x > 0$.
Ομοίως, αν $x = \operatorname{arcsinh} y$ και $y = \sinh x$, τότε

$$\tfrac{dx}{dy} = 1/\big(\tfrac{dy}{dx}\big) = \tfrac{1}{\cosh x} = \tfrac{1}{\sqrt{(\sinh x)^2+1}} = \tfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Εδώ γράψαμε $\cosh x = \sqrt{(\sinh x)^2 + 1}$ διότι ισχύει $\cosh x > 0$ για κάθε x.
Άρα
$$\frac{d\,\mathrm{arccosh}\, y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \text{για } y > 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{d\,\mathrm{arcsinh}\, y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \quad \text{για κάθε } y.$$
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι
$$\frac{d\,\mathrm{arctanh}\, y}{dy} = \frac{1}{1-y^2} \quad \text{για } |y| < 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{d\,\mathrm{arccoth}\, y}{dy} = \frac{1}{1-y^2} \quad \text{για } |y| > 1.$$

Παράδειγμα 5.2.16. Με το παράδειγμα αυτό θα έχουμε καλύψει πλήρως την παράγωγο της συνάρτησης δύναμη σε όλες τις περιπτώσεις πραγματικού εκθέτη.
$$\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1} \qquad \text{για κάθε } \ x > 0, \ \ \text{αν } \ a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$
Τώρα γράφουμε $x^a = e^{a \log x}$ και θέτουμε $z = x^a$ και $y = a \log x$, οπότε $z = e^y$, και βρίσκουμε
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = e^y a \frac{1}{x} = za\frac{1}{x} = x^a a \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$
Αν $a > 1$ και $x = 0$, τότε
$$\frac{dx^a}{dx}(0) = \frac{dx^a}{dx+}(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{x^a - 0^a}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} = 0 = a0^{a-1},$$
οπότε και σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει ο προηγούμενος γενικός τύπος για την παράγωγο της x^a.
Αν $0 < a < 1$ και $x = 0$, τότε
$$\frac{dx^a}{dx}(0) = \frac{dx^a}{dx+}(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{x^a - 0^a}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} = +\infty.$$
Τέλος, αν $a < 0$, τότε ο 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της x^a, οπότε η παράγωγος στον 0 δεν έχει νόημα.

Παράδειγμα 5.2.17. Θα υπολογίσουμε τις παραγώγους συναρτήσεις των τριγωνομετρικών και των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
Είναι
$$\frac{d\,\cos x}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\cos x - \cos \xi}{x - \xi} = -\lim_{x\to\xi} \frac{\sin((x-\xi)/2)}{(x-\xi)/2} \sin((x+\xi)/2) = -\sin\xi$$
και
$$\frac{d\,\sin x}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\sin((x-\xi)/2)}{(x-\xi)/2} \cos((x+\xi)/2) = \cos\xi$$
για κάθε ξ. Άρα
$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \qquad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x.$$
Ακόμη, έχουμε
$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}, \qquad \cot' x = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2}.$$
Άρα
$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}, \qquad \frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{(\sin x)^2}.$$
Αν $x = \arcsin y$ και $y = \sin x$ για $-1 < y < 1$ και $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, τότε
$$\frac{d\arcsin y}{dy} = \frac{dx}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$
Στην ισότητα $\cos x = \pm\sqrt{1-(\sin x)^2}$ κρατήσαμε το πρόσημο $+$ διότι ισχύει $\cos x > 0$ όταν $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
Ομοίως, αν $x = \arccos y$ και $y = \cos x$ για $-1 < y < 1$ και $0 < x < \pi$, τότε
$$\frac{d\arccos y}{dy} = \frac{dx}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Πάλι, στην ισότητα $\sin x = \pm\sqrt{1-(\cos x)^2}$ κρατήσαμε το πρόσημο $+$ διότι ισχύει $\sin x > 0$ όταν $0 < x < \pi$.

Άρα

$$\frac{d\,\arcsin y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{για } |y| < 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{d\,\arccos y}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{για } |y| < 1.$$

Τώρα, με $x = \arctan y$ και $y = \tan x$ για $y \in \mathbb{R}$ και για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$\frac{d\,\arctan y}{dy} = \frac{dx}{dy} = 1/\big(\frac{dy}{dx}\big) = (\cos x)^2 = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\frac{d\,\mathrm{arccot}\, y}{dy} = -\frac{1}{1+y^2}$, οπότε

$$\frac{d\,\arctan y}{dy} = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{για κάθε } y \qquad \text{και} \qquad \frac{d\,\mathrm{arccot}\, y}{dy} = -\frac{1}{1+y^2} \quad \text{για κάθε } y.$$

Ασκήσεις.

5.2.1. Από την ισότητα $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1$ βρείτε ανάλογες ισότητες για τα αθροίσματα $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$ και $x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^n$.

5.2.2. Παρατηρήστε ότι τα όρια $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1}$ είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και *ως τέτοιες* υπολογίστε τα.
Βάσει των προηγουμένων βρείτε τα $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^a-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-x^b}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-x^b}{\log x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{x(e^{ax}+e^{-ax})}$.

5.2.3. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $\arcsin(\sin x)$, $\sin(\arcsin x)$.

5.2.4. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $\log_3(\sin x)$, $x\log(x\log(x\log(x\log x)))$, $\log_x 3$.

5.2.5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Βρείτε την f'.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Βρείτε την f' και δείτε αν είναι συνεχής.

Γενικεύστε. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^a\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Για ποιές τιμές του a είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$; είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$; είναι η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$;

5.2.6. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, βρείτε τα $\lim_{h\to 0} \big(\frac{f(\xi+h)}{f(\xi)}\big)^{1/h}$ και $\lim_{x\to\xi} \big(\frac{f(x)}{f(\xi)}\big)^{1/(\log x - \log \xi)}$. Για το δεύτερο όριο υποθέτουμε επιπλέον ότι $A \subseteq (0, +\infty)$.

5.2.7. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, αποδείξτε ότι και η $f^g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και υπολογίστε την $(f^g)'(\xi)$.
Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των x^x, $(x^2+1)^{\log x}$, $|x-1|^{x-2}|x-2|^{x-1}$.

5.2.8. [4] Έστω ότι ο αριθμός ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου P, δηλαδή $P(\xi) = 0$. Λέμε ότι ο $k \in \mathbb{N}$ είναι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του P αν υπάρχει πολυώνυμο Q ώστε να ισχύει $P(x) = (x-\xi)^k Q(x)$ για κάθε x και $Q(\xi) \neq 0$. Το ότι $Q(\xi) \neq 0$ ισοδυναμεί με το ότι το πολυώνυμο Q δεν διαιρείται από το $x - \xi$. Άρα η πολλαπλότητα της ρίζας ξ του πολυωνύμου P είναι

[4] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην 5.3.11. Η έννοια της πολλαπλότητας ρίζας θα γενικευτεί για μη-πολυωνυμικές συναρτήσεις στην άσκηση 5.6.13.

ο μέγιστος εκθέτης k ώστε το $(x-\xi)^k$ να διαιρεί το P. Αν ο ξ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου P, δηλαδή $P(\xi)\neq 0$, επεκτείνουμε τον ορισμό της έννοιας της πολλαπλότητας, λέγοντας ότι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του P είναι 0. Είναι προφανές ότι η πολλαπλότητα μιας ρίζας πολυωνύμου δεν υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου.

Έστω ότι ο ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου P. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k\in\mathbb{N}$ του P αν και μόνο αν είναι ρίζα πολλαπλότητας $k-1$ του P'.

5.2.9. Έστω $f_1,\dots,f_n : A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι $f_1,\dots,f_n$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ και $f_1(\xi)\cdots f_n(\xi)\neq 0$ και $g=f_1\cdots f_n : A\to\mathbb{R}$, αποδείξτε *με δύο τρόπους* ότι $\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f_1{}'(\xi)}{f_1(\xi)}+\cdots+\frac{f_n{}'(\xi)}{f_n(\xi)}$.

5.2.10. Για ποιές ρητές συναρτήσεις R ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\frac{xR'(x)}{R(x)}=0$;

5.2.11. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a,b) και καμιά ρητή συνάρτηση R ώστε να ισχύει $R'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(a,b)$.

5.2.12. Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.

5.2.13. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $\xi\in A$ από δεξιά του και αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Θεωρούμε και την $|f|:A\to\mathbb{R}$.
Αν $f(\xi)\neq 0$, αποδείξτε ότι $|f|'(\xi)=\mathrm{sign}(f(\xi))\,f'(\xi)$.
Αν $f(\xi)=0$ και $f'(\xi)=0$, αποδείξτε ότι $|f|'(\xi)=0$.
Αν $f(\xi)=0$ και $f'(\xi)\neq 0$, αποδείξτε ότι η $|f|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αποδείξτε, όμως, ότι $|f|'_+(\xi)=|f'(\xi)|$ και $|f|'_-(\xi)=-|f'(\xi)|$.

5.2.14. Έστω πολυωνυμικές συναρτήσεις P, Q, όπου η P έχει βαθμό $n\geq 2$ και n διαφορετικές ανά δύο ρίζες $x_1,\dots,x_n$ και η Q έχει βαθμό $\leq n-1$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^n\frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$.
Υπολογίστε το $\sum_{k=1}^n\frac{1}{P'(x_k)}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)}=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{x+k}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,\dots,-m\}$.

5.2.15. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ συνεχής στο A ώστε να ισχύει $(f(x))^2+4f(x)=x^3-5x^2-9x+41$ για κάθε $x\in A$. Αποδείξτε ότι ισχύει $(2f(x)+4)f'(x)=3x^2-10x-9$ για κάθε $x\in A$ στον οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Βρείτε το μέγιστο δυνατό σύνολο A, αποδείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις τέτοιες f για αυτό το A και βρείτε τους τύπους τους και τους τύπους των αντίστοιχων f'.

5.2.16. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x^2+3x+7$. Αποδείξτε με στοιχειώδη τρόπο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της f; Χωρίς να βρείτε τον τύπο της f^{-1}, αποδείξτε ότι $\big(f^{-1}\big)'(y)=\begin{cases}(1/3)(f^{-1}(y)+1)^{-2}, & \text{αν } y\neq 6\\ +\infty, & \text{αν } y=6\end{cases}$ Τέλος, βρείτε τον τύπο της f^{-1}, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της και επαληθεύστε την παραπάνω ισότητα.

5.2.17. Τι συμπεράσματα προκύπτουν για την παράγωγο καθεμιάς από τις συναρτήσεις g που εμφανίζονται στις ασκήσεις 4.5.9, 4.5.10 και 4.5.11;

5.2.18. [5] Έστω $f:A\to B$ ένα-προς-ένα στο A και επί του B και η αντίστροφη $f^{-1}:B\to A$. Έστω $\xi\in A$ σημείο συσσώρευσης του A, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ ότι $f'(\xi)\neq 0$ και ότι η f^{-1} είναι συνεχής στον $\eta=f(\xi)$.
Αποδείξτε ότι ο η είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στον η και

[5] Ένα ουσιαστικό αποτέλεσμα για την παραγωγισιμότητα της αντίστροφης συνάρτησης.

ισχύει $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$.
Μερικές φορές συναντά κανείς την εξής “απόδειξη” του $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$. *Από το ότι ισχύει* $f^{-1}(f(x))) = x$ *για κάθε* $x \in A$ *και από τον κανόνα αλυσίδας συνεπάγεται* $(f^{-1})'(\eta)f'(\xi) = 1$. *Άρα υπάρχει η* $(f^{-1})'(\eta)$ *και* $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$. Πεισθήτε ότι υπάρχει λογικό λάθος στην απόδειξη αυτή. Η αποτυχημένη αυτή απόδειξη λειτουργεί μόνον αν *υποθέσουμε* (ή γνωρίζουμε) την ύπαρξη της $(f^{-1})'(\eta)$ και, τότε, αποδεικνύει την ισότητα $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$.

5.2.19. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, βρείτε το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x)}{x-\xi}$.

5.2.20. [6] Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A, f παραγωγίσιμη στο ξ και ακολουθίες $({x_n}')$, $({x_n}'')$ στο A ώστε ${x_n}' \to \xi$, ${x_n}'' \to \xi$.
Αν ${x_n}' < \xi < {x_n}''$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{f({x_n}')-f({x_n}'')}{{x_n}'-{x_n}''} \to f'(\xi)$.
Αν ισχύει $|\frac{{x_n}'-\xi}{{x_n}'-{x_n}''}| \leq M$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{f({x_n}')-f({x_n}'')}{{x_n}'-{x_n}''} \to f'(\xi)$.
Θεωρήστε τη συνάρτηση f στο παράδειγμα 5.1.7 (και στην άσκηση 5.1.5). Επίσης, έστω ${x_n}' = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ και ${x_n}'' = \frac{1}{(-\pi/2)+2n\pi}$ για κάθε n. Η f είναι παραγωγίσμη στον 0 και ${x_n}' \to 0$, ${x_n}'' \to 0$, αλλά $\frac{f({x_n}')-f({x_n}'')}{{x_n}'-{x_n}''} \not\to f'(0)$.

5.2.21. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στον ξ.
Αποδείξτε ότι $n\big(f(\xi + \frac{1}{n}) + f(\xi + \frac{2}{n}) + \cdots + f(\xi + \frac{k}{n}) - kf(\xi)\big) \to \frac{k(k+1)}{2} f'(\xi)$.
Αποδείξτε ότι $f(\xi + \frac{1}{n^2}) + f(\xi + \frac{2}{n^2}) + \cdots + f(\xi + \frac{n}{n^2}) - nf(\xi) \to \frac{1}{2} f'(\xi)$.

5.2.22. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στον 0 και $0 < \mu < 1$ και $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(\mu x)}{x} = b \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f'(0) = \frac{b}{1-\mu}$.

5.2.23. Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός κύβου ως προς το μήκος της ακμής του είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς του.

Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου ως προς το μήκος της διαμέτρου του είναι ίσος με το μισό του μήκους της αντίστοιχης περιφέρειάς του.

Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου μιας σφαίρας ως προς το μήκος της διαμέτρου της είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς της.

Διακρίνετε κάτι κοινό στα τρία προηγούμενα συμπεράσματα; Δοκιμάστε να διατυπώσετε παρόμοια συμπεράσματα για περισσότερα σχήματα του επιπέδου ή του χώρου. Διατυπώστε ένα παρόμοιο συμπέρασμα για ένα απλό σχήμα πάνω σε μια ευθεία: ένα ευθύγραμμο τμήμα, για παράδειγμα.

5.2.24. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου έχει μήκος κ και ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του δίσκου ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή.

5.2.25. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός σφαιρικού μπαλονιού έχει μήκος κ και η ποσότητα του αέρα στο μπαλόνι έχει ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή;

5.2.26. Μια μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στη μια πλευρά και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά μιας ορθής γωνίας. Αν το ένα άκρο απομακρύνεται από την κορυφή της γωνίας με ταχύτητα v (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας), βρείτε την ταχύτητα με την οποία το άλλο άκρο πλησιάζει την κορυφή (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας). Βρείτε, επίσης, τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ενός από τα άκρα από την κορυφή ως προς την απόσταση του άλλου άκρου από την κορυφή.

[6] Μερικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά των χορδών του γραφήματος μιας συνάρτησης όταν αυτές πλησιάζουν ένα σημείο του γραφήματος στο οποίο υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Άλλες φορές οι κλίσεις των χορδών τείνουν στην κλίση της εφαπτόμενης ευθείας και άλλες φορές όχι. Συνέχεια αυτής της άσκησης είναι η άσκηση 5.3.17.

5.2.27. Ένα όχημα κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y^2 = 4x^3$. Σε ποιά θέση του οχήματος ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της δεύτερης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο); Καλό θα ήταν να *μη* λύσετε ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές x, y.

5.2.28. Αυτή είναι η *πιο σημαντική* άσκηση του βιβλίου.
Επιστρατεύστε τη φαντασία σας και δικαιολογήστε τον όρο "κανόνας αλυσίδας" για τη σχέση $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης. Μην ξεχνάτε ότι όλα όσα περιέχονται σ' αυτό το βιβλίο προέρχονται από την προσεκτική παρατήρηση του κόσμου που μας περιβάλλει.

5.3 Τα τέσσερα βασικά θεωρήματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$.*
Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** *της f αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$.*
Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** *της f αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$.*
Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ακροτάτου** *της f αν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου.*

Είναι προφανές ότι, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) μεγίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού μεγίστου. Ομοίως, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) ελαχίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FERMAT. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'(\xi)$ είτε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Δηλαδή, έστω ότι ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ κοντά στον ξ.
Έστω ότι υπάρχει η $f'(\xi)$, οπότε $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$.
Ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα

$$f'(\xi) = f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0.$$

Επίσης, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του. Άρα

$$f'(\xi) = f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0.$$

Άρα $f'(\xi) = 0$.
Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε επαναλαμβάνουμε τους ίδιους συλλογισμούς με ≥ 0 αντί ≤ 0 και αντιστρόφως. $\square$

Το θεώρημα του Fermat λέει ότι, αν η f έχει παράγωγο σε σημείο τοπικού ακροτάτου της το οποίο είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο αντίστοιχο σημείο του γραφήματός της είναι οριζόντια.

Υπενθυμίζουμε ότι όταν γράφουμε $f'(\xi)$ ή όταν λέμε ότι η $f'(\xi)$ υπάρχει εννοούμε ότι η τιμή της μπορεί να είναι και $\pm\infty$.

Συνήθως, το θεώρημα του Fermat εφαρμόζεται με συνάρτηση f ορισμένη σε *διάστημα* A. Τότε ο ξ πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος ώστε να είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του διαστήματος.

Παράδειγμα 5.3.1. Ο 0 είναι σημείο ελαχίστου της συνάρτησης $|x|$ αλλά δεν υπάρχει η $\frac{d|x|}{dx}(0)$.

Παράδειγμα 5.3.2. Ο 0 είναι σημείο ελαχίστου της x^2 και $\frac{dx^2}{dx}(0) = 0$.

Παράδειγμα 5.3.3. Είναι $\frac{dx^3}{dx}(0) = 0$ αλλά ο 0 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της x^3. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat.

Το θεώρημα του Fermat μας δίνει το εξής πρακτικό πόρισμα. Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να ψάξουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία: τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0. Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 5.3.4. Έστω η $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$. Τότε $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$, οπότε τα μόνα υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της f είναι τα άκρα 0, 4 του $[0, 4]$ καθώς και οι 1, 2 στους οποίους μηδενίζεται η f'. Οι τιμές της f στα σημεία αυτά είναι 5, 37, 10, 9, αντιστοίχως.
Η f είναι συνεχής στο $[0, 4]$, οπότε έχει οπωσδήποτε σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου. Αυτά είναι οπωσδήποτε κάποια από τα παραπάνω τέσσερα σημεία και, επομένως, ο 0 είναι το σημείο ολικού ελαχίστου, οπότε η ελάχιστη τιμή της f είναι 5, και ο 4 είναι το σημείο ολικού μεγίστου, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι 37. Μένει να δούμε αν οι 1, 2 είναι σημεία τοπικού ακροτάτου.
Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, οπότε έχει σημεία ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου στο $[0, 2]$. Αυτά είναι κάποια από τα τρία σημεία $0, 1, 2$, δηλαδή τα άκρα και το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η f'. Οι αντίστοιχες τιμές της f είναι $5, 10, 9$, οπότε ο 1 είναι το σημείο ολικού μεγίστου στο $[0, 2]$ και, επομένως, είναι και σημείο τοπικού μεγίστου στο $[0, 4]$.
Ομοίως, επειδή οι τιμές στους $1, 2, 4$ είναι $10, 9, 37$, αντιστοίχως, ο 2 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[1, 4]$ και, επομένως, είναι σημείο τοπικού ελαχίστου στο $[0, 4]$.
Το παράδειγμα αυτό θα το ξαναδούμε λίγο παρακάτω με απλούστερο τρόπο.

Το θεώρημα του Fermat έχει το εξής χρήσιμο συμπλήρωμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5. [α] *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, αντιστοίχως.*
[β] *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'_-(\xi)$ είτε $f'_-(\xi) \geq 0$ ή $f'_-(\xi) \leq 0$, αντιστοίχως.*

Απόδειξη. [α] Έστω ξ σημείο τοπικού μεγίστου της f, οπότε ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ κοντά στον ξ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f'_+(\xi)$. Επειδή ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του, είναι $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$.
Η περίπτωση τοπικού ελαχίστου έχει ίδια απόδειξη.
[β] Ομοίως. □

Υπενθυμίζουμε ότι, γράφοντας $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, περιλαμβάνουμε την περίπτωση $f'_+(\xi) = -\infty$ ή $f'_+(\xi) = +\infty$, αντιστοίχως. Ομοίως για την $f'_-(\xi)$.

Παράδειγμα 5.3.5. Η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου τον 0 και $f'_+(0) = 1 \geq 0$. Η ίδια συνάρτηση έχει σημείο τοπικού μεγίστου τον 2 και $f'_-(2) = 1 \geq 0$.

Παράδειγμα 5.3.6. Η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου τον 0 και $f'_+(0) = +\infty \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLE. *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$, δηλαδή ισχύει $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε ισχύει $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (a, b)$.
Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$. Τότε είτε (i) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $> f(a) = f(b)$ είτε (ii) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $< f(a) = f(b)$. Εξετάζουμε τις δυο περιπτώσεις ξεχωριστά.
(i) Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ο οποίος είναι σημείο ολικού μεγίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μεγαλύτερη από $f(a) = f(b)$, είναι $f(\xi) > f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$.
(ii) Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ο οποίος είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μικρότερη από $f(a) = f(b)$, είναι $f(\xi) < f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$. □

Το θεώρημα του Rolle λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι οριζόντια.

Παράδειγμα 5.3.7. Η $f : [-2, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ είναι συνεχής στο $[-2, \sqrt{3}]$, υπάρχει η $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$ για κάθε $x \in (-2, \sqrt{3})$ και $f(-2) = f(\sqrt{3}) = 1$. Άρα υπάρχει $\xi \in (-2, \sqrt{3})$ ώστε $3\xi^2 + 4\xi - 3 = 0$. Για να βρούμε τον ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 3 = 0$. Οι λύσεις είναι οι $\frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$ και ανήκουν και οι δυο στο $(-2, \sqrt{3})$.

Σε σχέση με το θεώρημα του Rolle παρατηρούμε τα εξής. Κατ' αρχάς το θεώρημα δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης του ξ για τον οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$. Κατόπιν, αν η f δεν έχει παράγωγο έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a, b), τότε μπορεί να μην υπάρχει κανένας $\xi \in (a, b)$ ωστε $f'(\xi) = 0$. Τέλος, οι υποθέσεις του θεωρήματος επιτρέπουν να είναι η παράγωγος ίση με $\pm\infty$ σε σημεία του (a, b). Το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει.

Παράδειγμα 5.3.8. Η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = f(1) = 1$. Όμως, δεν υπάρχει κανένας $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Παράδειγμα 5.3.9. Έστω η $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{-x} - x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ οπότε $f(-1) = f(1) = 0$.
Τότε $f'(x) = \begin{cases} (1/(2\sqrt{x})) - 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ +\infty, & \text{αν } x = 0 \\ (1/(2\sqrt{-x})) - 1, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \end{cases}$ και είναι $f'(\xi) = 0$ για $\xi = \pm\frac{1}{4}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (LAGRANGE). *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x.$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο

$$h'(x) = (b - a)f'(x) - (f(b) - f(a))$$

στο (a, b). Επίσης, είναι $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$, οπότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$. □

Το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να έχει ίδια κλίση (οπότε να είναι παράλληλη) με την ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (CAUCHY). *Έστω* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχείς στο* $[a,b]$ *και παραγωγίσιμες στο* (a,b)*. Τότε υπάρχει* $\xi \in (a,b)$ *ώστε*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Έστω $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με παράγωγο

$$h'(x) = (g(b) - g(a))f'(x) - (f(b) - f(a))g'(x).$$

Επίσης, $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$, οπότε από την τελευταία σχέση έχουμε $(g(b) - g(a))f'(\xi) - (f(b) - f(a))g'(\xi) = 0$. □

Παρατηρήστε ότι το θεώρημα του Rolle είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange και ότι το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange είναι απλή εφαρμογή (με τη συνάρτηση $g(x) = x$) του θεωρήματος μέσης τιμής του Cauchy. Από την άλλη μεριά, το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy αποδείχτηκε ως εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle. Συμπεραίνουμε ότι *τα τρία θεωρήματα είναι ισοδύναμα*.

Πολλές φορές το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy εφαρμόζεται με κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Συγκεκριμένα, *αν* $g(a) \neq g(b)$ *και αν δεν ισχύει* $f'(x) = g'(x) = 0$ *για κανένα* $x \in (a,b)$*, τότε υπάρχει* $\xi \in (a,b)$ *ώστε*

$$\tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \tfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{5.9}$$

Πράγματι, από $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$ προκύπτει $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = f'(\xi)$. Από αυτήν συνεπάγεται ότι, αν $g'(\xi) = 0$, τότε $f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $g'(\xi) \neq 0$ και καταλήγουμε στην παραπάνω ισότητα.

Τώρα, την ισότητα (5.9) μπορούμε να την γράψουμε

$$\tfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \tfrac{(f(b)-f(a))/(b-a)}{(g(b)-g(a))/(b-a)},$$

οπότε το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy λέει ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε ο λόγος των κλίσεων των εφαπτόμενων ευθειών στα γραφήματα των f και g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ να είναι ίσος με τον λόγο των κλίσεων των ευθειών οι οποίες διέρχονται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ η πρώτη και από τα σημεία $(a, g(a))$ και $(b, g(b))$ η δεύτερη.

Ασκήσεις.

5.3.1. Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos\xi$ και ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{\sin b - \sin a}{e^b - e^a} = e^{-\xi}\cos\xi$.

5.3.2. Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{b^n - a^n}{b-a} = n\xi^{n-1}$ και ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{b^{1/n} - a^{1/n}}{b^n - a^n} = \frac{\xi^{1/n}}{n^2\xi^n}$.

5.3.3. Μπορεί, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου c, η $x^3 - 12x = c$ να έχει δυο διαφορετικές λύσεις στο $[-2,2]$; στο $(-\infty,-2]$; στο $[2,+\infty)$;

5.3.4. Αποδείξτε ότι η $x^2 = x\sin x + \cos x$ έχει ακριβώς δυο διαφορετικές λύσεις και προσδιορίστε τη θέση τους σε σχέση με τον 0.

5.3.5. Αν $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$, αποδείξτε ότι η $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

5.3.6. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική εξίσωση $x^n + ax + b = 0$ έχει το πολύ δυο διαφορετικές λύσεις, αν ο n είναι άρτιος, και το πολύ τρεις διαφορετικές λύσεις, αν ο n είναι περιττός.

5.3.7. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$ έχει ακριβώς μια λύση, αν ο n είναι περιττός, και καμιά λύση, αν ο n είναι άρτιος.

5.3.8. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ έχει ακριβώς μια λύση.

5.3.9. [α] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I ώστε να ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

[β] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \neq 0$ ώστε η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x + cf(x)$ να είναι ένα-προς-ένα στο I.

5.3.10. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b) και $f(a) = f(b) = 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε λ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

5.3.11. [α] Με το θεώρημα του Rolle και την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.

[β] Έστω $a_1 < \cdots < a_n$ και η συνάρτηση $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Αποδείξτε ότι η P' έχει ακριβώς $n - 1$ ρίζες. Προσδιορίστε τη θέση των ριζών της P' σε σχέση με τους $a_1, \ldots, a_n$.

[γ] Δείτε την άσκηση 5.2.8.

Έστω πολυώνυμο P και έστω $\xi_1, \ldots, \xi_m$ οι διαφορετικές ανά δύο ρίζες του. Έστω $k_1, \ldots, k_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες των ριζών του P, οπότε ισχύει $P(x) = (x-\xi_1)^{k_1} \cdots (x-\xi_m)^{k_m} Q(x)$ για κάθε x, όπου Q είναι κάποιο πολυώνυμο χωρίς καμία ρίζα. Τότε λέμε ότι το P έχει ακριβώς $k = k_1 + \cdots + k_m$ ρίζες ή ότι το πλήθος των ριζών του P είναι k.

Αν το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου P είναι k, αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του P' είναι $\geq k - 1$. Ειδικώτερα, αν ο βαθμός του P είναι n και το πλήθος των ριζών του P είναι n, αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του P' είναι $n - 1$.

5.3.12. Έστω $m > 0$, διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και έστω ότι υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ και $|f(x_2) - f(x_1)| = d$.

Αν ισχύει $|f'(x)| \geq m$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, αποδείξτε ότι $|x_2 - x_1| \leq \frac{d}{m}$.

Αν ισχύει $|f'(x)| \leq m$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, αποδείξτε ότι $|x_2 - x_1| \geq \frac{d}{m}$.

5.3.13. Έστω $f : [\xi - h, \xi + h] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi - h, \xi + h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi - h, \xi) \cup (\xi, \xi + h)$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) + f'(\xi - \zeta)$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) - f'(\xi - \zeta)$.

5.3.14. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

5.3.15. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + 1) - f(x)) = 0$.

5.3.16. [7] Έστω $f : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi, b)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, b). Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f'(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχει και η $f'_+(\xi)$ και είναι ίση με την τιμή του ορίου. Ποιό είναι το ανάλογο αποτέλεσμα για το $\lim_{x\to\xi-} f'(x)$ και την $f'_-(\xi)$;

5.3.17. Αν στην άσκηση 5.2.20 το A είναι διάστημα, η f είναι παραγωγίσιμη στο A και η f' είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι $\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} \to f'(\xi)$.

[7] Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα για την ύπαρξη παραγώγου σε άκρο διαστήματος.

5.3.18. Γνωρίζουμε ότι η $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγωγο στον 0. Έχει η f τον 0 ως σημείο τοπικού ακροτάτου; Σχεδιάστε το γράφημα της f.

Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} |x|(2+\sin(1/x)), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Έχει η f παράγωγο στον 0; Έχει η f τον 0 ως σημείο τοπικού ακροτάτου; Σχεδιάστε το γράφημα της f.

Μπορείτε να βρείτε απλή *άρτια* συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f'(0) = 0$ και ο 0 να μην είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f;

5.3.19. [8] Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο διάστημα I. Η συνάρτηση $W(f,g) : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

ονομάζεται **ορίζουσα Wronski** των f και g στο διάστημα I.

Έστω ότι ισχύει $W(f,g)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Δείτε την άσκηση 4.2.10 και αποδείξτε ότι οι ρίζες της f, δηλαδή οι λύσεις της $f(x) = 0$, είναι *διαδοχικές*. Αυτό σημαίνει ότι, αν ξ είναι ρίζα της f και αν υπάρχει άλλη ρίζα της f μεγαλύτερη από την ξ, τότε υπάρχει *ελάχιστη* ρίζα της f μεγαλύτερη από την ξ (δηλαδή, η αμέσως επόμενη ρίζα) και, επίσης, αν υπάρχει άλλη ρίζα της f μικρότερη από την ξ, τότε υπάρχει *μέγιστη* ρίζα της f μικρότερη από την ξ (δηλαδή, η αμέσως προηγούμενη ρίζα). Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση g. Αποδείξτε, επίσης, ότι ανάμεσα σε δυο οποιεσδήποτε διαδοχικές ρίζες της f βρίσκεται ακριβώς μια ρίζα της g και αντιστρόφως. Υπάρχει περίπτωση να συμπέσουν μια ρίζα της f και μια ρίζα της g;

Ταιριάζουν τα συμπεράσματα αυτά με το ζευγάρι των $\cos x$ και $\sin x$;

5.3.20. [9] [α][10] Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι η f έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in A$ αν και μόνο αν ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I.

[β][11] Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

Εφαρμόζεται το κριτήριο αυτό στη συνάρτηση $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0,1]$; Είναι η συνάρτηση αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$; Τί γίνεται με την ίδια συνάρτηση στο διάστημα $[1,+\infty)$; Δείτε και τις άλλες συναρτήσεις στην άσκηση 4.6.2.

[γ] Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στο I, τότε η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.

[δ] Έστω $b \in \mathbb{R}$ και $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b)$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to b} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και ότι υπάρχει $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b)$.

5.3.21. [α] Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b). Αν το γράφημα της f δεν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\xi_2)$.

[β] Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b). Αν $f(a) = f(b) = 0$ και $f(x_0) = 1$ για κάποιον $x_0 \in (a,b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $|f'(\xi)| \geq \frac{2}{b-a}$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $|f'(\xi)| > \frac{2}{b-a}$.

---

[8] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 7.2.14.

[9] Μια σχέση ανάμεσα στην παράγωγο και στην ομοιόμορφη συνέχεια. Δείτε τις ασκήσεις 4.6.3, 4.6.10 και 4.6.11.

[10] Δείτε την άσκηση 4.6.3 και την υποσημείωσή της. Το αποτέλεσμα εδώ διατυπώνεται ως εξής: *αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι Lipschitz-συνεχής στο I αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη στο εσωτερικό του I.*

[11] Ένα κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας.

5.3.22. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ότι η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)\right| < \epsilon$ για κάθε $x, y \in [a,b]$ με $0 < |x-y| < \delta$.

5.3.23. [α] Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και αν $f'(a) < 0 < f'(b)$, αποδείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο $[a,b]$ (την ύπαρξη ενός τέτοιου εγγυάται το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής) ανήκει οπωσδήποτε στο (a,b). Ποιό είναι το συμπέρασμα αν $f'(a) > 0 > f'(b)$;

[β] Αποδείξτε το **θεώρημα του Darboux**:[12] *Έστω ότι η* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο* $[a,b]$ *και* $f'(a) < \lambda < f'(b)$ *ή* $f'(a) > \lambda > f'(b)$. *Τότε υπάρχει* $\xi \in (a,b)$ *ώστε* $f'(\xi) = \lambda$.

[γ] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I. Αν η f' είναι μονότονη στο I, αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο I.

5.3.24. [α][13] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq 0 \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq 0 \leq f'_-(\xi)$.

[β][14] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_-(\xi)$.

5.3.25. Ορίζουμε συναρτήσεις $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$T_0(x) = 1 \qquad \text{και} \qquad T_n(x) = \tfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1 \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει $T_1(x) = x$ και $4T_{n+2}(x) = 4xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και κάθε $n \geq 1$. Συμπεράνατε ότι για κάθε $n \geq 1$ η συνάρτηση T_n ταυτίζεται στο $[-1,1]$ με μια πολυωνυμική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει βαθμό n και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1.

Αυτήν την πολυωνυμική συνάρτηση θα τη συμβολίζουμε, επίσης, T_n.[15]

Υπολογίστε τα πολυώνυμα T_2, T_3, T_4.

Παρατηρήστε ότι $T_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}}$ και $T_n(-1) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \geq 1$.

Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο T_n έχει ακριβώς n ρίζες: τους αριθμούς $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ για $k = 1, \ldots, n$. Όλες αυτές οι ρίζες είναι στο διάστημα $(-1,1)$.

Παρατηρήστε ότι ισχύει $|T_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο $T_n{}'$ έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες: τους αριθμούς $t_k = \cos(\frac{k}{n}\pi)$ για $k = 1, \ldots, n-1$. Όλες αυτές οι ρίζες είναι στο διάστημα $(-1,1)$. Βρείτε τις τιμές $T_n(t_k)$ για $k = 1, \ldots, n-1$.

Παρατηρήστε για κάθε $n \geq 1$ τη σχέση διάταξης ανάμεσα στις ρίζες του T_n και τις ρίζες του $T_n{}'$ και σχεδιάστε το γράφημα του πολυωνύμου T_n στο διάστημα $[-1,1]$.

Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε πολυώνυμο P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 ισχύει $\frac{1}{2^{n-1}} = \max\{|T_n(x)| \,|\, -1 \leq x \leq 1\} \leq \max\{|P(x)| \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$.

Για ποιά πολυώνυμα P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 γίνεται ισότητα η τελευταία ανισότητα;[16]

[12] Πρόκειται για μια βαθύτερη ιδιότητα της παραγώγου: *η παράγωγος μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής και, μάλιστα, χωρίς να προϋποτίθεται η συνέχεια της παραγώγου.*

[13] Γενίκευση του θεωρήματος του Rolle.

[14] Γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange.

[15] Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις T_n ονομάζονται **πολυώνυμα του Chebyshev**.

[16] Εδώ έχουμε ένα χαρακτηριστικό κλασσικό και σημαντικό αποτέλεσμα μη-τετριμμένης ελαχιστοποίησης: *η εύρεση της ελάχιστης τιμής της ποσότητας* $\max\{|P(x)| \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$ *στο σύνολο των πολυωνύμων* P *βαθμού* n *με μεγιστοβάθμιο συντελεστή* 1. Αυτή η ελάχιστη τιμή είναι η $\frac{1}{2^{n-1}}$ και πραγματοποιείται με το πολυώνυμο T_n του Chebyshev.

5.4 Μονοτονία συνάρτησης.

Έστω διάστημα I οποιουδήποτε τύπου. Το διάστημα το οποίο προκύπτει αν από το I αφαιρέσουμε τα άκρα του - όποια ανήκουν στο I - δηλαδή το σύνολο των εσωτερικών σημείων του I, ονομάζεται **εσωτερικό** του I.

Η πρόταση 5.6 λέει *κάτι που δεν είναι καθόλου προφανές* αν και είναι διαισθητικά αναμενόμενο: αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα είναι οριζόντιες, τότε το γράφημα της συνάρτησης είναι οριζόντιο, δηλαδή η συνάρτηση είναι σταθερή. Επίσης, λέει ότι αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα έχουν μη-αρνητική (μη-θετική) κλίση, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα (φθίνουσα).

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.6. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*

[α] *Η f είναι σταθερή αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*

[β] *Η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*

[γ] *Η f είναι φθίνουσα αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. [α] Αν η f είναι σταθερή, γνωρίζουμε ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I (αλλά και στα άκρα του I, όσα περιέχονται στο I).
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$, όπου κάποιος από τους x_1, x_2 μπορεί να είναι άκρο του I. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και, επομένως, ξ στο εσωτερικό του I, ώστε

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0.$$

Άρα $f(x_1) = f(x_2)$. Δηλαδή όλες οι τιμές της f είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε η f είναι σταθερή.
[β] Αν η f είναι αύξουσα, τότε, όπως αποδείξαμε πριν από τον κανόνα αντίστροφης συνάρτησης, ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$. Όπως πριν, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και, επομένως ξ στο εσωτερικό του I, ώστε

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0.$$

Άρα $f(x_1) \leq f(x_2)$ και, επομένως, η f είναι αύξουσα.
[γ] Όπως στο [β]. □

Πριν από την πρόταση 5.6 είπαμε ότι τα συμπεράσματά της δεν είναι προφανή. Ας πούμε δυο λόγια γι αυτό. Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα I, τότε το γράφημά της είναι οριζόντιο και, επομένως, είναι σαφές ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα διάφορα σημεία του είναι όλες οριζόντιες, δηλαδή οι κλίσεις τους είναι όλες 0. Βλέπουμε ότι, γνωρίζοντας την συνάρτηση, έχουμε άμεση και απτή πληροφορία για τις κλίσεις της. Όμως, το αντίστροφο δεν είναι απολύτως σαφές. Αν γνωρίζουμε ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα διάφορα σημεία του γραφήματος της συνάρτησης είναι όλες οριζόντιες - χωρίς να έχουμε καμιά άλλη πληροφορία *για την ίδια* τη συνάρτηση - δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο ότι το γράφημά της είναι οριζόντιο. Είναι μεν αναμενόμενο αλλά όχι προφανές. Η ουσία του προβλήματος είναι η εξής: μπορούμε να καθορίσουμε τις κλίσεις (δηλαδή, την παράγωγο) μιας συνάρτησης από την συνάρτηση, αλλά δεν είναι σαφής ο καθορισμός της συνάρτησης από τις κλίσεις της. Στο πρόβλημα αυτό απαντά σε πρώτη απλή μορφή το *θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού* που θα δούμε στο κεφάλαιο 7 και σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις ο κλάδος των διαφορικών εξισώσεων. Σε όλα αυτά η πρόταση 5.6 παίζει *καθοριστικό ρόλο*.

Αξίζει να διατυπώσουμε μια παραλλαγή της πρότασης 5.6. Η πρόταση 5.7 λέει ότι, αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα έχουν θετική (αρνητική) κλίση, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα).

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.7. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*

[α] *Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.*

[β] *Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.*

Απόδειξη. Ίδια με την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους της πρότασης 5.6. □

Στις προτάσεις 5.6, 5.7 και 5.8 όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$. Ομοίως, όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν ισχύουν τα αντίστροφα των [α], [β] της πρότασης 5.7. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό που ισχύει επειδή η f είναι αύξουσα, δηλαδή $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει αν η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, στις προτάσεις 5.6 και 5.7 οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα ισχύουν σε διάστημα. Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ενώσεις διαστημάτων, τότε τα συμπεράσματα μπορεί να μην ισχύουν κι αυτά στις ενώσεις διαστημάτων.

Παράδειγμα 5.4.1. Η x^3 είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι σωστό ότι ισχύει $\frac{dx^3}{dx} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, είναι $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ αλλά $\frac{dx^3}{dx}(0) = 0$.

Παράδειγμα 5.4.2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά η f *δεν* είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι σταθερή -1 στο *διάστημα* $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο *διάστημα* $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 5.4.3. Είναι $\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Όμως η $\frac{1}{x}$ *δεν* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο *διάστημα* $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο *διάστημα* $(0, +\infty)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για την αναγνώριση των σημείων τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $(a, b) \subseteq A$, $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στο (a, b).*

[α] *Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.*

[β] *Αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.*

Απόδειξη. [α] Η f είναι αύξουσα στο $(a, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, b)$, οπότε ο $f(\xi)$ είναι η μέγιστη τιμή της στο διάστημα (a, b).

[β] Ομοίως. □

Παρατηρήστε ότι, στην πρόταση 5.8, δεν χρειάζεται να έχει παράγωγο η f στον ξ. Αρκεί μόνο να είναι συνεχής στον ξ.

Σε σχέση με τη μονοτονία μιας συνάρτησης πρέπει να έχει κανείς υπ' όψη του τα εξής απλά. *Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα I, έστω εσωτερικό σημείο ξ του I και έστω I_- και I_+ τα υποδιαστήματα αριστερά και δεξιά, αντιστοίχως, του ξ στα οποία χωρίζεται το I από τον ξ. Θεωρούμε ότι και τα δυο διαστήματα I_- και I_+ περιέχουν το κοινό άκρο τους ξ. Αν η f είναι αύξουσα στο I_- και φθίνουσα στο I_+, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Αν η f είναι φθίνουσα στο I_- και αύξουσα στο I_+, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f. Αν η f είναι (γνησίως) αύξουσα στο I_- και (γνησίως) αύξουσα στο I_+, τότε η f είναι (γνησίως) αύξουσα στο I. Αν η f είναι (γνησίως) φθίνουσα στο I_- και (γνησίως) φθίνουσα στο I_+, τότε η f είναι (γνησίως) φθίνουσα στο I.* Όλα αυτά αποδεικνύονται πολύ εύκολα (και είναι άσχετα με την έννοια της παραγώγου). Με βάση τα προηγούμενα, ιδού μια συνηθισμένη περίπτωση εφαρμογής της πρότασης 5.8. Έστω συνάρτηση

f συνεχής σε διάστημα και έστω $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ στο ίδιο διάστημα, στα οποία περιλαμβάνονται τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, ώστε σε καθένα από τα ενδιάμεσα ανοικτά υποδιαστήματα η f' έχει σταθερό πρόσημο. Τότε (i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου, (ii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η f' έχει διαφορετικό πρόσημο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου και (iii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η f' έχει ίδιο πρόσημο δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 5.4.4. Το παράδειγμα 5.3.4 και πάλι. Η $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και ισχύει $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$ για κάθε $x \in (0, 4)$. Επίσης, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και κάθε $x \in (2, 4)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$. Επομένως, οι 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f και οι 1, 4 σημεία τοπικού μεγίστου.

Παράδειγμα 5.4.5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & \text{αν } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και ισχύει $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $x \in (2, 3)$ και $f'(x) = -1$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$. Επομένως, οι 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και οι 1, 3 σημεία τοπικού μεγίστου. Επειδή $f(0) = f(2) = 0$, $f(1) = f(3) = 1$ και $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 3]$, οι 0, 2 είναι σημεία ολικού ελαχίστου και οι 1, 3 σημεία ολικού μεγίστου.
Παρεμπιπτόντως, η f δεν έχει παράγωγο στους 1 και 2.

Με τη βοήθεια των θεωρημάτων μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού ή των προτάσεων 5.6 και 5.7 αποδεικνύονται διάφορες ισότητες και ανισότητες με μεταβλητές σε διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.4.6. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (x + 1)^n - nx - 1$. Η παράγωγος συνάρτηση είναι η $f'(x) = n(x + 1)^{n-1} - n$, οπότε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [-1, 0)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ ή, ισοδύναμα,

$$(x + 1)^n > nx + 1 \qquad \text{για κάθε } \ x \geq -1, \ \ x \neq 0.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, με δεύτερο τρόπο την ανισότητα του Bernoulli. Μάλιστα, αποδείξαμε ότι, όταν $n \geq 2$, η ανισότητα είναι γνήσια στο $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει ως ισότητα μόνο για $x = 0$. (Αν $n = 1$, η ανισότητα ισχύει, προφανώς, ως ισότητα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.)

Παράδειγμα 5.4.7. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$e^x > x + 1 \qquad \text{για κάθε } \ x \neq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = e^x - 1 < 0$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) = e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει $e^x - x - 1 = f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x \neq 0$. Η γνήσια ανισότητα γίνεται ισότητα μόνο για $x = 0$.

Παράδειγμα 5.4.8. Θα ξανααποδείξουμε τον διωνυμικό τύπο του Newton:

$$(x + y)^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

Αν $n = 1$, ο τύπος γράφεται $(x + y)^1 = x + y$ και, προφανώς, ισχύει.
Υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = (x + y)^{n+1} - \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} x^k y^{n+1-k}$$

με μεταβλητή x. Παραγωγίζουμε, προσέχοντας ότι ο όρος που αντιστοιχεί στον $k=0$ δεν περιέχει την μεταβλητή x, και έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n+1)(x+y)^n - \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} k x^{k-1} y^{n+1-k} \\ &= (n+1)(x+y)^n - (n+1)\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} x^{k-1} y^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Γράφοντας $m = k-1$ στο τελευταίο άθροισμα, βρίσκουμε

$$f'(x) = (n+1)(x+y)^n - (n+1)\textstyle\sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} x^m y^{n-m} = 0,$$

σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση.
Άρα η f είναι σταθερή, οπότε για κάθε x ισχύει $f(x) = f(0) = y^{n+1} - y^{n+1} = 0$ ή, ισοδύναμα,

$$(x+y)^{n+1} = \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} x^k y^{n+1-k}.$$

Άρα ο τύπος ισχύει και για τον $n+1$ και, επομένως, ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ασκήσεις.

5.4.1. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου των $x^2 - x - 1$, $x^3 - 15x^2 + 72x + 7$, $x^4(x-1)^4$, $x + \frac{1}{x}$, $\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+3}$, $\frac{\sqrt{x}}{x+4}$, $x^2 e^{-x}$, $\frac{\log x}{x}$, $|x|e^{-|x-1|}$, $\sin x - \cos x$, $\frac{\sin(3x)}{3} - \cos x$, $x + \sin x$, $x + |\sin x|$, $\arctan x - \log(1+x^2)$.

5.4.2. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης $(x-1)|x|$ στο $[-1,3]$, της $|x^2 - 3x + 2|$ στο $[-3,10]$, της $x + \frac{1}{x}$ στο $[\frac{1}{3}, 3]$, της $(\log x)^2/x$ στο $[1,3]$ και της $e^x \sin x$ στο $[0, 2\pi]$.

5.4.3. Αναλόγως της τιμής της παραμέτρου a, σχεδιάστε το γράφημα της $\frac{\cos x + a}{\sin x}$.

5.4.4. Έστω $a_1 < \ldots < a_n$. Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου των $(x-a_1)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$ και $|x-a_1| + \cdots + |x-a_n|$.

5.4.5. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $(1+\frac{1}{x})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

5.4.6. Βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $x^a e^{2a-x}$ στο $[0,+\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

5.4.7. Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\sin x = ax$.

5.4.8. Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\tan x = ax$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

5.4.9. Έστω $f, g : [0,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[0,b]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,b)$, $f(0) = g(0) = 0$ και έστω ότι ισχύει $f'(x), g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,b)$. Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0,b)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0,b]$.

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{(1/2)x^2}{1-\cos x}$, $\frac{(1/6)x^3}{x - \sin x}$, $\cdots$ είναι αύξουσες στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

5.4.10. Δείτε τις ασκήσεις 4.6.3 και 5.1.2. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in I$. Αν $\rho > 1$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.

5.4.11. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b). Έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq \mu$ για κάθε $x \in (a,b)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(a) + \mu(x-a) \leq f(x) \leq f(b) + \mu(x-b)$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει $c \in (a,b]$ ώστε $f(a) + \mu(c-a) = f(c)$, τότε ισχύει $f(a) + \mu(x-a) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,c]$.
Ομοίως, αποδείξτε ότι, αν υπάρχει $c \in [a,b)$ ώστε $f(c) = f(b) + \mu(c-b)$, τότε ισχύει $f(x) = f(b) + \mu(x-b)$ για κάθε $x \in [c,b]$.
Διατυπώστε και αποδείξτε τα ανάλογα των παραπάνω στην περίπτωση που ισχύει $f'(x) \leq \mu$ για κάθε $x \in (a,b)$.

5.4.12. Έστω $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,4]$, $f(1) = -7$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 3$ για κάθε $x \in (1,4)$. Αποδείξτε ότι $f(4) \geq 2$.

Για κάθε $a \geq 2$ βρείτε συγκεκριμένη f με όλες τις παραπάνω ιδιότητες ώστε $f(4) = a$.

5.4.13. [17] [α] Έστω η συνάρτηση $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

[β] Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan y + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε x.

[γ] Έστω η συνάρτηση $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x > 0$ και $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x < 0$.

5.4.14. Αποδείξτε ότι ισχύει $\log \frac{1+x}{1-x} > 2x + \frac{2x^3}{3}$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\log \frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $e^{x/(x+1)} < 1 + x$ για κάθε $x > -1$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x$ για κάθε $x > 0$.

5.4.15. [α] Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\sin x < x$ για κάθε $x > 0$ και $x < \sin x$ για κάθε $x < 0$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2}{\pi}\, x < \sin x < x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $x < \sin x < \frac{2}{\pi}\, x$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Οι ανισότητες αυτές λένε ότι, *κοντά στον* 0*, το* $\sin x$ *βρίσκεται ανάμεσα σε δυο σταθερά και θετικά πολλαπλάσια του* x.

[β] Γνωρίζουμε ότι ισχύει $x < e^x - 1$ για κάθε $x \neq 0$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $x < e^x - 1 < (e-1)\, x$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $x < e^x - 1 < \frac{e-1}{e}\, x$ για κάθε $x \in (-1,0)$.

Οι ανισότητες αυτές λένε ότι, *κοντά στον* 0*, το* $e^x - 1$ *βρίσκεται ανάμεσα σε δυο σταθερά και θετικά πολλαπλάσια του* x.

[γ] Αποδείξτε ότι ισχύει $\log x < x - 1$ για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{e-1}\,(x-1) < \log x < x - 1$ για κάθε $x \in (1,e)$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{e}{e-1}\,(x-1) < \log x < x - 1$ για κάθε $x \in (\frac{1}{e}, 1)$.

Οι ανισότητες αυτές λένε ότι, *κοντά στον* 1*, ο* $\log x$ *βρίσκεται ανάμεσα σε δυο σταθερά και θετικά πολλαπλάσια του* $x - 1$.

5.4.16. Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $ax^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y-x} < ay^{a-1}$, αν $a < 0$ ή $a > 1$, και ότι $ay^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y-x} < ax^{a-1}$, αν $0 < a < 1$.

Έστω $x < y$, $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^x \log a < \frac{a^y - a^x}{y-x} < a^y \log a$.

Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{y} < \frac{1}{y-x} \log \frac{y}{x} < \frac{1}{x}$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $|\arctan x - \arctan y| < |x - y|$ για κάθε x, y με $x \neq y$.

5.4.17. Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Αποδείξτε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, αν ο n είναι περιττός, και $e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, αν ο n είναι άρτιος.

5.4.18. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$, αν ο m είναι περιττός, και $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$, αν ο m είναι άρτιος.

Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\sin x < \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$, αν ο m είναι περιττός, και $\sin x > \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$, αν ο m είναι άρτιος. Τί ισχύει για $x < 0$;

[17] Δείτε και την άσκηση 4.5.7 για τα ίδια (και περισσότερα) αποτελέσματα.

5.4.19. Αποδείξτε ότι ισχύει $(x+1)^a \geq ax+1$ για κάθε $x \geq -1$ και κάθε $a \geq 1$.
Η ανισότητα αυτή είναι γενίκευση της ανισότητας του Bernoulli. Διερευνήστε τις περιπτώσεις που η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα (ή και ανεξάρτητα από αυτήν), αποδείξτε ότι, αν $x \geq -a$, $x \neq 0$ και $0 < a < b$, τότε ισχύει $(1+\frac{x}{a})^a < (1+\frac{x}{b})^b$.

5.4.20. [α] Έστω $A > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή και όλα τα σημεία ολικού ελαχίστου της συνάρτησης $\frac{nA+x}{(n+1)\sqrt[n+1]{A^n x}}$.

[β][18] Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n ότι για κάθε $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ ισχύει η **ανισότητα του Cauchy** ή **ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου**,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}\,(a_1 + \cdots + a_n),$$

και ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.

5.4.21. [19] Έστω $a, b \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αποδείξτε την **ανισότητα του Young**,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a^p = b^q$.

5.4.22. Έστω $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α][20] Αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder**,

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \big({a_1}^p + \cdots + {a_n}^p\big)^{1/p}\big({b_1}^q + \cdots + {b_n}^q\big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s{a_k}^p = t{b_k}^q$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
Επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η γνωστή και πολύ σημαντική **ανισότητα του Cauchy**,

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \big({a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2\big)^{1/2}\big({b_1}^2 + \cdots + {b_n}^2\big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] Αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski**,

$$\big((a_1+b_1)^p + \cdots + (a_n+b_n)^p\big)^{1/p} \leq \big({a_1}^p + \cdots + {a_n}^p\big)^{1/p} + \big({b_1}^p + \cdots + {b_n}^p\big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sa_k = tb_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

5.4.23. Έστω $a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n > 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$.
Αποδείξτε ότι η $f(p) = (w_1{a_1}^p + \cdots + w_n{a_n}^p)^{1/p}$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{p\to 0}(w_1{a_1}^p + \cdots + w_n{a_n}^p)^{1/p} = {a_1}^{w_1} \cdots {a_n}^{w_n}$.
Αν $p' < 0 < p''$, αποδείξτε ότι[21]

$$(w_1{a_1}^{p'} + \cdots + w_n{a_n}^{p'})^{1/p'} \leq {a_1}^{w_1} \cdots {a_n}^{w_n} \leq (w_1{a_1}^{p''} + \cdots + w_n{a_n}^{p''})^{1/p''}.$$

Δείτε ότι η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην άσκηση 5.4.20 είναι ειδική περίπτωση αυτής της ανισότητας.

[18] Οι $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ και $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ ονομάζονται *αριθμητικός μέσος* και *γεωμετρικός μέσος*, αντιστοίχως, των $a_1, \ldots, a_n$. Μια ακόμη απόδειξη της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου είναι στην άσκηση 5.5.39. Για μια γενίκευση της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου δείτε και την άσκηση 5.4.23.

[19] Θα ξαναδούμε την ανισότητα του Young στις ασκήσεις 5.5.38 και 6.3.2.

[20] Η ανισότητα του Hölder είναι και στην άσκηση 5.5.39.

[21] Η ανισότητα αυτή είναι και στην άσκηση 5.5.39.

5.4.24. Έστω $f : A \to \mathbb{R}, \xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f'(\xi) > 0$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > f(\xi)$ κοντά στον ξ από δεξιά του και $f(x) < f(\xi)$ κοντά στον ξ από αριστερά του. Μπορεί να είναι ο ξ σημείο τοπικού ακροτάτου της f; Τι γίνεται αν $f'(\xi) < 0$;

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 1$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένας $a > 0$ ώστε η f να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-a, a)$. Να αντιπαραβάλετε με το παραπάνω γενικό αποτέλεσμα και με τις προτάσεις 5.6 και 5.7.

5.4.25. [22] Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I. Αν κανένα εσωτερικό σημείο του I δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

5.4.26. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Από την άσκηση 5.3.9[α] γνωρίζουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I είτε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.[23]

5.4.27. Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (a, b), $a < 0 < b$. Έστω, επίσης, ότι ισχύει $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Γνωρίζετε κάποιο τέτοιο ζευγάρι συναρτήσεων;

Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Αν οι F, G έχουν τις ίδιες ιδιότητες (όπου η F αντιστοιχεί στην f και η G στην g), αποδείξτε ότι ισχύει $F(x) = f(x)$ και $G(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

5.4.28. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και $k > 0$ ώστε να ισχύει $|f'(x)| \leq k|f(x) - f(a)|$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

5.4.29. Έστω ευθεία l του επιπέδου και σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Ονομάζουμε απόσταση του M από την l την ελάχιστη απόσταση από το M προς οποιοδήποτε σημείο της l και τη συμβολίζουμε dist(M, l).

Αν η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa$, αποδείξτε ότι dist$(M, l) = |\kappa - x_0|$.

Αν η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$, αποδείξτε ότι dist$(M, l) = |\mu x_0 + \nu - y_0|/(1 + \mu^2)^{1/2}$.

Αν η εξίσωση της ευθείας είναι στη μορφή $ax + by = c$, όπου ένας τουλάχιστον από τους a, b είναι $\neq 0$, αποδείξτε ότι dist$(M, l) = |ax_0 + by_0 - c|/(a^2 + b^2)^{1/2}$.

5.4.30. Λυγίζουμε μια λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποιά σημεία της πρέπει να λυγίσουμε τη ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;

5.4.31. Θεωρούμε ευθεία γραμμή η οποία χωρίζει ένα επίπεδο σε δυο ημιεπίπεδα καθώς και σημείο A_1 στο ένα ημιεπίπεδο σε απόσταση d_1 από την ευθεία και σημείο A_2 στο άλλο ημιεπίπεδο σε απόσταση d_2 από την ευθεία. Ένα (σημειακό) όχημα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_1 όταν βρίσκεται στο πρώτο ημιεπίπεδο και με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_2 όταν βρίσκεται στο δεύτερο ημιεπίπεδο. Βρείτε την τροχιά που πρέπει να ακολουθήσει το όχημα ώστε από το σημείο A_1 να φτάσει στο σημείο A_2 στον ελάχιστο χρόνο.

[22] Η άσκηση αυτή δεν σχετίζεται με την έννοια της παραγώγου και θα είχε ενταχθεί στην ενότητα 4.4 αν είχαμε δει εκεί τους ορισμούς των τοπικών ακροτάτων.

[23] Δηλαδή, *αν η παράγωγος συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα δεν μηδενίζεται, τότε έχει την ιδιότητα σταθερού προσήμου και, μάλιστα, χωρίς να υποθέσουμε ότι η παράγωγος είναι συνεχής*. Να αντιπαραβάλετε με το θεώρημα του Darboux στην άσκηση 5.3.23[β].

5.4.32. Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος h και ακτίνα βάσης r.
Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μια βάση του πάνω στη βάση του κώνου και έχει τον μέγιστο όγκο;
Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μια βάση του πάνω στη βάση του κώνου και έχει τη μέγιστη επιφάνεια;

5.4.33. Έστω ότι τα κέντρα δυο σφαιρών με ακτίνες a και b έχουν απόσταση $c > a + b$. Βρείτε σε ποιό σημείο ανάμεσα στις δυο σφαίρες και πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα κέντρα των σφαιρών πρέπει να τοποθετήσουμε μια σημειακή φωτεινή πηγή ώστε να φωτίσουμε την μεγαλύτερη δυνατή συνολική επιφάνεια των δυο σφαιρών. Έχει λύση το πρόβλημα αν η φωτεινή πηγή μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε στον χώρο;

5.5 Παράγωγοι ανώτερης τάξης και εφαρμογές.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $B = \{x \in A \,|\, f'(x) \in \mathbb{R}\} \subseteq A$ και $\xi \in B$ σημείο συσσώρευσης του B. Όπως έχουμε ήδη πει, ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f' : B \to \mathbb{R}$. Τώρα, αν υπάρχει η παράγωγος της f' στον ξ, δηλαδή το όριο $(f')'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$, το συμβολίζουμε, πιο απλά, $f''(\xi)$ και το ονομάζουμε* **δεύτερη παράγωγο** *της f στον ξ. Δηλαδή,*

$$f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}.$$

Ομοίως, ορίζεται η τρίτη παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της δεύτερης παραγώγου και, επαγωγικά, μπορούμε να ορίσουμε την n-οστή παράγωγο ως την πρώτη παράγωγο της $(n-1)$-οστής παραγώγου.
Η πρώτη παράγωγος της f στον ξ συμβολίζεται και $f^{(1)}(\xi)$ και η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(2)}(\xi)$. Για την τρίτη παράγωγο χρησιμοποιούμε και τα δυο σύμβολα $f'''(\xi)$, $f^{(3)}(\xi)$ και για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους χρησιμοποιούμε το σύμβολο $f^{(n)}(\xi)$.
Υπάρχουν και τα σύμβολα $D^n_x f$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ και $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Τονίζουμε ότι, βάσει του ορισμού, η n-οστή παράγωγος της f στον ξ είναι το όριο

$$f^{(n)}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(\xi)}{x-\xi}.$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι μερικές φορές το $f(\xi)$ συμβολίζεται $f^{(0)}(\xi)$.

Παράδειγμα 5.5.1. Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε οι παράγωγοι συναρτήσεις της x^n είναι:

$$\tfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \qquad \tfrac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \qquad \tfrac{d^3x^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tfrac{d^{n-1}x^n}{dx^{n-1}} = n(n-1)\cdots 2x, \qquad \tfrac{d^nx^n}{dx^n} = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!.$$

Η $\frac{d^nx^n}{dx^n}$ είναι σταθερή, οπότε κάθε παράγωγος μεγαλύτερης τάξης είναι σταθερή 0. Δηλαδή, είναι $\frac{d^mx^n}{dx^m} = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Παράδειγμα 5.5.2. Αν $a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της x^a είναι: $\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$, $\frac{d^2x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$ και, γενικά,

$$\tfrac{d^nx^a}{dx^n} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n} \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής της x^{a-n} είναι $\neq 0$ και, επομένως, καμιά παράγωγος συνάρτηση δεν είναι σταθερή 0.

Παράδειγμα 5.5.3. Αν $a > 0$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της a^x είναι $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$, $\frac{d^2a^x}{dx^2} = a^x(\log a)^2$ και, γενικά,

$$\tfrac{d^na^x}{dx^n} = a^x(\log a)^n \qquad \text{για } \ n \in \mathbb{N}.$$

Ειδικότερα:

$$\tfrac{d^ne^x}{dx^n} = e^x \qquad \text{για } \ n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 5.5.4. Οι παράγωγοι συναρτήσεις της $\sin x$ είναι: $\sin^{(1)} x = \cos x$, $\sin^{(2)} x = -\sin x$, $\sin^{(3)} x = -\cos x$, $\sin^{(4)} x = \sin x$. Από το σημείο αυτό και πέρα οι διαδοχικές παράγωγοι συναρτήσεις επαναλαμβάνουν τον "κύκλο": $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$. Μπορούμε, επίσης, να γράψουμε

$$\tfrac{d^{2k}\sin x}{dx^{2k}} = (-1)^k \sin x, \quad \tfrac{d^{2k-1}\sin x}{dx^{2k-1}} = (-1)^{k-1}\cos x \qquad \text{για } \ k \in \mathbb{N}.$$

Ομοίως,

$$\tfrac{d^{2k}\cos x}{dx^{2k}} = (-1)^k \cos x, \quad \tfrac{d^{2k-1}\cos x}{dx^{2k-1}} = (-1)^{k}\sin x \qquad \text{για } \ k \in \mathbb{N}.$$

Τώρα θα αιτιολογήσουμε το σύμβολο $\frac{d^ny}{dx^n}$ στην περίπτωση της δεύτερης παραγώγου, βασιζόμενοι, όμως, στο όριο

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2} = f''(\xi), \tag{5.10}$$

το οποίο εμφανίζεται στην άσκηση 5.6.9. Αν γράψουμε $y = f(\xi+h)$, $\eta = f(\xi)$ και $\Delta x = h$, τότε είναι $\Delta y = y - \eta = f(\xi+h) - f(\xi)$. Τώρα, εκτός από τη διαφορά $f(\xi+h) - f(\xi)$ θεωρούμε και την ίδια διαφορά αλλά στον $\xi + h$ αντί στον ξ, δηλαδή την $f(\xi+2h) - f(\xi+h)$. Για να καταλάβουμε καλύτερα την κατάσταση, ας θέσουμε

$$(\Delta y)(\xi) = f(\xi+h) - f(\xi).$$

Τότε είναι

$$(\Delta y)(\xi+h) = f(\xi+2h) - f(\xi+h)$$

και μπορούμε να γράψουμε

$$f(\xi+2h) - 2f(\xi+h) + f(\xi) = (\Delta y)(\xi+h) - (\Delta y)(\xi) = \Delta(\Delta y).$$

Δηλαδή η παράσταση $f(\xi+2h) - 2f(\xi+h) + f(\xi)$ προκύπτει από δυο διαδοχικές εφαρμογές της "πράξης" της διαφοράς. Γι αυτό η παράσταση αυτή ονομάζεται **δεύτερη διαφορά** της f και συμβολίζεται $\Delta(\Delta y)$ ή, πιο σύντομα, $\Delta^2 y$.
Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε το παραπάνω όριο (5.10) ως

$$\lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(\xi).$$

Από αυτό το όριο προκύπτει το σύμβολο

$$\tfrac{d^2y}{dx^2} = f''(\xi),$$

όπως από το $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi)$ προκύπτει το $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$.

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου.

Κριτήριο τοπικού ακροτάτου.

Η πρώτη εφαρμογή είναι ένα απλό κριτήριο τοπικού ακροτάτου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9. [24] *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, έστω ότι η f είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο I και έστω ότι υπάρχει η $f''(\xi)$ σε κάποιον ξ στο εσωτερικό του I.*
[α] *Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.*
[β] *Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.*

[24] Μια γενίκευση αυτής της πρότασης υπάρχει στην άσκηση 5.6.12.

Απόδειξη. [α] Επειδή

$$\lim_{x\to\xi} \tfrac{f'(x)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \tfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} = f''(\xi) > 0,$$

ισχύει

$$\tfrac{f'(x)}{x-\xi} > 0 \qquad \text{κοντά στον } \ \xi.$$

Τώρα, ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I και, επομένως, ισχύει $f'(x) < 0$ κοντά στον ξ από τα αριστερά του και $f'(x) > 0$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του. Δηλαδή, υπάρχουν a, b ώστε $a < \xi < b$ και $(a, b) \subseteq I$ και ώστε να ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Η f είναι συνεχής στο $(a, \xi]$ και στο $[\xi, b)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, b)$. Άρα ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.

[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 5.5.5. Είναι $\frac{dx^2}{dx}(0) = 0$ και $\frac{d^2x^2}{dx^2}(0) = 2$. Επομένως, ο 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της x^2.

Παράδειγμα 5.5.6. Είναι $\frac{dx^4}{dx}(0) = 0$ και $\frac{d^2x^4}{dx^2}(0) = 0$. Όμως, ο 0 *είναι* σημείο τοπικού ελαχίστου της x^4. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 5.9.

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

Η δεύτερη εφαρμογή της δεύτερης παραγώγου έχει να κάνει με τις γεωμετρικές έννοιες της *κυρτότητας* και της *κοιλότητας*.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **κυρτή** *στο I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \text{για } \ 0 < t < 1.$$

Αν η ανισότητα αυτή είναι γνήσια, τότε η f χαρακτηρίζεται **γνησίως κυρτή** *στο I.*
Ομοίως, η f χαρακτηρίζεται **κοίλη** *στο I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \text{για } \ 0 < t < 1.$$

Και, αν αυτή η ανισότητα είναι γνήσια, τότε η f χαρακτηρίζεται **γνησίως κοίλη** *στο I.*

Παράδειγμα 5.5.7. Κάθε αφφινική συνάρτηση $\mu x + \nu$ είναι κυρτή και κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.5.8. Η συνάρτηση x^2 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.5.9. Η συνάρτηση $|x|$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Θα δούμε ότι η ανισότητα $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ γράφεται με έναν διαφορετικό (αλλά ισοδύναμο) τρόπο.

Έστω $x_1 < x_2$. Είναι απλό να δει κανείς ότι η

$$x = (1-t)x_1 + tx_2$$

είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του t και απεικονίζει το διάστημα $[0, 1]$ αμφιμονοσήμαντα επί του $[x_1, x_2]$. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση

$$t = \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x και απεικονίζει το διάστημα $[x_1, x_2]$ αμφιμονοσήμαντα επί του $[0, 1]$. Με αυτές τις αλλαγές μεταβλητής από t σε x και αντιστρόφως μπορούμε να γράψουμε, επιπλέον, $1 - t = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$ και, επομένως, μπορούμε να ξαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της κυρτότητας ως εξής. Η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x) \leq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \qquad \text{για } x_1 < x < x_2.$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν ισχύει η ίδια ανισότητα ως γνήσια ανισότητα.

Ομοίως, η f είναι κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x) \geq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \qquad \text{για } x_1 < x < x_2.$$

Και η f είναι γνησίως κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν ισχύει η ίδια ανισότητα ως γνήσια ανισότητα.

Από αυτές τις ανισότητες προκύπτει το γεωμετρικό περιεχόμενο των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας συναρτήσεων. Πράγματι, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η

$$y = \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Επομένως, το ότι η f είναι κυρτή (κοίλη) στο διάστημα I σημαίνει ότι για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f που είναι ανάμεσα στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται κάτω (πάνω) από ή επί του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα αυτά τα δυο σημεία. Το ότι η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο διάστημα I σημαίνει ότι για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f που είναι ανάμεσα στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται κάτω (πάνω) από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα αυτά τα δυο σημεία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.10. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Τότε η f είναι συνεχής στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. Έστω ξ στο εσωτερικό του I, οπότε υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $a < \xi < b$. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I.
Έστω $a < x < \xi$. Τότε ισχύει $f(x) \leq \frac{\xi-x}{\xi-a} f(a) + \frac{x-a}{\xi-a} f(\xi)$ και $f(\xi) \leq \frac{b-\xi}{b-x} f(x) + \frac{\xi-x}{b-x} f(b)$. Άρα

$$\tfrac{b-x}{b-\xi} f(\xi) + \tfrac{x-\xi}{b-\xi} f(b) \leq f(x) \leq \tfrac{\xi-x}{\xi-a} f(a) + \tfrac{x-a}{\xi-a} f(\xi) \qquad \text{για } a < x < \xi,$$

οπότε, με παρεμβολή, $\lim_{x \to \xi-} f(x) = f(\xi)$.
Έστω $\xi < x < b$. Τότε ισχύει $f(x) \leq \frac{b-x}{b-\xi} f(\xi) + \frac{x-\xi}{b-\xi} f(b)$ και $f(\xi) \leq \frac{x-\xi}{x-a} f(a) + \frac{\xi-a}{x-a} f(x)$. Άρα

$$\tfrac{\xi-x}{\xi-a} f(a) + \tfrac{x-a}{\xi-a} f(\xi) \leq f(x) \leq \tfrac{b-x}{b-\xi} f(\xi) + \tfrac{x-\xi}{b-\xi} f(b) \qquad \text{για } \xi < x < b,$$

οπότε, πάλι με παρεμβολή, $\lim_{x \to \xi+} f(x) = f(\xi)$.
Άρα $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$ και η f είναι συνεχής στον ξ.
Η απόδειξη είναι ίδια αν η f είναι κοίλη στο I. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.11. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.*
[α] *Αν η f είναι κυρτή στο I, τότε (i) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή αριστερό άκρο του I υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$ με $x > \xi$ και (ii) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή δεξιό άκρο του I υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'_-(\xi)$ για κάθε $x \in I$ με $x < \xi$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι δυο παραπάνω ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες.
Τέλος, ισχύει $-\infty < f'_-(\xi) \leq f'_+(\xi) < +\infty$ για κάθε ξ στο εσωτερικό του I.*
[β] *Αν η f είναι κοίλη στο I, τότε (i) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή αριστερό άκρο του I υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \geq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$ με $x > \xi$ και (ii) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή δεξιό άκρο του I υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq f'_-(\xi)$ για κάθε $x \in I$ με $x < \xi$.
Αν η f είναι γνησίως κοίλη στο I, τότε οι δυο παραπάνω ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες.
Τέλος, ισχύει $-\infty < f'_+(\xi) \leq f'_-(\xi) < +\infty$ για κάθε ξ στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. [α] Έστω f κυρτή στο I.
Έστω ξ εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2 < \xi$. Τότε είναι $f(x_2) \leq \frac{\xi - x_2}{\xi - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{\xi - x_1} f(\xi)$, οπότε

$$\tfrac{f(x_1) - f(\xi)}{x_1 - \xi} \leq \tfrac{f(x_2) - f(\xi)}{x_2 - \xi} \qquad \text{για } x_1 < x_2 < \xi.$$

Άρα η $g(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ είναι αύξουσα στο υποδιάστημα του I που βρίσκεται αριστερά του ξ, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 3.2 και τα σχόλια μετά από αυτό, υπάρχει το $\lim_{x \to \xi -} g(x) = \lim_{x \to \xi -} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'_-(\xi)$ και είναι $> -\infty$ και, επίσης, ισχύει $f'_-(\xi) \geq g(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ για κάθε $x \in I$ με $x < \xi$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε, όπως πριν, η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ισχύει $f'_-(\xi) > g(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ για κάθε $x \in I$ με $x < \xi$.
Έστω ξ εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο του I. Έστω $x_3, x_4 \in I$ με $\xi < x_3 < x_4$. Τότε είναι $f(x_3) \leq \frac{x_4 - x_3}{x_4 - \xi} f(\xi) + \frac{x_3 - \xi}{x_4 - \xi} f(x_4)$ και, επομένως,

$$\tfrac{f(x_3) - f(\xi)}{x_3 - \xi} \leq \tfrac{f(x_4) - f(\xi)}{x_4 - \xi} \qquad \text{για } \xi < x_3 < x_4.$$

Άρα η $h(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ είναι αύξουσα στο υποδιάστημα του I που βρίσκεται δεξιά του ξ, οπότε υπάρχει το $\lim_{x \to \xi +} h(x) = \lim_{x \to \xi +} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'_+(\xi)$ και είναι $< +\infty$ και, επίσης, ισχύει $f'_+(\xi) \leq h(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ για κάθε $x \in I$ με $x > \xi$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε, όπως πριν, η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ισχύει $f'_+(\xi) < h(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ για κάθε $x \in I$ με $x > \xi$.
Έστω ξ στο εσωτερικό του I. Έστω $a, b \in I$ με $a < \xi < b$. Από την $f(\xi) \leq \frac{b - \xi}{b - a} f(a) + \frac{\xi - a}{b - a} f(b)$ συνεπάγεται $\frac{f(a) - f(\xi)}{a - \xi} \leq \frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi}$, οπότε $f'_-(\xi) = \lim_{a \to \xi -} \frac{f(a) - f(\xi)}{a - \xi} \leq \lim_{b \to \xi +} \frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi} = f'_+(\xi)$.
[β] Ομοίως. □

Παρατηρήστε το εξής πόρισμα της πρότασης 5.11. Αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάποιον ξ στο εσωτερικό του I, τότε $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ.

Αξίζει να τονίσουμε μερικά στοιχεία που προέκυψαν από την πρόταση 5.11 και την απόδειξή της. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα I και ο ξ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του I, είδαμε ότι είναι

$$-\infty < f'_+(\xi) \leq f'_-(\xi) < +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και ότι η "προς τα πάνω" γωνία τους είναι κυρτή, δηλαδή έχει τιμή $\leq \pi$. Επίσης, προέκυψε ότι για κάθε $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ με τη διάταξη $x_1 < x_2 < \xi < x_3 < x_4$ ισχύει

$$\tfrac{f(x_1) - f(\xi)}{x_1 - \xi} \leq \tfrac{f(x_2) - f(\xi)}{x_2 - \xi} \leq f'_-(\xi) \leq f'_+(\xi) \leq \tfrac{f(x_3) - f(\xi)}{x_3 - \xi} \leq \tfrac{f(x_4) - f(\xi)}{x_4 - \xi}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η κλίση $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ μιας μεταβλητής χορδής του γραφήματος της f με σταθερό το ένα της άκρο στο $(\xi, f(\xi))$ αυξάνεται καθώς το άλλο άκρο $(x, f(x))$ κινείται πάνω στο γράφημα από αριστερά προς δεξιά. Και, ειδικώτερα, όταν το $(x, f(x))$ μεταβαίνει από την αριστερή στη δεξιά μεριά του $(\xi, f(\xi))$, η κλίση της χορδής κάνει ένα "άλμα" από τιμές μικρότερες ή ίσες της κλίσης της αριστερής εφαπτόμενης ημιευθείας σε τιμές μεγαλύτερες ή ίσες της κλίσης της δεξιάς εφαπτόμενης ημιευθείας στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Είναι εύκολο να δει κανείς πώς θα προσαρμοστούν τα προηγούμενα στην περίπτωση που η f είναι γνησίως κυρτή ή κοίλη ή γνησίως κοίλη ή που ο ξ είναι αριστερό ή δεξιό άκρο του διαστήματος I.

Στη συνέχεια θα δούμε δυο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.12. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*

[α] *Η f είναι (γνησίως) κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν η f' είναι (γνησίως) αύξουσα στο εσωτερικό του I.*

[β] *Η f είναι (γνησίως) κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν η f' είναι (γνησίως) φθίνουσα στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. [α] Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Έστω x_1, x_2 στο εσωτερικό του I με $x_1 < x_2$. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, είναι

$$f'(x_1) \leq \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2),$$

οπότε η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I. Αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε οι ανισότητες αυτές ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.
Αντιστρόφως, έστω ότι η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I. Έστω $x, x_1, x_2 \in I$ ώστε $x_1 < x < x_2$. Τότε υπάρχουν ξ_1, ξ_2 ώστε $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ και

$$\tfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2).$$

Είναι $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, οπότε

$$\tfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Συνεπάγεται

$$f(x) \leq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2),$$

οπότε η f είναι κυρτή στο I. Και πάλι, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή.
[β] Ομοίως. □

Από την πρόταση 5.12 προκύπτει ένας ακόμη γεωμετρικός χαρακτηρισμός των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας για συναρτήσεις f οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του I. Το ότι η f είναι κυρτή (κοίλη) στο I σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f σε ένα εσωτερικό του σημείο αυξάνεται (μειώνεται) όταν το σημείο επαφής κινείται προς τα δεξιά. Ομοίως, το ότι η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο I σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f σε ένα εσωτερικό του σημείο αυξάνεται (μειώνεται) γνησίως όταν το σημείο επαφής κινείται προς τα δεξιά.

Παράδειγμα 5.5.10. Η $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2, & \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$ έχει παράγωγο $f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{αν } x \leq 0 \\ 2x, & \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$
Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Παρατηρήστε, εν όψει της πρότασης 5.13, ότι δεν υπάρχει η $f''(0)$.

Παράδειγμα 5.5.11. Είναι $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ στο $\mathbb{R}$.
Άρα, αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, η x^{n-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η x^n είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, η x^{n-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η x^n είναι γνησίως κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Βάσει της σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής παραλλαγή της πρότασης 5.12.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.13. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει δεύτερη παράγωγο στο εσωτερικό του I.*

[α] *Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Αν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κυρτή στο I.*

[β] *Η f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Αν ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κοίλη στο I.*

Απόδειξη. Προφανής. □

Παράδειγμα 5.5.12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Ισχύει $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ και $f''(x) = 6x - 6$ για κάθε x. Άρα ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$, οπότε η f είναι γνησίως κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Επίσης, ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Παράδειγμα 5.5.13. Είναι $\frac{d^2 x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$ στο $\mathbb{R}$ και ξαναβρίσκουμε τα αποτελέσματα του παραδείγματος 5.5.11.

Παράδειγμα 5.5.14. Είναι $\frac{d^2 x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$ για κάθε $x > 0$. Άρα η x^a είναι γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $a < 0$, γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$, και γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$, αν $a > 1$.

Παράδειγμα 5.5.15. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Η a^x είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$ διότι ισχύει $\frac{d^2 a^x}{dx^2} = a^x (\log a)^2 > 0$ για κάθε x.

Παράδειγμα 5.5.16. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Ισχύει $\frac{d^2 \log_a x}{dx^2} = -\frac{1}{\log a} \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Άρα η $\log_a$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$, αν $a > 1$, και γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$.

Παράδειγμα 5.5.17. Η συνάρτηση x^4 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$ διότι η παράγωγος συνάρτηση $4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Όμως, είναι λάθος ότι η δεύτερη παράγωγος συνάρτηση είναι θετική σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$: ισχύει $12x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$, αλλά $12 \cdot 0^2 = 0$.

Σημεία καμπής.

Η τρίτη εφαρμογή της δεύτερης παραγώγου σχετίζεται με την γεωμετρική (πάλι) έννοια του *σημείου καμπής*.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ξ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.*

Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** *της f αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και είτε ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του είτε, αντιθέτως, ισχύει $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του.*

Αν οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, τότε ο ξ χαρακτηρίζεται **γνήσιο σημείο καμπής** *της f.*

Επίσης, ο ξ χαρακτηρίζεται **γνήσιο σημείο καμπής** *της f και στις περιπτώσεις $f'(\xi) = \pm\infty$.*

Σε κάθε περίπτωση, το $(\xi, f(\xi))$ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** *του γραφήματος της f.*

Μπορούμε, επομένως, να πούμε ότι το $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής του γραφήματος της f αν, κατ' αρχάς, υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και, κατόπιν, τα μέρη του γραφήματος, τα οποία είναι κοντά στο σημείο αυτό και στις δυο διαφορετικές μεριές του, βρίσκονται το ένα στο ένα και το άλλο στο άλλο από τα δυο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την εφαπτόμενη ευθεία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.14. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, ξ στο εσωτερικό του I και $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $a < \xi < b$ και ώστε η f να είναι κυρτή στο $(a, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, b)$ ή, αντιθέτως, κοίλη στο $(a, \xi]$ και κυρτή στο $[\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*

Αν το "κυρτή" γίνει "γνησίως κυρτή" και το "κοίλη" γίνει "γνησίως κοίλη", τότε ο ξ είναι γνήσιο σημείο καμπής.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο $(a, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, b)$. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, \xi)$. Ομοίως, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Άρα ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. □

Εφαρμόζουμε τα διάφορα κριτήρια κυρτότητας ή κοιλότητας σε διαστήματα σε συνδυασμό με την πρόταση 5.14 για να διακρίνουμε αν κάποιος αριθμός είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.15. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, ξ στο εσωτερικό του I και $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει είτε $f''(x) \geq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του και $f''(x) \leq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του είτε $f''(x) \leq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του και $f''(x) \geq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*
Αν οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, τότε ο ξ είναι γνήσιο σημείο καμπής.

Απόδειξη. Προφανής. □

Παράδειγμα 5.5.18. Σύμφωνα με τα παραδείγματα 5.5.11 και 5.5.13, αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, ο 0 είναι σημείο καμπής της x^n.

Ευθείες στήριξης.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Μια ευθεία l χαρακτηρίζεται* ***ευθεία στήριξης από κάτω*** *του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος κάτω από την l. Δηλαδή, αν $y = \mu x + \nu$ είναι η εξίσωση της l, τότε ισχύει $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ και $f(x) \geq \mu x + \nu$ για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, ισχύει $f(x) > \mu x + \nu$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, τότε η ευθεία στήριξης από κάτω χαρακτηρίζεται* ***γνήσια****.*
Ομοίως, η ευθεία l χαρακτηρίζεται ***ευθεία στήριξης από πάνω*** *του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος πάνω από την l. Δηλαδή, αν $y = \mu x+\nu$ είναι η εξίσωση της l, τότε ισχύει $f(\xi) = \mu\xi+\nu$ και $f(x) \leq \mu x+\nu$ για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, ισχύει $f(x) < \mu x + \nu$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, τότε η ευθεία στήριξης από πάνω χαρακτηρίζεται* ***γνήσια****.*

Βάσει της $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ η εξίσωση της ευθείας στήριξης l γράφεται $y = \mu x + f(\xi) - \mu\xi$ ή, ισοδύναμα, $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$. Άρα μια ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$ και ισχύει $f(x) \geq \mu(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in A$.
Ομοίως, μια ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ και ισχύει $f(x) \leq \mu(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in A$.
Επομένως, το να βρούμε αν υπάρχει και ποιά είναι η ευθεία στήριξης είναι το ίδιο με το να προσδιορίσουμε τον συντελεστή μ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.16. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ και $\xi \in I$.*
[α] *Αν η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ είναι (γνήσια) ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν είτε $\mu \leq f'_+(\xi)$, αν ο ξ είναι αριστερό άκρο του I, είτε $f'_-(\xi) \leq \mu$, αν ο ξ είναι δεξιό άκρο του I, είτε $f'_-(\xi) \leq \mu \leq f'_+(\xi)$, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I.*
[β] *Αν η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ είναι (γνήσια) ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν είτε $f'_+(\xi) \leq \mu$, αν ο ξ είναι αριστερό άκρο του I, είτε $\mu \leq f'_-(\xi)$, αν ο ξ είναι δεξιό άκρο του I, είτε $f'_+(\xi) \leq \mu \leq f'_-(\xi)$, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I.*
[γ] *Αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του I, τότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω ή από πάνω, αντιστοίχως, του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$, δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Απόδειξη. [α] Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, η $f'_+(\xi)$ υπάρχει για κάθε εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο ξ του I και η $f'_-(\xi)$ υπάρχει για κάθε εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο ξ του I.
Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο του I, ισχύει $f(x) \geq \mu(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$, οπότε ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq \mu$ για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του και, επομένως, $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq \mu$.
Ομοίως, αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο του I, ισχύει $f(x) \geq \mu(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$, οπότε ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq \mu$ για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και, επομένως, $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq \mu$.
Τώρα θα δούμε το αντίστροφο. Έστω ότι ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I και έστω $f'_-(\xi) \leq \mu \leq f'_+(\xi)$. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, ισχύει $\mu \leq f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$ και $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'_-(\xi) \leq \mu$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$. Άρα ισχύει $f(x) - f(\xi) \geq \mu(x-\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x \neq \xi$.
Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι ανισότητες αυτές ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες και η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης.
Έστω ότι ο ξ είναι αριστερό άκρο του I και έστω $\mu \leq f'_+(\xi)$. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, ισχύει $\mu \leq f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$. Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες και η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης.
Η απόδειξη είναι ίδια στην περίπτωση που ο ξ είναι δεξιό άκρο του I.

[β] Ομοίως.

[γ] Έστω ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του I, οπότε είναι $f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'(\xi)$. Από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω ή από πάνω, αντιστοίχως, του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν $\mu = f'(\xi)$. $\square$

Παράδειγμα 5.5.19. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι κυρτή. Είναι $f'_-(0) = -1$ και $f'_+(0) = 1$. Μια ευθεία είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0)$ αν και μόνο αν έχει εξίσωση $y = \mu x$, όπου $-1 \leq \mu \leq 1$. Επίσης, είναι $f'(2) = 1$, οπότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(2,2)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = (x-2)+2 = x$. Τέλος, είναι $f'(-3) = -1$, οπότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(-3,3)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = -(x+3)+3 = -x$.

Παράδειγμα 5.5.20. Η x^2 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα, για κάθε ξ, η ευθεία με εξίσωση $y = 2\xi(x-\xi)+\xi^2$ είναι η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της x^2 στο σημείο (ξ, ξ^2). Μάλιστα, η ευθεία αυτή είναι γνήσια ευθεία στήριξης. Δηλαδή, ισχύει $x^2 > 2\xi(x-\xi)+\xi^2$ για κάθε $x \neq \xi$. Αυτό είναι απλό να επιβεβαιωθεί με αλγεβρικό τρόπο.

Παράδειγμα 5.5.21. Η συνάρτηση e^x είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επομένως, το γράφημα της e^x έχει μοναδική ευθεία στήριξής του από κάτω στο σημείο $(0, e^0) = (0,1)$ την ευθεία με εξίσωση $y = x+1$. Μάλιστα, η ευθεία αυτή είναι γνήσια ευθεία στήριξης. Δηλαδή, ισχύει $e^x > x+1$ για κάθε $x \neq 0$.

Η πρόταση 5.17 δίνει έναν ακόμη γεωμετρικό χαρακτηρισμό των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας βάσει της έννοιας της ευθείας στήριξης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.17. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.*
[α] *Η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια)*

ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.
[β] *Η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I αν και μόνο αν για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια) ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Απόδειξη. [α] Αν η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I, τότε από την πρόταση 5.16 συνεπάγεται ότι για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια) ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και έστω $\xi \in (x_1, x_2)$. Τότε ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, οπότε υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και έστω $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ η εξίσωση μιας τέτοιας ευθείας. Τότε είναι $f(x_1) \geq \mu(x_1 - \xi) + f(\xi)$ και $f(x_2) \geq \mu(x_2 - \xi) + f(\xi)$.
Συνεπάγεται $\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1} \leq \mu \leq \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}$ και, επομένως, $f(\xi) \leq \frac{x_2-\xi}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{\xi-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$.
Άρα η f είναι κυρτή στο I. Αν η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης, τότε οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο I.
[β] Ομοίως. □

Ανισότητες.

Θα δούμε, τέλος, κάποιες εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου σε *αποδείξεις ανισοτήτων*. Οι εφαρμογές αυτές είναι, ουσιαστικά, απλές εφαρμογές των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας.

Παράδειγμα 5.5.22. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, η συνάρτηση x^n είναι γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$, οπότε ισχύει

$$((1-t)x_1 + tx_2)^n < (1-t){x_1}^n + t{x_2}^n \qquad \text{για } 0 \leq x_1 < x_2, \ 0 < t < 1.$$

Ειδικώτερα, με $t = \frac{1}{2}$, έχουμε την ανισότητα $(\frac{x_1+x_2}{2})^n < \frac{{x_1}^n+{x_2}^n}{2}$ για $0 \leq x_1 < x_2$.

Παράδειγμα 5.5.23. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, η συνάρτηση $x^{1/n}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$(1-t){x_1}^{1/n} + t{x_2}^{1/n} < ((1-t)x_1 + tx_2)^{1/n} \qquad \text{για } 0 \leq x_1 < x_2, \ 0 < t < 1.$$

Ειδικώτερα, με $t = \frac{1}{2}$, έχουμε την ανισότητα $\frac{{x_1}^{1/n}+{x_2}^{1/n}}{2} < (\frac{x_1+x_2}{2})^{1/n}$ για $0 \leq x_1 < x_2$.
Παρατηρήστε ότι οι ανισότητες αυτού του παραδείγματος είναι ισοδύναμες με τις ανισότητες του προηγούμενου παραδείγματος. Παρατηρήστε, επίσης, ότι όλες οι ανισότητες μετατρέπονται σε ισότητες όταν $x_1 = x_2$.

Παράδειγμα 5.5.24. Η e^x είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα

$$e^{(1-t)x_1+tx_2} < (1-t)e^{x_1} + te^{x_2} \qquad \text{για } x_1 < x_2, \ 0 < t < 1.$$

Ειδικώτερα, με $t = \frac{1}{2}$ η ανισότητα γίνεται $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$ για $x_1 < x_2$.

Ασκήσεις.

5.5.1. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x^k, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^k, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ όπου $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βρείτε την $f^{(n)}$.

5.5.2. Βρείτε τις n-οστές παραγώγους των $\frac{x+2}{x^2-1}$, $\frac{x+1}{(x-1)^2}$, $\frac{x^3}{x^2-1}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\sin(5x)\sin(7x)$ για κάθε n.

5.5.3. Αποδείξτε ότι $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{\log x}{x}) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\big(\log x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\big)$ για κάθε n.

5.5.4. Αποδείξτε ότι $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{e^x}{x}) = \frac{(-1)^n n! e^x}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ για κάθε n.

5.5.5. Αποδείξτε ότι $\frac{d^n \tan x}{dx^n} = P_n(\tan x)$ για κάθε n, όπου P_n είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$.

5.5.6. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\frac{x^3}{(x+1)^2}$, $x^2(x-1)^2$, $\frac{x}{x^2+1}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$, e^{-x^2}, $e^{1/x}$, e^{-1/x^2}, $\frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}$, $\frac{1}{\log x}$, $\sin x + \cos x$ και $e^{-x}\sin x$. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, τα διαστήματα κυρτότητας ή κοιλότητας, τα σημεία τοπικού ακροτάτου και τα σημεία καμπής τους.

5.5.7. Αποδείξτε ότι ο 0 είναι σημείο καμπής της $f(x) = \begin{cases} x|x| + x^2 \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

5.5.8. Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n-1$.

5.5.9. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε η $f^{(n-1)}$ να είναι συνεχής στο I και η $f^{(n)}$ να υπάρχει στο εσωτερικό του I. Αν η f έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες στο I, αποδείξτε ότι η $f^{(n)}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο εσωτερικό του I.

5.5.10. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a) = f(b) = 0$ και $f(c) > 0$ για κάποιον $c \in (a,b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f''(\xi) < 0$.

5.5.11. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αν στο (a,b) περιέχονται δυο διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης $f(x)f'(x) = 0$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δυο αυτές λύσεις.

5.5.12. Έστω $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[-1,1]$, τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ ώστε $f^{(3)}(\xi) = 3$.

5.5.13. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ τέμνει το γράφημα της f σε κάποιο σημείο διαφορετικό από αυτά τα δυο σημεία, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

5.5.14. Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο I. Αν ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και ισχύει $f(x) = 0$ για τουλάχιστον δυο διαφορετικές τιμές του $x \in I$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in I$ ώστε $f'''(\xi) = 0$.

5.5.15. Δείτε την άσκηση 5.3.11[γ]. Αν $a < b$ και $n \in \mathbb{N}$, θεωρήστε την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Αποδείξτε ότι η $P^{(n)}$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n, ότι έχει ακριβώς n διαφορετικές ρίζες και ότι όλες αυτές οι ρίζες ανήκουν στο (a,b).

5.5.16. [25] Έστω διαστήματα I, J και $f : I \to J$ και $f^{-1} : J \to I$, $\xi \in I$ και $\eta = f(\xi) \in J$.
Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi) \neq 0$, αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στον η και $(f^{-1})''(\eta) = -f''(\xi)/(f'(\xi))^3$.
Γενικότερα, αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi) \neq 0$, αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι n φορές παραγωγίσιμη στον η.

5.5.17. [α] Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = a_0 + a_1(x-\xi) + \cdots + a_n(x-\xi)^n$. Αποδείξτε ότι $P^{(k)}(\xi) = k! a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq k \leq n$ και $P^{(k)}(\xi) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \geq n+1$.
[β] Δίνονται αριθμοί $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε $P^{(k)}(\xi) = y_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq k \leq n$. Πόσες τέτοιες πολυωνυμικές συναρτήσεις υπάρχουν;
[γ] Αποδείξτε ότι ισχύει $P(x) = P(\xi) + \frac{P'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{P^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ βαθμού n και για κάθε ξ, x.[26]

[25] Μια επέκταση του κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.
[26] Αυτόν τον τύπο θα τον ξανααποδείξουμε στην ενότητα 5.7.

5.5.18. [27] [α] Έστω n φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g : (a,\xi] \to \mathbb{R}$ και $h : [\xi,b) \to \mathbb{R}$ και έστω $g^{(k)}(\xi) = h^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Αποδείξτε ότι η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } a < x \leq \xi \\ h(x), & \text{αν } \xi \leq x < b \end{cases}$ είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) και ότι $f^{(k)}(\xi) = g^{(k)}(\xi) = h^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$.

[β] Έστω n φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Βάσει της άσκησης 5.5.17, βρείτε πολυωνυμικές συναρτήσεις $P(x)$ και $Q(x)$ ώστε η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} P(x), & \text{αν } x \leq a \\ f(x), & \text{αν } a \leq x \leq b \\ Q(x), & \text{αν } b \leq x \end{cases}$ να είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

[γ] Έστω $b < c$ και n φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ και $g : [c,d) \to \mathbb{R}$. Βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ώστε η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } a < x \leq b \\ P(x), & \text{αν } b \leq x \leq c \\ g(x), & \text{αν } c \leq x < d \end{cases}$ να είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (a,d). Υπάρχει κάποια εκτίμηση για τον βαθμό της $P(x)$;

5.5.19. [α] Έστω $x_1, \ldots, x_n$ διαφορετικοί ανά δύο και $y_1, \ldots, y_n$. Θεωρήστε για κάθε $k = 1, \ldots, n$ το βαθμού $n-1$ πολυώνυμο $Q_k(x) = \prod_{1 \leq m \leq n, m \neq k} \frac{x - x_m}{x_k - x_m}$, όπου στο γινόμενο ο m διατρέχει τους φυσικούς από τον 1 στον n παραλείποντας τον k.

Ποιές είναι οι ρίζες του $Q_k(x)$;

Αποδείξτε ότι το $Q(x) = y_1Q_1(x) + \cdots + y_nQ_n(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$ με την ιδιότητα: $Q(x_1) = y_1, \ldots, Q(x_n) = y_n$.

[β] Έστω $x_1, \ldots, x_n$ στο διάστημα I διαφορετικοί ανά δύο και συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$. Αν $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα που ορίστηκαν στο [α], σχηματίζουμε το πολυώνυμο[28] $Q(x) = f(x_1)Q_1(x) + \cdots + f(x_n)Q_n(x)$.

Αν η $f^{(n-1)}$ είναι συνεχής στο I και η $f^{(n)}$ υπάρχει στο εσωτερικό του I, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει ξ στο εσωτερικό του I ώστε $f(x) - Q(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

5.5.20. Αποδείξτε τον **τύπο του Leibniz**,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{αν } n \in \mathbb{N}.$$

5.5.21. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-1/x}$.

Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = x^{-2n}P_n(x)e^{-1/x}$ για κάθε $x > 0$, όπου $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Για παράδειγμα: $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 1-2x$, $P_3(x) = 1-6x+6x^2$.

Παραγωγίστε την $f^{(n)}(x) = x^{-2n}P_n(x)e^{-1/x}$ και αποδείξτε ότι ισχύει ο αναδρομικός τύπος $P_{n+1}(x) = x^2{P_n}'(x) + (1-2nx)P_n(x)$ για κάθε $x > 0$.

Αποδείξτε ότι $x^2f'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$ και, παραγωγίζοντας n φορές με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 5.5.20, αποδείξτε ότι $P_{n+2}(x) = (1-2(n+1)x)P_{n+1}(x) - n(n+1)x^2P_n(x)$ για κάθε $x > 0$.

Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο $P_n(x)$ είναι ο $(-1)^{n-1}n!$.

Αποδείξτε ότι $x^2{P_n}''(x) - (2nx - 2x - 1){P_n}'(x) + n(n-1)P_n(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

5.5.22. [29] Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.

Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = (-1)^nH_n(x)e^{-x^2}$ για κάθε x, όπου $H_n(x)$

---

[27] "Συγκόληση" συναρτήσεων σε διαδοχικά διαστήματα. Δείτε την άσκηση 5.1.4.

[28] Το $Q(x)$ ονομάζεται **πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange** για την f και για τα σημεία $x_1, \ldots, x_n$.

[29] Οι συναρτήσεις $H_n(x)$ που περιγράφονται σ' αυτήν την άσκηση ονομάζονται **πολυώνυμα Hermite** και οι $\psi_n(x) = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}\, H_n(x)e^{-x^2/2}$ ονομάζονται **συναρτήσεις Hermite**. Τα πολυώνυμα και οι συναρτήσεις Hermite έχουν κεντρικό ρόλο στην Ανάλυση Fourier. Θα τα ξανασυναντήσουμε στην άσκηση 12.4.14.

είναι πολυώνυμο βαθμού n. Για παράδειγμα: $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$.
Αποδείξτε ότι $H_{n+1}(x) = -H_n{}'(x) + 2xH_n(x)$ για κάθε x.

Αποδείξτε ότι $f'(x) = -2xf(x)$ για κάθε x. Παραγωγίστε αυτήν τη σχέση n φορές με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 5.5.20 και αποδείξτε ότι $H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x.

Αποδείξτε ότι $H_{n+1}{}'(x) = 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x.

Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^n στο $H_n(x)$ είναι ο 2^n.

Αποδείξτε ότι $H_n{}''(x) - 2xH_n{}'(x) + 2nH_n(x) = 0$ για κάθε x.

5.5.23. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a, b) και $a < \xi < b$. Αν ισχύει $f'(x) \geq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$ ή $f'(x) \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο καμπής της f.

5.5.24. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν η $-f$ είναι κοίλη στο ίδιο διάστημα.

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι κυρτή και κοίλη σε κάποιο διάστημα, τότε είναι αφφινική στο διάστημα αυτό.

5.5.25. [30] Έστω $\lambda, \mu \geq 0$, διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ κυρτές στο I. Αποδείξτε ότι οι $\lambda f + \mu g : I \to \mathbb{R}$ και $\max\{f, g\} : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτές στο I.

Έστω διαστήματα I, J και $f : I \to J$ κυρτή στο I και $g : J \to \mathbb{R}$ κυρτή στο J. Αν η g είναι αυξουσα στο J, αποδείξτε ότι η $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή το I.

Έστω διάστημα I και $\mathcal{F}$ ένα σύνολο, κάθε στοιχείο του οποίου είναι συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Για κάθε $x \in I$ ορίζουμε $F(x) = \sup\{f(x) \,|\, f \in \mathcal{F}\}$. Αν υποθέσουμε ότι $F(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η $F : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο I.

Πώς θα διαμορφωθούν τα παραπάνω για κοίλες συναρτήσεις;

5.5.26. [31] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε $\xi \in I$ η συνάρτηση $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x στο $I \setminus \{\xi\}$.

Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν $\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ για κάθε $a, a', b, b' \in I$, $a' \leq a$, $b' \leq b$ και, φυσικά, $a \neq b$ και $a' \neq b'$.

5.5.27. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο (a, b). Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις. (i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b), (ii) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b), (iii) υπάρχει $c \in (a, b)$ ώστε η f να είναι σταθερή στο $(a, c]$ και γνησίως αύξουσα στο $[c, b)$, (iv) υπάρχει $c \in (a, b)$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, c]$ και σταθερή στο $[c, b)$ και (v) υπάρχουν $c, d \in (a, b)$ με $c \leq d$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, c]$, σταθερή στο $[c, d]$ και γνησίως αύξουσα στο $[d, b)$.

5.5.28. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο (a, b).

Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to b-} f(x)$, $\lim_{x\to a+} f(x)$.

Αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$ και η f είναι ορισμένη στο b, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $(a, b]$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to b-} f(x) \leq f(b)$.

Αν, επιπλέον, $a \in \mathbb{R}$ και η f είναι ορισμένη στο a, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $[a, b)$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to a+} f(x) \leq f(a)$.

5.5.29. Έστω f κυρτή στο διάστημα I και $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$.

Αν είναι $f(x_0) = \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ για κάποιον $x_0 \in (x_1, x_2)$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

[30] Διάφορες “πράξεις” στο σύνολο των κυρτών συναρτήσεων.

[31] Δυο χαρακτηρισμοί της κυρτότητας από τις κλίσεις των χορδών του γραφήματος της συνάρτησης: *όταν η χορδή κινείται προς τα δεξιά, η κλίση της αυξάνεται.*

5.5.30. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν για κάθε $x_1, x_2 \in (a,b)$ με $x_1 < x_2$ υπάρχει ακριβώς ένας $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)$, αποδείξτε ότι η f είναι είτε γνησίως κυρτή είτε γνησίως κοίλη στο (a,b). Ισχύει το αντίστροφο;

5.5.31. Έστω $f : (0,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο $(0,b)$. Αν $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0,b)$. Αν $\lim_{x\to 0} f(x) < 0$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,b)$.

5.5.32. [32] Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχής* στο διάστημα I και αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I.
Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση: αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχής* στο διάστημα I και αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I.
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τη δεύτερη υπόθεση παραπάνω αλλά ότι δεν είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$;
Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και η f να μην είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$;

5.5.33. [α] Αποδείξτε ότι, αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}$, τότε είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
[β] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Αποδείξτε ότι, αν κάποιο εσωτερικό σημείο του I είναι σημείο μεγίστου της f, τότε η f είναι σταθερή στο I.

5.5.34. Έστω $a < 0$ ή $a > 1$.
Αποδείξτε ότι $((1-t)x_1 + tx_2)^a < (1-t){x_1}^a + t{x_2}^a$ για $0 < x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.
Αποδείξτε ότι $x^a > a\xi^{a-1}(x-\xi) + \xi^a$ για $x, \xi > 0$ και $x \neq \xi$.
Αποδείξτε ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται αν $0 < a < 1$.

5.5.35. Έστω $a > 0$.
Αποδείξτε ότι $a^{(1-t)x_1+tx_2} < (1-t)a^{x_1} + ta^{x_2}$ για $x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.
Αποδείξτε ότι $a^x > a^\xi \log a\,(x-\xi) + a^\xi$ για $x \neq \xi$.

5.5.36. Αποδείξτε ότι $\log\big((1-t)x_1 + tx_2\big) > (1-t)\log x_1 + t\log x_2$ για $0 < x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.
Αποδείξτε ότι $\log x < \frac{1}{\xi}(x-\xi) + \log\xi$ για $x, \xi > 0$ και $x \neq \xi$.

5.5.37. Αποδείξτε ότι $((1-t)x_1 + tx_2)\log((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)x_1\log x_1 + tx_2\log x_2$ για $0 < x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.

5.5.38. Αποδείξτε την ανισότητα του Young στην άσκηση 5.4.21 με δυο τρόπους: χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0,+\infty)$ και το ότι η $x^{1/p}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0,+\infty)$ όταν $p > 1$.

5.5.39. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο διάστημα I. Αν $x_1, \ldots, x_n \in I$ και $w_1, \ldots, w_n > 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$, αποδείξτε την **ανισότητα του Jensen**,[33]

$$f(x_1w_1 + \cdots + x_nw_n) \leq f(x_1)w_1 + \cdots + f(x_n)w_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $n = 2$, η ανισότητα Jensen είναι ακριβώς ίδια με την ανισότητα βάσει της οποίας ορίζεται η έννοια της κυρτότητας.
Αποδείξτε ότι, αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε η ανισότητα Jensen ισχύει ως ισότητα αν

[32] Μια παραλλαγή του ορισμού της κυρτότητας για συνεχείς συναρτήσεις.
[33] Μια εξαιρετικά σημαντική ανισότητα για κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Η ανισότητα αυτή θα γενικευτεί σε πολύ μεγάλο βαθμό. Δείτε την άσκηση 6.4.18.

και μόνο αν $x_1 = \ldots = x_n$.

Πώς διατυπώνονται τα προηγούμενα αν η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I;

Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$. Χρησιμοποιώντας το ότι η $x^{1/q}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$ όταν $q > 1$ και θεωρώντας $x_1 = \frac{{b_1}^q}{{a_1}^p}, \ldots, x_n = \frac{{b_n}^q}{{a_n}^p}$ και $w_1 = \frac{{a_1}^p}{A^p}, \ldots, w_n = \frac{{a_n}^p}{A^p}$, όπου $A = ({a_1}^p + \cdots + {a_n}^p)^{1/p}$, αποδείξτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 5.4.22[α]. Μελετήστε την περίπτωση της ισότητας.

Αποδείξτε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην άσκηση 5.4.20 χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$. Μελετήστε την περίπτωση της ισότητας.

Αποδείξτε την ανισότητα στην άσκηση 5.4.23 χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$.

Αν $0 < a_1, \ldots, a_n < \pi$ και $a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, αποδείξτε ότι $\sin a_1 \cdots \sin a_n \leq (\sin a)^n$.
Αν $0 < a_1, \ldots, a_n < \pi$ και $a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, αποδείξτε ότι $\frac{\sin a_1}{a_1} \cdots \frac{\sin a_n}{a_n} \leq (\frac{\sin a}{a})^n$.
Αν $a_1, \ldots, a_n > 0$ και $a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, αποδείξτε ότι $a^{na} \leq {a_1}^{a_1} \cdots {a_n}^{a_n}$.
Και στις τρεις τελευταίες ανισότητες μελετήστε την περίπτωση της ισότητας.

5.5.40. Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ή κοίλη και παραγωγίσιμη στο διάστημα I, αποδείξτε ότι η f' είναι συνεχής στο I.[34]

5.5.41. Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα I, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη είναι αριθμήσιμο.

5.5.42. Έστω τρία σημεία (x, y), (x', y') και (x'', y'') του xy-επιπέδου που δε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αποδείξτε ότι η ακτίνα R του κύκλου που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία είναι ίση με $\frac{((x'-x)^2+(y'-y)^2)^{1/2}((x''-x)^2+(y''-y)^2)^{1/2}((x'-x'')^2+(y'-y'')^2)^{1/2}}{2|(x'-x)(y''-y)-(x''-x)(y'-y)|}$.

Έστω καμπύλη στο xy-επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, όπου η παράμετρος t διατρέχει κάποιο ανοικτό διάστημα I. Για κάθε $t \in I$ θεωρούμε πολύ μικρό $h > 0$ και τα σημεία $(x(t), y(t))$, $(x(t+h), y(t+h))$, $(x(t-h), y(t-h))$ στην τροχιά της καμπύλης και συμβολίζουμε $R_{t,h}$ την ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία. Τότε το όριο $R_t = \lim_{h \to 0+} R_{t,h}$, αν υπάρχει, ονομάζεται **ακτίνα καμπυλότητας** της τροχιάς της καμπύλης στο σημείο $(x(t), y(t))$.

Με τις κατάλληλες υποθέσεις, αποδείξτε ότι $R_t = \frac{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^{3/2}}{|x''(t)y'(t)-x'(t)y''(t)|}$.

Υπάρχουν δύο κύκλοι με ακτίνα R_t, οι οποίοι διέρχονται από το σημείο $(x(t), y(t))$ και έχουν στο σημείο αυτό κοινή εφαπτόμενη ευθεία με την τροχιά της καμπύλης. Ο ένας από αυτούς ονομάζεται **εφαπτόμενος κύκλος** στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο $(x(t), y(t))$. Ποιός από τους δύο;

Βρείτε σε κάθε σημείο του την ακτίνα καμπυλότητας και τον εφαπτόμενο κύκλο του κύκλου με καρτεσιανή εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Τί παρατηρείτε; Ποιοί κύκλοι έχουν μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας;

Βρείτε σε κάθε σημείο της την ακτίνα καμπυλότητας και τον εφαπτόμενο κύκλο της έλλειψης με καρτεσιανή εξίσωση $(\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$. Σε ποιά σημεία είναι η ακτίνα καμπυλότητας μέγιστη; ελάχιστη;

Αποδείξτε ότι η ακτίνα καμπυλότητας του γραφήματος της $f : I \to \mathbb{R}$ στο σημείο $(x, f(x))$, όπου x είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I, είναι ίση με $\frac{1}{|f''(x)|}(1 + (f'(x))^2)^{3/2}$.

Βρείτε σε κάθε σημείο της την ακτίνα καμπυλότητας και τον εφαπτόμενο κύκλο της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$ καθώς και της υπερβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{x}$.

Ποιά είναι η ακτίνα καμπυλότητας μιας ευθείας σε οποιοδήποτε σημείο της; Μπορούν να θεωρηθούν οι ευθείες ως "μεγάλοι κύκλοι";

[34] Δείτε και την άσκηση 5.3.23[γ].

5.6 Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό ορίων τα οποία καταλήγουν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Οι εφαρμογές αυτές εκφράζονται μέσω των δυο κανόνων του l' Hopitâl.

Ο πρώτος κανόνας του l' Hopitâl αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

ΠΡΩΤΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L' HOPITÂL. *Έστω $f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (ξ, b), έστω ότι ισχύει $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ και έστω $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια είναι ίσα:*

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \quad \textit{συνεπάγεται} \quad \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με τις προφανείς προσαρμογές και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Απόδειξη. Οι f, g δεν θεωρούνται κατ' αρχάς ορισμένες στον ξ, αλλά τώρα ορίζουμε $f(\xi) = g(\xi) = 0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$, οι f, g είναι, τώρα, συνεχείς στο $[\xi, b)$. Έστω $\eta \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\Big| < \epsilon \tag{5.11}$$

για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (\xi, b)$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}. \tag{5.12}$$

Τώρα, για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$ συνεπάγεται $\zeta \in (\xi, b)$ και $\xi < \zeta < \xi + \delta$, οπότε από την (5.11) είναι

$$\Big|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\Big| < \epsilon$$

και, επομένως, από την (5.12),

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\Big| < \epsilon.$$

Άρα ισχύει $\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\Big| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$, οπότε $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$. Επίσης, η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$.

Τώρα θα αναγάγουμε την περίπτωση $x \to +\infty$ στην περίπτωση $x \to 0+$.

Έστω $a > 0$, $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $(a, +\infty)$ και έστω ότι ισχύει $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει. Θα αποδείξουμε ότι και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και ότι τα δυο όρια είναι ίσα.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής από x σε $t = \frac{1}{x}$, ορίζουμε $F, G : (0, \frac{1}{a}) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$F(t) = f(\tfrac{1}{t}) = f(x) \qquad \text{και} \qquad G(t) = g(\tfrac{1}{t}) = g(x)$$

για κάθε $t \in (0, \frac{1}{a})$.

Τότε ισχύει $G(t) = g(x) \neq 0$ και $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t}) = -x^2 g'(x) \neq 0$ για κάθε $t \in (0, \frac{1}{a})$. Επίσης, το

$$\lim_{t\to0+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

υπάρχει. Άρα και το

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{F(t)}{G(t)}$$

υπάρχει και είναι ίσο με το προηγούμενο. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Με τον ίδιο τρόπο, η περίπτωση $x \to -\infty$ ανάγεται στην περίπτωση $x \to 0-$. $\square$

Παράδειγμα 5.6.1. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x-1}$.

Ισχύει $e^x - 1 \neq 0$, $\frac{d(e^x-1)}{dx} = e^x \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$. Περιοριζόμαστε στο $(-1,0) \cup (0,+\infty)$, διότι αυτό είναι το πεδίο ορισμού της $\frac{\log(1+x)}{e^x-1}$.
Επίσης, $\lim_{x\to 0} \log(1+x) = \lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$.
Υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων: $\lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{e^x} = 1$.
Επομένως, $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x-1} = 1$.

Παράδειγμα 5.6.2. Ας δούμε και πάλι το $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Εδώ έχουμε $x \neq 0$ και $\frac{dx}{dx} = 1 \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ και $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} x = 0$. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ και, αμέσως, έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Τώρα, όμως, υπάρχουν δυο ενστάσεις.

Η πρώτη ένσταση είναι ότι για να αποδειχθεί ότι η $\sin x$ είναι παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγός της είναι η $\cos x$ χρησιμοποιήθηκε ακριβώς το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Επομένως, *δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl για να βρούμε το όριο αυτό*. Η πρέπουσα γενικότερη αντιμετώπιση αυτού του θέματος είναι, πιστεύω, η εξής. Σε ένα θεωρητικό βιβλίο αυστηρά δομημένο με μια αυστηρή αλληλουχία ορισμών και προτάσεων / θεωρημάτων δεν επιτρέπονται "κυκλικά επιχειρήματα" όπως το εξεταζόμενο. Σε ένα "τυχαίο" περιβάλλον, όπου καλείται κάποιος να βρεί το εξεταζόμενο όριο, *μπορεί να χρησιμοποιήσει τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl*, επικαλούμενος το ότι δεν δεσμεύεται από συγκεκριμένο τρόπο απόδειξης της παραγωγισιμότητας της $\sin x$ και, μάλιστα, αφού στα διάφορα βιβλία υπάρχουν διάφοροι τρόποι απόδειξης της παραγωγισιμότητας της $\sin x$. Ακόμη περισσότερο, στο παρόν βιβλίο στο κεφάλαιο 10 θα δούμε, όπως είπαμε, έναν "αναλυτικό ορισμό" των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και διαφορετική μέθοδο απόδειξης της παραγωγισιμότητας της $\sin x$.

Η δεύτερη ένσταση είναι, κατά τη γνώμη μου, πιο σοβαρή. Το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ μπορεί αμέσως να γραφτεί $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0}$ και είναι ακριβώς ο ορισμός της παραγώγου της $\sin x$ στο 0. Άρα γράφουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \frac{d \sin x}{dx}(0) = \cos 0 = 1.$$

Κατά τη γνώμη μου, το σωστό είναι να χρησιμοποιηθεί ο απλός ορισμός της παραγώγου αντί του "εξεζητημένου" εργαλείου που λέγεται πρώτος κανόνας του l' Hopitâl με την σχετικά περίπλοκη απόδειξη (και μάλιστα χρησιμοποιώντας την παράγωγο της συνάρτησης). Υπάρχει ο Χρυσός και, κυρίως, Ουσιαστικός Κανόνας με το όνομα "Οικονομία Μέσων".

Για τον ίδιο λόγο πρέπει να αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl για τον υπολογισμό ορίων όπως

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1}.$$

Όλα αυτά τα όρια είναι οι ορισμοί αντίστοιχων απλών παραγώγων.[35]

Ο δεύτερος κανόνας του l' Hopitâl που ακολουθεί αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή, καλύτερα, σε μια γενίκευσή της.

[35] Δείτε την άσκηση 5.2.2.

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L' HOPITÂL. *Έστω* $f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες στο* (ξ, b) *και έστω ότι ισχύει* $g(x), g'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in (\xi, b)$. *Έστω, επίσης,* $\lim_{x\to\xi+} g(x) = +\infty$ *ή* $-\infty$. *Αν υπάρχει το* $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *τότε υπάρχει και το* $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *και τα δυο αυτά όρια είναι ίσα:*

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \quad \textit{συνεπάγεται} \quad \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με τις προφανείς προσαρμογές και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ *και* $x \to -\infty$.

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta$ με $\eta \in \mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\Big| < \frac{\epsilon}{6} \tag{5.13}$$

για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta'$. Επιλέγουμε $x_0 \in (\xi, b)$ ώστε $\xi < x_0 < \xi + \delta'$. Επειδή $\lim_{x\to\xi+} |g(x)| = +\infty$, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(x)| > \max\Big\{|g(x_0)|, \frac{3}{\epsilon}|f(x_0)|, \frac{3|\eta|}{\epsilon}|g(x_0)|\Big\} \tag{5.14}$$

για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta''$.
Τώρα ορίζουμε $\delta = \min\{x_0 - \xi, \delta''\}$. Κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$ ικανοποιεί τις $\xi < x < x_0 < \xi + \delta'$ και $\xi < x < \xi + \delta''$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, για κάθε τέτοιον x υπάρχει $\zeta \in (x, x_0)$ ώστε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Άρα $\zeta \in (\xi, b)$ και $\xi < \zeta < \xi + \delta'$, οπότε από την (5.13),

$$\Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \eta\Big| = \Big|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\Big| < \frac{\epsilon}{6}.$$

Συνεπάγεται

$$|f(x) - f(x_0) - \eta(g(x) - g(x_0))| < \frac{\epsilon}{6}|g(x) - g(x_0)|,$$

οπότε, με την τριγωνική ανισότητα,

$$|f(x) - \eta g(x)| < \frac{\epsilon}{6}(|g(x)| + |g(x_0)|) + |f(x_0)| + |\eta||g(x_0)|.$$

Διαιρώντας με τον $g(x)$ και χρησιμοποιώντας την (5.14), βρίσκουμε

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\Big| < \frac{\epsilon}{6}\Big(1 + \frac{|g(x_0)|}{|g(x)|}\Big) + \frac{|f(x_0)|}{|g(x)|} + |\eta|\frac{|g(x_0)|}{|g(x)|} < \frac{\epsilon}{6}(1+1) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\Big| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.
Οι περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ καθώς και οι περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Οι περιπτώσεις $x \to \pm\infty$ ανάγονται στις $x \to 0\pm$ όπως στην απόδειξη της πρώτου κανόνα. □

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στις υποθέσεις του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl δεν αναφέρεται αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ ούτε ποιά ακριβώς είναι η τιμή του. Άρα οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl, όπως τον έχουμε διατυπώσει.

Παράδειγμα 5.6.3. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b}=+\infty \qquad \text{αν }\ a>1\ \text{ και }\ b>0.$$

Έστω, κατ' αρχάς, $a>1$ και $b=1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty$. Για τη συνάρτηση στον παρονομαστή και την παράγωγό της είναι $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $x\neq 0$ και $\frac{dx}{dx}=1\neq 0$ για κάθε $x>0$. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\log a}{1}=+\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty$.

Τώρα έστω $a>1$ και $b>0$. Επειδή $a^{1/b}>1$, είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^{1/b})^x}{x}=+\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b}=\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{(a^{1/b})^x}{x}\big)^b=+\infty$.

Το αποτέλεσμα το διατυπώνουμε ως εξής.[36]

Κάθε εκθετική συνάρτηση a^x με $a>1$ αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη x^b.

Παράδειγμα 5.6.4. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{(\log x)^b}=+\infty \qquad \text{αν }\ a>0\ \text{ και }\ b>0.$$

Έστω $a>0$ και $b=1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\log x}=+\infty$. Για τη συνάρτηση στον παρονομαστή και την παράγωγό της είναι $\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty$ και $\log x\neq 0$ και $\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x}\neq 0$ για κάθε $x>1$. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}ax^a=+\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\log x}=+\infty$.

Τώρα έστω $a>0$ και $b>0$. Επειδή $\frac{a}{b}>0$, είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{a/b}}{\log x}=0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{(\log x)^b}=\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x^{a/b}}{\log x}\big)^b=+\infty$. Το αποτέλεσμα το διατυπώνουμε ως εξής.

Κάθε δύναμη x^a με $a>0$ αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη λογαρίθμου $(\log x)^b$.

Παράδειγμα 5.6.5. Το $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$ αποτελεί περίπτωση απροσδιόριστης μορφής $\frac{\pm\infty}{+\infty}$.

Πράγματι, είναι $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ και, επειδή ισχύει $x-\cos x\geq x-1$ για κάθε x, είναι $\lim_{x\to+\infty}(x-\cos x)=+\infty$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το αρχικό όριο υπολογίζεται πολύ εύκολα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl : επειδή ισχύει $\left|\frac{\cos x}{x}\right|\leq\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\big(1-\frac{\cos x}{x}\big)=1-0=1$.

Εδώ, μάλιστα, *ο δεύτερος κανόνας δεν εφαρμόζεται καν !* Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{1}$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει, επίσης, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl. Πράγματι, στο παράδειγμα αυτό υπάρχει το όριο του λόγου των συναρτήσεων αλλά δεν υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων τους.

Υπάρχουν, όμως, και άλλες απροσδιόριστες μορφές πέραν των $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Σε κάθε περίπτωση μετασχηματίζουμε την απροσδιόριστη μορφή που αντιμετωπίζουμε σε μια από τις βασικές αυτές απροσδιόριστες μορφές και κατόπιν εφαρμόζουμε τον κατάλληλο κανόνα του l' Hopitâl. Θα περιγράψουμε, τελείως σχηματικά, πώς περίπου χειριζόμαστε μερικές τέτοιες περιπτώσεις.

1. Έστω $\lim_{x\to\xi}f(x)=0$ και $\lim_{x\to\xi}g(x)=\pm\infty$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi}f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(\pm\infty)$. Γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi}f(x)g(x)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{1/g(x)}$$

και μετατρέπουμε σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Μπορούμε να γράψουμε και $\lim_{x\to\xi}f(x)g(x)=\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)}{1/f(x)}$, δηλαδή να μετατρέψουμε σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Βέβαια, στην δεύτερη περίπτωση χρειάζεται κάποια επιπλέον υπόθεση για το πρόσημο της f.

[36] Δείτε και το παράδειγμα 2.3.24.

2. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)+(-\infty)$. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to\xi}\big(\tfrac{1}{g(x)}+\tfrac{1}{f(x)}\big)f(x)g(x),$$

μετατρέποντας σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$, και αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.
3. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$, όπου $f(x) > 0$, και $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(0+)^0$. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)}$$

και μετατρέπουμε σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$.
4. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)}$$

και μετατρέπουμε σε απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$.
5. Τέλος, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \pm\infty$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)},$$

μετατρέποντας σε απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)0$.

Παράδειγμα 5.6.6. Θα βρούμε το $\lim_{x\to 0+} x\log x$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Μετασχηματίζουμε σε $\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x}$, όπου $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty$. Ισχύει $\frac{1}{x} \neq 0$ και $-\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Επίσης, $\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$.
Άρα $\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0$.

Παράδειγμα 5.6.7. Θα βρούμε το όριο $\lim_{x\to 0+} x^x$.
Γράφουμε $x^x = e^{x\log x}$ και από το προηγούμενο όριο: $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = 1$.

Παράδειγμα 5.6.8. Θα βρούμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x$.
Γράφουμε $\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x = e^{x\log(1+\frac{x}{1+x^2})}$ και αναγόμαστε στο $\lim_{x\to+\infty} x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$.
Γράφουμε $x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big) = \frac{\log(1+\frac{x}{1+x^2})}{1/x}$ και έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.
Ισχύει $\frac{1}{x} \neq 0$ και $-\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(1+x+x^2)} = 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+\frac{x}{1+x^2})}{1/x} = 1$.
Άρα $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log(1+\frac{x}{1+x^2})} = e$.

Ασκήσεις.

5.6.1. Χρησιμοποιώντας όρια που μάθαμε σ' αυτήν την ενότητα, βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x/4}}{x^{13}}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[7]{x}}{(\log x)^5}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x/2}-(\log x)^4}{x^{100}-e^{x/4}}$, $\lim_{x\to 0+}\big(\frac{1}{x^5}-(\log x)^7\big)$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^5}$.

5.6.2. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x^b-1}$ $(b \neq 0)$, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{b^x-1}$ $(a,b > 0, b \neq 1)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log(\log x))}{\log(\log x)}$, $\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{e^{2x}-1}$, $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\big)$, $\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$, $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$, $\lim_{x\to 1+}\log x\log(x-1)$, $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}$.

5.6.3. Υπολογίστε τα όρια της άσκησης 3.3.11 με τους κανόνες του l' Hopitâl.

5.6.4. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$, $\lim_{x\to 0+}\sin x\log x$, $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\big)$, $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\big)$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)-(\sin x)^2}{x^6}$, $\lim_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan(2x)}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{\tan x-\arctan x}$.

5.6.5. Βρείτε a, b ώστε $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1-\cos x}{x^4}+ax^{-2}+b\big)=0$.

5.6.6. Μπορείτε να υπολογίσετε τα $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl; Μήπως τα όρια αυτά υπολογίζονται πολύ εύκολα, χωρίς αναφορά στους κανόνες του l' Hopitâl;

5.6.7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1/(\log|x|), & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ Δείτε την άσκηση 4.1.12 (και την αντίστοιχη υποσημείωση) και αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αλλά όχι Hölder-συνεχής στον 0.

5.6.8. [37] Βρείτε συναρτήσεις $f,g:(0,1)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ ώστε $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=0$, ώστε να ισχύει $g(x),g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}$ αλλά να μην υπάρχει το $\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5.6.9. Έστω $f:(\xi-\delta,\xi+\delta)\to\mathbb{R}$, $a<\xi<b$.
Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+}\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h}=f'(\xi)$. Για το όριο αυτό δεν χρειάζεται ο πρώτος κανόνας του l' Hopitâl.
Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2}=f''(\xi)$.
Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2}=f''(\xi)$.
Αιτιολογήστε το σύμβολο $\frac{d^ny}{dx^n}$ για την n-οστή παράγωγο συνάρτησης $y=f(x)$.

5.6.10. Έστω $0<k<1$ και $n\in\mathbb{N}$. Σχεδιάστε το γράφημα της $e^{-x}(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})-k$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία θετική λύση της εξίσωσης $1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=ke^x$. Αν συμβολίσουμε x_n αυτήν τη λύση, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.[38]

5.6.11. [α][39] Έστω $a<\xi<b$ και έστω ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\xi}\Big(f(x)-f(\xi)-\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}\Big)\Big/(x-\xi)^n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Αν $n=1$, το παραπάνω όριο είναι ακριβώς ο ορισμός της παραγώγου $f'(\xi)$. Γράψτε το όριο στις περιπτώσεις $n=2$, $n=3$.
Βρείτε τα παρακάτω όρια.
(i) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(\frac{1}{1-x}-1-x-\cdots-x^{n-1}\big)$.
(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(e^x-1-\frac{1}{1!}x-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\big)$.
(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(\log\frac{1}{1-x}-x-\frac{1}{2}x^2-\cdots-\frac{1}{n-1}x^{n-1}\big)$.
(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}x^{n-1}\big)$.
(v) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2m}}\big(\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m-2)!}x^{2m-2}\big)$ για $m\geq 1$.
(vi) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2m+1}}\big(\sin x-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m-1)!}x^{2m-1}\big)$ για $m\geq 1$.
(vii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2m+1}}\big(\arctan x-x+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^m}{2m-1}x^{2m-1}\big)$ για $m\geq 1$.
[β] Έστω $\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}=\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b'_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $b_k=b'_k$ για κάθε

[37] Μια άσκηση για το αντίστροφο του πρώτου κανόνα του l' Hopitâl.
[38] Συνέχεια στην άσκηση 10.2.1.
[39] Ένα πολύ χρήσιμο γενικό όριο.

$k = 0, 1, \ldots, n$.

[γ] Στο [α] υποθέστε, επιπλέον, ότι $f^{(n)}(\xi) \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-P(x)}{(x-\xi)^n} = 0$.

[δ] Αν η $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στον 0 και $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \big(f\big(a/\sqrt{x}\big)\big)^x = e^{-a^2/2}$.
Ως εφαρμογή, δείτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \big(\cos\big(a/\sqrt{x}\big)\big)^x = e^{-a^2/2}$.

5.6.12. [40] Εφαρμόστε την άσκηση 5.6.11 και αποδείξτε τα παρακάτω.

Έστω $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι $2m-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και ότι υπάρχει η $f^{(2m)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi) = \ldots = f^{(2m-1)}(\xi) = 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f, αν $f^{(2m)}(\xi) > 0$, και σημείο τοπικού μεγίστου της f, αν $f^{(2m)}(\xi) < 0$.

Έστω $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και ότι υπάρχει η $f^{(2m+1)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi) = \ldots = f^{(2m)}(\xi) = 0$ και $f^{(2m+1)}(\xi) \neq 0$, τότε ο ξ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f.

5.6.13. Δείτε τις ασκήσεις 5.2.8 και 5.3.11.

Έστω ρίζα ξ της πολυωνυμικής συνάρτησης P. Αποδείξτε ότι η πολλαπλότητα της ξ ως ρίζα της P είναι $k \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν $P(\xi) = \cdots = P^{(k-1)}(\xi) = 0$ και $P^{(k)}(\xi) \neq 0$.

Έστω $a < \xi < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ και $f(\xi) = 0$. Λέμε ότι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα της f είναι $k \in \mathbb{N}$ αν υπάρχει $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ με $g(\xi) \neq 0$ ώστε να ισχύει $f(x) = (x-\xi)^k g(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αν $f(\xi) \neq 0$, τότε λέμε ότι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα της f είναι 0.

Κατανοήστε ότι η έννοια της πολλαπλότητας ρίζας γενικής συνάρτησης ταυτίζεται με την ήδη γνωστή έννοια της πολλαπλότητας ρίζας στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι πολυωνυμική.

Αποδείξτε ότι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα της f, όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Δηλαδή, δεν μπορεί ο ξ να έχει δυο πολλαπλότητες ως ρίζα της f.

Έστω $a < \xi < b$ και έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ. Έστω $f(\xi) = 0$. Αποδείξτε ότι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα της f είναι 1 αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi) \neq 0$.

Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $a < \xi < b$ και έστω ότι η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι $k-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Έστω $f(\xi) = 0$. Αποδείξτε ότι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα της f είναι k αν και μόνο αν η f είναι k φορές παραγωγίσιμη στον ξ και $f(\xi) = \cdots = f^{(k-1)}(\xi) = 0$ και $f^{(k)}(\xi) \neq 0$.

5.6.14. Έστω $f, g : [0,1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $[0,1)$ και δυο φορές παραγωγίσιμες στον 0 και έστω $f'(0)g''(0) \neq f''(0)g'(0)$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, για κάθε $x \in (0,1)$ υπάρχει $\xi \in (0,x)$ ώστε $(f(x)-f(0))g'(\xi) = (g(x)-g(0)f'(\xi)$. Γράφοντας $\xi = \xi(x)$ για να δηλώσουμε την εξάρτηση του ξ από τον x, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\xi(x)}{x} = \frac{1}{2}$.

5.6.15. Έστω f παραγωγίσιμη στο $(a,+\infty)$ και έστω $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = \eta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

5.6.16. [41] Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^{-m}e^{-1/x} = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η h είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι, για κάθε n, είναι $h^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n}(1/x)e^{-1/x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ όπου P_{2n} είναι καποιο πολυώνυμο βαθμού $2n$. Ειδικώτερα, είναι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε n.

[40] Η γενίκευση του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου για τοπικό ακρότατο.

[41] Οι συναρτήσεις, ειδικά οι τελευταίες, που ορίζονται στην άσκηση αυτή και στη συνέχειά της, την άσκηση 7.2.16, είναι πολύ σημαντικές για την Ανάλυση και τη Γεωμετρία.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} e^{-2/(1-x^2)}, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

5.7 Ο τύπος του Taylor, I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. *Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $f : [\xi, c] \to \mathbb{R}$, n φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c]$ ώστε η $f^{(n)}$ να είναι συνεχής στο $[\xi, c]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, c). Έστω, επίσης, $p > 0$. Τότε, για κάθε $x \in (\xi, c]$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!p}(x-\xi)^p(x-\zeta)^{n-p+1}.$$

Η ισότητα ισχύει και όταν $c < \xi$, αρκεί οι παραπάνω υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c, \xi]$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : [\xi, x] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \tag{5.15}$$

για κάθε $t \in [\xi, x]$. Η F είναι συνεχής στο $[\xi, x]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, x) και, προφανώς, είναι $F(x) = 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \tag{5.16}$$

για κάθε $t \in (\xi, x)$.
Τώρα ορίζουμε την $h : [\xi, x] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(t) = (x-\xi)^p F(t) - F(\xi)(x-t)^p$$

για κάθε $t \in [\xi, x]$. Η h είναι συνεχής στο $[\xi, x]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, x) και $h(\xi) = h(x) = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε $h'(\zeta) = 0$. Τότε

$$(x-\xi)^p F'(\zeta) = -pF(\xi)(x-\zeta)^{p-1}, \tag{5.17}$$

από την οποία προκύπτει το τελικό συμπέρασμα

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k = F(\xi) = -\frac{F'(\zeta)(x-\xi)^p}{p(x-\zeta)^{p-1}} = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!p}(x-\xi)^p(x-\zeta)^{n-p+1}.$$

Η πρώτη ισότητα είναι η (5.15) με $t = \xi$, η δεύτερη ισότητα είναι η ίδια η (5.17) και για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (5.16) με $t = \zeta$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον ξ, το*

$$P_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

ονομάζεται **πολυώνυμο Taylor** *τάξης n της f στον ξ.*
Η ισότητα στο θεώρημα 5.1 ονομάζεται **τύπος του Taylor** *για την f στον ξ και γράφεται*

$$f(x) = P_{n,\xi}(x) + R_{n,\xi}(x, \zeta),$$

όπου το $R_{n,\xi}(x, \zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!p}(x-\xi)^p(x-\zeta)^{n-p+1}$ ονομάζεται **υπόλοιπο Schlömlich** *τάξης n με παράμετρο $p > 0$. Αν $p = n+1$ και $p = 1$, έχουμε για το υπόλοιπο τους αντίστοιχους τύπους*

$$R_{n,\xi}(x, \zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} \qquad \textit{και} \qquad R_{n,\xi}(x, \zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(x-\zeta)^n(x-\xi).$$

Στην πρώτη περίπτωση το υπόλοιπο ονομάζεται **υπόλοιπο Lagrange** *τάξης n και στη δεύτερη περίπτωση το υπόλοιπο ονομάζεται* **υπόλοιπο Cauchy** *τάξης n.*

Θα δούμε μια ακόμη παραλλαγή του τύπου του Taylor στην ενότητα 7.4.

Το υπόλοιπο τάξης n εκφράζει το σφάλμα που γίνεται όταν αντικαθίσταται η τιμή $f(x)$ από την τιμή $P_{n,\xi}(x)$ του πολυωνύμου Taylor τάξης n στον ξ που της αντιστοιχεί. Κάθε εφαρμογή του τύπου του Taylor αποσκοπεί στο να αποδείξει ότι το $R_{n,\xi}(x,\zeta)$ είναι μικρό και, επομένως, ότι η τιμή $f(x)$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την τιμή $P_{n,\xi}(x)$.

Παράδειγμα 5.7.1. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση P βαθμού $\leq n$. Η P είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα 5.1 για κάθε ξ, x. Επειδή $P^{(n+1)}(\zeta) = 0$ για κάθε ζ, είναι $R_{n,\xi}(x,\zeta) = 0$, οπότε

$$P(x) = P_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

για κάθε ξ, x. Δηλαδή η προσέγγιση ενός πολυωνύμου P βαθμού $\leq n$ από οποιοδήποτε πολυώνυμο Taylor τάξης $\geq n$ του P είναι τέλεια.

Παράδειγμα 5.7.2. Θα υπολογίσουμε τον αριθμό $\sqrt{4+10^{-5}} = \sqrt{4.00001}$ με σφάλμα $< 10^{-17}$. Ο $x = 4 + 10^{-5}$ είναι πολύ κοντά στον $\xi = 4$ και ο αριθμός $\sqrt{4}$ υπολογίζεται εύκολα. Θεωρούμε την $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4+10^{-5}]$ με παραγώγους

$$f^{(k)}(x) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\cdots(\tfrac{1}{2}-k+1)x^{\frac{1}{2}-k}.$$

Στον $\xi = 4$ υπολογίζουμε ακριβώς: $f^{(k)}(4) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)4^{\frac{1}{2}-k}$ και, επομένως,

$$f'(4) = \tfrac{1}{4} \qquad \text{και} \qquad f^{(k)}(4) = (-1)^{k-1}\tfrac{1\cdot3\cdots(2k-3)}{2^{3k-1}} \quad \text{για } k \geq 2.$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε ένα άνω φράγμα για την $|f^{(n+1)}(x)|$ στο διάστημα $(4, 4+10^{-5})$. Γράφουμε

$$|f^{(n+1)}(x)| = |\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\cdots(\tfrac{1}{2}-n)x^{\frac{1}{2}-n-1}| \leq \tfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}4^{-\frac{1}{2}-n} = \tfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}}.$$

Επομένως, για το υπόλοιπο Lagrange ισχύει

$$|R_{n,4}(4+10^{-5},\zeta)| \leq \tfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}(n+1)!}10^{-5(n+1)}.$$

Αν $n = 2$, τότε

$$|R_{2,4}(4+10^{-5},\zeta)| < 10^{-17}$$

και, επομένως, ο τύπος του Taylor γράφεται

$$\left|\sqrt{4+10^{-5}} - 2 - \tfrac{1}{4}10^{-5} + \tfrac{1}{64}(10^{-5})^2\right| < 10^{-17}.$$

Άρα ο αριθμός

$$2 + \tfrac{1}{4}10^{-5} - \tfrac{1}{64}(10^{-5})^2 = 2.0000025000015625$$

είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{4+10^{-5}}$ με σφάλμα $< 10^{-17}$. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα δεκαδικά ψηφία του 2.0000025000015625 είναι ίδια με τα αντίστοιχα δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{4+10^{-5}}$.

Ασκήσεις.

5.7.1. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor οποιασδήποτε τάξης των $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\log\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{x^2+1}$ στον 0.

5.7.2. Όπως στο παράδειγμα 5.7.2, εφαρμόστε τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange στην $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[\xi, x] = [4, 4+10^{-5}]$. Ποιόν $n \in \mathbb{N}$ πρέπει να χρησιμοποιήσετε ώστε να προσεγγίσετε τον $\sqrt{4+10^{-5}}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

5.7.3. Εφαρμόστε τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange για να προσεγγίσετε τους $\sin(1^o)$ και $\sin(31^o)$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου.

5.7.4. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), ότι $f(a) = f(b) = 0$ και ότι ισχύει $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2(b-a)}$ για κάθε $x \in (a,b)$.

5.7.5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f'(a) = f'(b) = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$.

5.7.6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $0 < m \leq f'(x)$ και $0 \leq f''(x) \leq M$ για κάθε x στο $[a,b]$. Επίσης, έστω $f(a) < 0 < f(b)$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. Αποδείξτε ότι ένας τέτοιος ξ είναι μοναδικός.

Και τώρα θα περιγράψουμε την λεγόμενη **επαναληπτική διαδικασία του Newton** για την προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Ορίζουμε ακολουθία (x_n) αρχίζοντας με οποιονδήποτε $x_1 \in (\xi, b]$, για παράδειγμα τον $x_1 = b$, και συνεχίζοντας με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $x_n \to \xi$.

Αποδείξτε ότι για κάθε n υπάρχει $\zeta \in (\xi, x_n)$ ώστε $x_{n+1} - \xi = \frac{f''(\zeta)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2$.

Αποδείξτε ότι για κάθε n ισχύει $0 \leq x_n - \xi \leq \frac{2m}{M}\big(\frac{M}{2m}(x_1 - \xi)\big)^{2^{n-1}}$.

Εφαρμόστε την παραπάνω διαδικασία στην εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ για να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{2}$ στο διάστημα $[1,2]$. Ξεκινήστε με $x_1 = 2$ και βρείτε τους x_2, x_3, x_4. Εκτιμήστε για καθέναν από αυτούς το σφάλμα σε σχέση με την αληθινή τιμή του $\sqrt{2}$. Ποιός πρέπει να είναι ο n ώστε ο x_n να προσεγγίζει τον $\sqrt{2}$ με ακρίβεια έως εκατοντάκις χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

5.7.7. Στον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$ ο ζ εξαρτάται, φυσικά, από τον x. Αν αυτό το δηλώσουμε γράφοντας $\zeta = \zeta(x)$, αποδείξτε ότι, αν υπάρχει η $f^{(n+2)}(\xi)$ και είναι αριθμός $\neq 0$, τότε $\lim_{x\to\xi+}\frac{\zeta(x)-\xi}{x-\xi} = \frac{1}{n+2}$.

5.7.8. [α] Έστω $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(a,+\infty)$. Αποδείξτε ότι, αν $u_0 = \sup\{|f(x)| \,|\, x > a\}$, $u_1 = \sup\{|f'(x)| \,|\, x > a\}$, $u_2 = \sup\{|f''(x)| \,|\, x > a\}$, τότε ${u_1}^2 \leq 4u_0u_2$.

[β] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, αν $u_0 = \sup\{|f(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, $u_1 = \sup\{|f'(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, $u_2 = \sup\{|f''(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, τότε ${u_1}^2 \leq 2u_0u_2$.

[γ] Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Αν η f'' είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

[δ] Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} xf''(x) = 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

[ε] Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν η $(b-x)^2 f''(x)$ είναι φραγμένη στο (a,b) και $\lim_{x\to b} f(x) = 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to b}(b-x)f'(x) = 0$.

5.7.9. [42] Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $f, g : [\xi, c] \to \mathbb{R}$, n φορές παραγωγίσιμες στο $[\xi, c]$ ώστε οι $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ να είναι συνεχείς στο $[\xi, c]$ και παραγωγίσιμες στο (ξ, c). Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in (\xi, c]$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε

$$\Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\Big)g^{(n+1)}(\zeta) = \Big(g(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\Big)f^{(n+1)}(\zeta).$$

Τί γίνεται αν $c < \xi$;

5.8 Τάξη μεγέθους, ασυμπτωτική ισότητα.

Τάξη μεγέθους.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, τότε λέμε ότι η f έχει* **μικρότερη τάξη μεγέθους**

[42] Γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής του Cauchy: δοκιμάστε $\xi = a$, $c = x = b$ και $n = 0$.

στο ξ από την g καθώς και ότι η g έχει **μεγαλύτερη τάξη μεγέθους** *στο ξ από την f. Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης για μη-μηδενισμό των f, g, η ισότητα $\lim_{x\to\xi}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty$.*
Τέλος, αν υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει $0 < l \le \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le u < +\infty$ κοντά στο ξ, τότε λέμε ότι οι f, g έχουν **ίδια τάξη μεγέθους** *στο ξ.*

Αν υπάρχει το $\rho = \lim_{x\to\xi}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ και είναι θετικός αριθμός, τότε μπορούμε να επιλέξουμε l ώστε $0 < l < \rho$ (για παράδειγμα, τον $l = \frac{\rho}{2}$) και $u > \rho$ (για παράδειγμα, τον $u = 2\rho$) και τότε ισχύει $l < \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < u$ κοντά στο ξ, οπότε οι f, g έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο ξ.

Παράδειγμα 5.8.1. Για κάθε $b > 0$, $a > 1$, η x^b έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στο $+\infty$ από την a^x, διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x} = 0$.

Παράδειγμα 5.8.2. Για κάθε $c > 0$, $b > 0$, η $(\log x)^c$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στο $+\infty$ από την x^b, διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^c}{x^b} = 0$.

Παράδειγμα 5.8.3. Αν $a_n, b_n \neq 0$, οι $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ και $b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$, αφού $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| > 0$.

Παράδειγμα 5.8.4. Έστω $a_n, b_m \neq 0$ και $n < m$. Η $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στο $+\infty$ από την $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$. Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} = 0$.

Παράδειγμα 5.8.5. Για κάθε $a > 1$, $b > 0$, η $a^{-1/x}$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στον 0 από την x^b, διότι $\lim_{x\to0+}\frac{a^{-1/x}}{x^b} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^b}{a^t} = 0$.

Παράδειγμα 5.8.6. Οι $1 - \cos x$ και x^2 έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 0, διότι $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} > 0$.

Παράδειγμα 5.8.7. Οι $\sin x$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 0, διότι $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1 > 0$.
Οι $e^x - 1$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 0, διότι $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1 > 0$.
Οι $\log x$ και $x - 1$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 1, διότι $\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1} = 1 > 0$.

Παράδειγμα 5.8.8. Για κάθε $c > 0$, $b > 0$, η $f(x) = (\log\frac{1}{x})^c$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στον 0 από την x^{-b}, διότι $\lim_{x\to0+}\frac{(\log(1/x))^c}{x^{-b}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{(\log t)^c}{t^b} = 0$.

Παράδειγμα 5.8.9. Το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty}(2 + \sin x)$ δεν υπάρχει. Όμως, οι $2x + x\sin x$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$. Πράγματι, ισχύει $1 \le \frac{2x+x\sin x}{x} \le 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Θα περιγράψουμε, τώρα, ειδικά για την περίπτωση $\lim_{x\to+\infty}$ μερικούς ευρέως χρησιμοποιούμενους όρους: την *πολυωνυμική*, την *εκθετική* και τη *λογαριθμική τάξη μεγέθους* στο $+\infty$.

Είδαμε στο παράδειγμα 5.8.3 ότι όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$. Αυτό το κωδικοποιούμε λέγοντας ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** ή, ειδικώτερα, πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού n στο $+\infty$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 5.8.4, μπορούμε να "ιεραρχήσουμε" τις πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους στο $+\infty$ ανάλογα με τον βαθμό τους: μεγαλύτερος βαθμός αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. Φυσικά, από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n η πιο απλή είναι η x^n. Πρέπει, τώρα, να πούμε ότι ο όρος "πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού n" χαρακτηρίζει όχι μόνο τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n αλλά κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με την x^n στο $+\infty$.

Παράδειγμα 5.8.10. Κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_n, b_m \neq 0$ και $n > m$, έχει πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού $n-m$ στο $+\infty$, αφού $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{R(x)}{x^{n-m}}\right| = \left|\frac{a_n}{b_m}\right| > 0$.

Ο όρος "πολυωνυμική τάξη μεγέθους" χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις x^b ακόμη και όταν ο εκθέτης $b > 0$ δεν είναι κατ' ανάγκη φυσικός καθώς και για κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από αυτές τις x^b στο $+\infty$. Πιο συγκεκριμένα:

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η f έχει* **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** *βαθμού $b > 0$ στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την συνάρτηση x^b στο $+\infty$.*

Προφανώς, οι πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τον βαθμό τους, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{b_1}}{x^{b_2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{b_2-b_1}} = 0 \qquad \text{αν } 0 < b_1 < b_2.$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι κάθε συνάρτηση με πολυωνυμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Πράγματι, αν η f έχει ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την x^b για κάποιον $b > 0$, τότε υπάρχουν $u, l > 0$ ώστε να ισχύει $l \leq \left|\frac{f(x)}{x^b}\right| \leq u$ και, επομένως, $|f(x)| \geq lx^b$ κοντά στο $+\infty$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} lx^b = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $a > 1$, λέμε ότι η συνάρτηση a^x έχει* **εκθετική τάξη μεγέθους** *στο $+\infty$. Το ίδιο λέμε και για κάθε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την a^x για κάποιον $a > 1$.*

Οι εκθετικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τη βάση a, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{{a_1}^x}{{a_2}^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x = 0 \qquad \text{αν } 1 < a_1 < a_2.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $c > 0$, λέμε ότι η συνάρτηση $(\log x)^c$ έχει* **λογαριθμική τάξη μεγέθους** *στο $+\infty$. Το ίδιο ισχύει για κάθε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την $(\log x)^c$ για κάποιον $c > 0$.*

Οι λογαριθμικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τον εκθέτη c, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^{c_1}}{(\log x)^{c_2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\log x)^{c_2-c_1}} = 0 \qquad \text{αν } 0 < c_1 < c_2.$$

Όπως και με τις συναρτήσεις πολυωνυμικής τάξης μεγέθους, παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση με εκθετική ή λογαριθμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια.

Στα παραδείγματα 5.8.1 και 5.8.2 είδαμε ότι, στο $+\infty$, κάθε λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους και κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε εκθετική τάξη μεγέθους.

Πρέπει να επισημανθεί ότι ως σύνολο A μπορεί, φυσικά, να θεωρηθεί το $\mathbb{N}$ με σημείο συσσώρευσης το $+\infty$. Επομένως, οι προηγούμενοι ορισμοί ισχύουν και στην περίπτωση των ακολουθιών ως ειδική κατηγορία συναρτήσεων. Για παράδειγμα, λέμε ότι η ακολουθία (a^n), όπου $a > 1$, έχει εκθετική τάξη μεγέθους, ότι η (n^a), όπου $a > 0$, έχει πολυωνυμική τάξη μεγέθους και ότι η $\big((\log n)^c\big)$, όπου $c > 0$, έχει λογαριθμική τάξη μεγέθους. Θεωρείται περιττό να αναφέρουμε ότι αυτά για τις ακολουθίες ισχύουν μόνο στο $+\infty$, αφού το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$ είναι το $+\infty$ και, εξάλλου, όταν μελετάμε ακολουθίες εννοείται ότι θεωρούμε όρια αποκλειστικά καθώς $n \to +\infty$.

Παράδειγμα 5.8.11. Είναι προφανής η κατάταξη των διαφόρων εκθετικών, πολυωνυμικών και λογαριθμικών τάξεων μεγέθους ακολουθιών. Είναι ίδια με την κατάταξη των τάξεων μεγέθους των αντίστοιχων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 5.8.12. Η ακολουθία $(1 - \cos\frac{1}{n})$ έχει ίδια τάξη μεγέθους με την ακολουθία $(\frac{1}{n^2})$.

Παράδειγμα 5.8.13. Η ακολουθία $\big(\log(1 + \frac{1}{n})\big)$ έχει ίδια τάξη μεγέθους με την ακολουθία $(\frac{1}{n})$.

Ασυμπτωτική ισότητα. Κύριοι όροι.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, τότε γράφουμε*

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \quad \text{στο } \xi$$

και διαβάζουμε: η f είναι **μικρό όμικρον** *της g στο ξ.*
Αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M|g(x)|$ κοντά στο ξ, τότε γράφουμε

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \quad \text{στο } \xi$$

και διαβάζουμε: η f είναι **μεγάλο όμικρον** *της g στο ξ.*

Παράδειγμα 5.8.14. Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την g στο ξ, τότε $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Το αντίστροφο ισχύει, φυσικά, αν $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ.
Για παράδειγμα, είναι $(\log x)^c = \mathrm{o}\big(x^b\big)$ και $x^b = \mathrm{o}\big(a^x\big)$ στο $+\infty$ για κάθε $a > 1$ και $b, c > 0$. Επίσης, είναι $x^{b_1} = \mathrm{o}\big(x^{b_2}\big)$ στο $+\infty$ αλλά και $x^{b_2} = \mathrm{o}\big(x^{b_1}\big)$ στον 0 αν $0 < b_1 < b_2$.

Παράδειγμα 5.8.15. Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από ή την ίδια τάξη μεγέθους με την g στο ξ, τότε $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ στο ξ.
Για παράδειγμα, είναι $\sin x = \mathrm{O}(x)$ και $1 - \cos x = \mathrm{O}(x^2)$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.16. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Το να είναι η f παραγωγίσιμη στον ξ με παράγωγο $f'(\xi)$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει

$$f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x - \xi) = \mathrm{o}(x - \xi) \quad \text{στον } \xi$$

Πράγματι, το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi)}{x-\xi} = 0$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, τότε γράφουμε*

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{στο } \xi$$

και λέμε ότι η f είναι **ασυμπτωτικά ίση** *με την g στο ξ.*

Παρατηρήστε ότι από το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ και, επομένως, $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Δηλαδή, αν είναι $f(x) \sim g(x)$ στο ξ, τότε ισχύει $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Επομένως, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$, οπότε είναι $g(x) \sim f(x)$ στο ξ. Άρα η σχέση της ασυμπτωτικής ισότητας είναι συμμετρική.

Παράδειγμα 5.8.17. $\sin x \sim x$ και $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.18. $e^x - 1 \sim x$ στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Παράδειγμα 5.8.19. $\log x \sim x - 1$ στον 1, διότι $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Παράδειγμα 5.8.20. $\tan x \sim \frac{1}{x-(\pi/2)}$ στον $\frac{\pi}{2}$, διότι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1/(x-(\pi/2))} = \lim_{t\to 0} t\tan(t + \frac{\pi}{2}) = \lim_{t\to 0} t\cot t = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}\cos t = 1$.

Ιδού ένα χρήσιμο αποτέλεσμα:
Έστω $c \neq 0$. Τότε η σχέση $f(x) - g(x) = o\big(cg(x)\big)$ είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ισότητα $f(x) \sim g(x)$.
Πράγματι: $f(x) - g(x) = \mathrm{o}\big(cg(x)\big)$ στο ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-g(x)}{cg(x)} = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \big(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\big) = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ αν και μόνο αν $f(x) \sim g(x)$ στο ξ.

Βάσει των προηγούμενων παραδειγμάτων:

Παράδειγμα 5.8.21. $\sin x - x = \mathrm{o}(x)$ και $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \mathrm{o}(x^2)$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.22. $e^x - 1 - x = \mathrm{o}(x)$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.23. $\log(1+x) - x = \mathrm{o}(x)$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.24. $\tan x - \frac{1}{x-(\pi/2)} = \mathrm{o}\big(\frac{1}{x-(\pi/2)}\big)$ στον $\frac{\pi}{2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.18. [α] *Αν όλες οι $g_1, \ldots, g_n$ είναι μικρό όμικρον της ίδιας g στο ξ, τότε και η $g_1 + \cdots + g_n$ είναι μικρό όμικρον της g στο ξ.*
[β] *Αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ είναι όλες οι $g_1, \ldots, g_n$ μικρό όμικρον της g στο ξ, τότε είναι $f(x) \sim g(x)$ στο ξ.*

Απόδειξη. [α] $\lim_{x\to\xi} \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{g_1(x)}{g(x)} + \cdots + \lim_{x\to\xi} \frac{g_n(x)}{g(x)} = 0 + \cdots + 0 = 0$.
[β] $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \big(1 + \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)}\big) = 1 + 0 = 1$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ είναι όλες οι $g_1, \ldots, g_n$ μικρό όμικρον της g στο ξ, τότε η g χαρακτηρίζεται* **κύριος όρος** *του αθροίσματος στο ξ.*

Είναι *ιδιαιτέρως χρήσιμο* να μπορούμε να διακρίνουμε τον κύριο όρο σε ένα άθροισμα συναρτήσεων.
Για παράδειγμα, αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ η g είναι ο κύριος όρος στο ξ και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} g(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και τα δυο όρια είναι ίσα. Διότι, όπως είδαμε, είναι $f(x) \sim g(x)$ στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)}\, g(x) = 1 \cdot \lim_{x\to\xi} g(x)$.
Ένα ακόμη παράδειγμα: αν στις $g + g_1 + \cdots + g_n$ και $h + h_1 + \cdots + h_m$ οι g, h είναι οι κύριοι όροι, αντιστοίχως, στο ξ, τότε $\frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)} \sim \frac{g(x)}{h(x)}$ στο ξ και, επομένως, αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)}{h(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)}$ και τα δυο όρια είναι ίσα.

Παράδειγμα 5.8.25. Βάσει των προηγουμένων μπορούμε να δούμε με "νέο μάτι" τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων.
Επειδή $x^k = \mathrm{o}(x^n)$ στο $+\infty$ για κάθε $k < n$, στο πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, όπου $a_n \neq 0$, ο όρος a_nx^n είναι κύριος όρος στο $+\infty$, οπότε $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \sim a_nx^n$ στο $+\infty$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n$.
Ομοίως, $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} \sim \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$ στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

Παράδειγμα 5.8.26. Στα αθροίσματα $xe^{2x} - x^2 + 3e^x - x^2e^{\frac{x}{2}}$ και $2e^{2x} + \log x - x^2e^x$ ο πρώτος τους όρος είναι ο κύριος όρος στο $+\infty$. Άρα $\frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} \sim \frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}$ στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$.

Όπως επισημάναμε λίγο πριν, όλα τα προηγούμενα βρίσκουν προφανή εφαρμογή σε ακολουθίες, όπου το πεδίο ορισμού A είναι το $\mathbb{N}$ με σημείο συσσώρευσης το $+\infty$.

Ασκήσεις.

5.8.1. Έστω $a > 1$. Ιεραρχήστε τις a^x, a^{a^x}, $a^{a^{a^x}}$ κατά τάξη μεγέθους στο $+\infty$.
Ιεραρχήστε τις $\log x$, $\log(\log x)$, $\log(\log(\log x))$ κατά τάξη μεγέθους στο $+\infty$.

5.8.2. Αποδείξτε ότι οι x, $\log(e^x + x\log x)$, $e^{(1+(1/x))\log x}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$.
Αποδείξτε ότι οι x, $\frac{x^2+x^3\log x}{\sin x+x^2}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 0.

5.8.3. Έστω οι $\frac{x^3e^x-x^5e^{x/2}}{xe^x+\sin x}$, $e^{x/5} + x^3e^{x/6} - x$, $e^{3\log(2+\log x)}$. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους τους στο $+\infty$ σε πολυωνυμικές, εκθετικές και λογαριθμικές και ιεραρχήστε τις.

5.8.4. Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους** στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την x^b για κάποιον $b < 0$. Ομοίως, λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη εκθετική** ή **αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους** στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την a^x για κάποιον $a \in (0,1)$ ή με την $(\log x)^c$ για κάποιον $c < 0$, αντιστοίχως.

Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση με αντίστροφη πολυωνυμική ή αντίστροφη εκθετική ή αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει όριο 0 στο $+\infty$.

Αποδείξτε ότι στο $+\infty$ κάθε αντίστροφη εκθετική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους και ότι κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους.

Ιεραρχήστε τις αντίστροφες πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους μεταξύ τους και κάντε το ίδιο για τις αντίστροφες εκθετικές και τις αντίστροφες λογαριθμικές τάξεις μεγέθους.

Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_n, b_m \neq 0$ και $n < m$, έχει αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$.

Έστω οι συναρτήσεις $e^{-x}+2e^{-x^2}$, $\frac{1}{\log(x+\log x)}$, $\log\left(e^{1/x}+\frac{1}{x^2}\right)$. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους τους στο $+\infty$ σε αντίστροφες πολυωνυμικές, αντίστροφες εκθετικές και αντίστροφες λογαριθμικές.

5.8.5. Έστω $f(x) - (a + bx + cx^2 + dx^3) = \mathrm{o}(x^3)$ στον 0. Αποδείξτε διαδοχικά ότι $f(x) - (a + bx + cx^2) = \mathrm{o}(x^2)$, $f(x) - (a + bx) = \mathrm{o}(x)$ και $f(x) - a = \mathrm{o}(1)$ στον 0.

Βρείτε a, b, c, d ώστε $\frac{x}{e^x-1} - (a + bx + cx^2 + dx^3) = \mathrm{o}(x^3)$ στον 0.

5.8.6. Ξαναδείτε το αποτέλεσμα της άσκησης 5.6.11[α]. Έστω $a < \xi < b$ και έστω ότι η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$ και είναι αριθμός, αποδείξτε ότι

$$f(x) - \left(f(\xi) + \frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\right) = \mathrm{o}\big((x-\xi)^n\big) \quad \text{στον } \xi.$$

Αποδείξτε ότι:

(i) $\frac{1}{1-x} - (1 + x + \cdots + x^n) = \mathrm{o}(x^n)$ στον 0.

(ii) $e^x - \left(1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right) = \mathrm{o}(x^n)$ στον 0.

(iii) $\log\frac{1}{1-x} - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n\right) = \mathrm{o}(x^n)$ στον 0.

(iv) $\log(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right) = \mathrm{o}(x^n)$ στον 0.

(v) $\cos x - \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}\right) = \mathrm{o}(x^{2m})$ στον 0 για $m \geq 0$.

(vi) $\sin x - \left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}\right) = \mathrm{o}(x^{2m-1})$ στον 0 για $m \geq 1$.

(vii) $\arctan x - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}x^{2m-1}\right) = \mathrm{o}(x^{2m-1})$ στον 0 για $m \geq 1$.

5.8.7. Ποιοί είναι οι κύριοι όροι των $e^{2x}\log x - x^5e^x$, $x\log x - \frac{x^2}{\log x} + x\sqrt{x}\log(\log x)$, $x^2\log x - x^2 + 3x\sin x$ στο $+\infty$;

Ποιοί είναι οι κύριοι όροι των $\frac{2}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}$, $1 + 2x - x\sqrt{x}$, $\frac{1}{(\sin x)^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$ στον 0;

5.8.8. Βρείτε, αν υπάρχει, συνάρτηση $f : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ ώστε, για κάθε $a > 0$ να είναι $f(x) = \mathrm{o}(e^{ax})$ και $x^a = \mathrm{o}(f(x))$ στο $+\infty$.

5.8.9. Αν $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ, αποδείξτε ότι $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $\mathrm{o}\big(g(x)\big) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Προσέξτε: *δεν* ισχύει $\mathrm{O}\big(g(x)\big) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$.

Είδαμε ότι, αν $f_1(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ και $f_2(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ στο ξ, τότε $f_1(x) + f_2(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $\mathrm{o}\big(g(x)\big) + \mathrm{o}\big(g(x)\big) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Αποδείξτε και τα ανάλογα: $\mathrm{O}\big(g(x)\big)+\mathrm{O}\big(g(x)\big) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, $\mathrm{o}\big(g_1(x)\big)\cdot\mathrm{O}\big(g_2(x)\big) = \mathrm{o}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ και $\mathrm{O}\big(g_1(x)\big)\cdot\mathrm{O}\big(g_2(x)\big) = \mathrm{O}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ στο ξ.

Κεφάλαιο 6

Ολοκληρώματα Riemann.

6.1 Διαμερίσεις και αθροίσματα Darboux.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ονομάζουμε* **διαμέριση** *του διαστήματος $[a,b]$ οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $[a,b]$ το οποίο περιέχει τουλάχιστον τους a, b. Κάθε διαμέριση του $[a,b]$ τη συμβολίζουμε, συνήθως,*

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Η Δ ονομάζεται **διαμέριση** *$n+1$ σημείων του $[a,b]$ και τα $x_0, \ldots, x_n$ ονομάζονται* **Δ-σημεία**. *Το x_k ονομάζεται k-οστό Δ-σημείο. Η Δ χωρίζει το $[a,b]$ στα n διαστήματα $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, τα οποία ονομάζονται* **Δ-διαστήματα**. *Το $[x_{k-1}, x_k]$ ονομάζεται k-οστό Δ-διάστημα.*

Η απλούστερη διαμέριση του $[a,b]$ είναι η $\Delta = \{a = x_0, x_1 = b\}$. Αυτή ορίζει *ένα* μόνο Δ-διάστημα, το $[x_0, x_1] = [a,b]$. Αυτή είναι η μοναδική διαμέριση δύο σημείων του $[a,b]$. Όμως, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τριών σημείων του $[a,b]$. Πράγματι, κάθε $x_1 \in (a,b)$ ορίζει διαμέριση $\{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$ τριών σημείων. Προφανώς, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τεσσάρων σημείων, πέντε σημείων κλπ.

Η απλούστερη διαμέριση $n+1$ σημείων Δ του $[a,b]$ είναι η διαμέριση σε n *ισομήκη* υποδιαστήματα. Πώς κατασκευάζουμε αυτήν την διαμέριση; Επειδή το πλήθος των Δ-διαστημάτων είναι n και το συνολικό τους μήκος $b-a$, το μήκος καθενός από αυτά είναι $\frac{b-a}{n}$. Επομένως, τα Δ-σημεία είναι τα $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$ και ούτω καθ' εξής: για κάθε $k = 0, \ldots, n$ το k-οστό Δ-σημείο είναι το

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n}.$$

Πράγματι, τότε το μήκος του $[x_{k-1}, x_k]$ είναι

$$x_k - x_{k-1} = (a + k\tfrac{b-a}{n}) - (a + (k-1)\tfrac{b-a}{n}) = \tfrac{b-a}{n}$$

και το n-οστό Δ-σημείο είναι το $x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$.

Τονίζουμε ότι, αν $n \geq 2$, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις $n+1$ σημείων του $[a,b]$ και όχι μόνο η διαμέριση σε ισομήκη υποδιαστήματα. Για παράδειγμα, η $\{0, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{13}{15}, \frac{23}{24}, 1\}$ είναι μια διαμέριση 6 σημείων του $[0,1]$ και η $\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$ είναι η διαμέριση 6 σημείων σε ισομήκη υποδιαστήματα του $[0,1]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Η Δ'' χαρακτηρίζεται* **λεπτότερη** *από την Δ' αν $\Delta' \subseteq \Delta''$ ή, με άλλα λόγια, αν κάθε Δ'-σημείο είναι και Δ''-σημείο ή, με άλλα λόγια, αν η Δ'' περιέχει τα σημεία της Δ' και πιθανόν επιπλέον σημεία.*

Παράδειγμα 6.1.1. Η διαμέριση $\Delta'' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$ είναι λεπτότερη από τη διαμέριση $\Delta' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0,1]$.

Παράδειγμα 6.1.2. Από τις διαμερίσεις $\Delta' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, 1\}$, $\Delta'' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0, 1]$ καμιά δεν είναι λεπτότερη από την άλλη.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε η $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ είναι διαμέριση του $[a, b]$ και ονομάζεται* **κοινή εκλέπτυνση** *των Δ', Δ''. Προφανώς, είναι $\Delta' \subseteq \Delta$ και $\Delta'' \subseteq \Delta$, δηλαδή η Δ είναι λεπτότερη από την Δ' και από την Δ''.*

Παράδειγμα 6.1.3. Στο παράδειγμα 6.1.1 η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η Δ'', ενώ στο παράδειγμα 6.1.2 η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η $\Delta = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$.

Το λήμμα 6.1 λέει ότι η κοινή εκλέπτυνση των διαμερίσεων Δ', Δ'' του $[a, b]$ είναι, από όλες τις διαμερίσεις του $[a, b]$ που είναι λεπτότερες απο την Δ' και από την Δ'', εκείνη που έχει τα λιγότερα σημεία.

ΛΗΜΜΑ 6.1. *Έστω Δ', Δ'' διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε κάθε διαμέριση του $[a, b]$ οι οποία είναι λεπτότερη από την Δ' και την Δ'' είναι λεπτότερη και από την κοινή εκλέπτυνση $\Delta' \cup \Delta''$.*

Απόδειξη. Έστω διαμέριση Δ''' του $[a, b]$ λεπτότερη από την Δ' και από την Δ''. Δηλαδή, έστω $\Delta' \subseteq \Delta'''$ και $\Delta'' \subseteq \Delta'''$. Τότε $\Delta' \cup \Delta'' \subseteq \Delta'''$, οπότε η Δ''' είναι λεπτότερη από την $\Delta' \cup \Delta''$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Για κάθε Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ συμβολίζουμε*

$$l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Ονομάζουμε **κάτω άθροισμα Darboux** *της f ως προς την Δ στο $[a, b]$ το*

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = l_1(x_1 - x_0) + \cdots + l_n(x_n - x_{n-1})$$

και **άνω άθροισμα Darboux** *της f ως προς την Δ στο $[a, b]$ το*

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = u_1(x_1 - x_0) + \cdots + u_n(x_n - x_{n-1}).$$

Ακολουθούν δυο γενικά αλλά πολύ χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.1.4. Έστω *αύξουσα* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Τότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ η f έχει ελάχιστη τιμή $f(x_{k-1})$ και μέγιστη τιμή $f(x_k)$. Άρα $l_k = f(x_{k-1})$ και $u_k = f(x_k)$ και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Αν η f είναι φθίνουσα, το μόνο που αλλάζει είναι ότι $l_k = f(x_k)$ και $u_k = f(x_{k-1})$ και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

Παράδειγμα 6.1.5. Έστω *συνεχής* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν ζ_k και η_k ώστε να ισχύει $f(\zeta_k) \le f(x) \le f(\eta_k)$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Άρα $l_k = f(\zeta_k)$ και $u_k = f(\eta_k)$, οπότε

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πολλές φορές παρακάτω και, μερικές φορές, ακόμη και *χωρίς ιδιαίτερη επισήμανση.*

Παρατήρηση 1. Έστω φραγμένη $f : [c, d] \to \mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, c \le x \le d\}$ είναι φραγμένο και, αν $l = \inf\{f(x) \,|\, c \le x \le d\}$ και $u = \sup\{f(x) \,|\, c \le x \le d\}$, τότε είναι $l \le u$. Επίσης, έστω $[c', d'] \subseteq [c, d]$ και $l' = \inf\{f(x) \,|\, c' \le x \le d'\}$ και $u' = \sup\{f(x) \,|\, c' \le x \le d'\}$.

Τότε για κάθε $x \in [c', d']$ ισχύει $x \in [c, d]$, οπότε $l \leq f(x) \leq u$. Άρα οι l και u είναι, αντιστοίχως, κάτω φράγμα και άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \,|\, c' \leq x \leq d'\}$, οπότε $l \leq l' \leq u' \leq u$. Με λόγια:

Όταν το διάστημα μικραίνει, τότε το infimum της συνάρτησης μεγαλώνει (με την ευρεία έννοια) και το supremum της μικραίνει (με την ευρεία έννοια).

Παρατήρηση 2. Από $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1})$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1})$ προκύπτει με αφαίρεση η ισότητα

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Επειδή είναι $l_k \leq u_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, κάθε όρος του τελευταίου αθροίσματος είναι μη-αρνητικός, οπότε και *το συνολικό άθροισμα είναι μη-αρνητικό*. Επίσης, αν παραλείψουμε κάποιους όρους του αθροίσματος, *το άθροισμα που θα απομείνει θα είναι κι αυτό μη-αρνητικό και μικρότερο ή ίσο του αρχικού αθροίσματος*.

Παρατήρηση 3. Θεωρούμε $l = \inf\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και $u = \sup\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$, όπως στην πρώτη παρατήρηση, και έστω ότι ισχύει $f(s) - f(t) \leq w$ για κάθε $s, t \in [c, d]$.
Τότε για κάθε $s \in [c, d]$ ισχύει: $f(s) - w \leq f(t)$ για κάθε $t \in [c, d]$. Άρα για κάθε $s \in [c, d]$ ο $f(s) - w$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και, επομένως, είναι $f(s) - w \leq l$ ή, ισοδύναμα, $f(s) \leq w + l$. Τώρα, ο $w + l$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$, οπότε είναι $u \leq w + l$. Άρα $u - l \leq w$.
Το ίδιο πράγμα αποδεικνύεται και με άλλο τρόπο. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $x' \in [c, d]$ ώστε $f(x') > u - \frac{\epsilon}{2}$ και υπάρχει $x'' \in [c, d]$ ώστε $f(x'') < l + \frac{\epsilon}{2}$. Άρα $u - l - \epsilon < f(x') - f(x'') \leq w$. Άρα ισχύει $u - l - w < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $u - l - w \leq 0$ και, επομένως, $u - l \leq w$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, με δυο τρόπους το εξής συμπέρασμα:
Αν ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος ή ίσος όλων των διαφορών των τιμών της συνάρτησης σε ένα διάστημα, τότε είναι μεγαλύτερος ή ίσος της διαφοράς του supremum και του infimum της συνάρτησης στο διάστημα.

ΛΗΜΜΑ 6.2. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση Δ του $[a, b]$. Αν u και l είναι το supremum και το infimum της f στο $[a, b]$, τότε*

$$l(b - a) \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq u(b - a).$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$. Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ είναι $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, b]$, οπότε από την Παρατήρηση 1 έχουμε

$$l \leq l_k \leq u_k \leq u$$

και, επομένως,

$$l(x_k - x_{k-1}) \leq l_k(x_k - x_{k-1}) \leq u_k(x_k - x_{k-1}) \leq u(x_k - x_{k-1}).$$

Με άθροιση συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} l(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u(x_k - x_{k-1}).$$

Το αριστερό άθροισμα είναι ίσο με $l \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = l(b - a)$ και το δεξιό άθροισμα είναι ίσο με $u \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = u(b - a)$. Τα δυο μεσαία αθροίσματα είναι τα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$. □

Το λήμμα 6.3 είναι πολύ βασικό για την ανάπτυξη της θεωρίας. Λέει ότι, *όταν εκλεπτύνεται η διαμέριση, το άνω άθροισμα Darboux μικραίνει (με την ευρεία έννοια) και το κάτω άθροισμα Darboux μεγαλώνει (με την ευρεία έννοια).*

ΛΗΜΜΑ 6.3. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$. Αν η Δ'' είναι λεπτότερη από την Δ', τότε*

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta').$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$. Η Δ'' περιέχει τα Δ'-σημεία και πιθανόν περισσότερα σημεία. Έτσι, σε κάθε Δ'-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ενδέχεται να υπάρχουν και άλλα Δ''-σημεία, εκτός των x_{k-1} και x_k. Θεωρούμε, τώρα, σε κάθε Δ'-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ όλα τα Δ''-σημεία τα οποία περιέχονται στο διάστημα αυτό και με αυτά τα σημεία δημιουργούμε μια διαμέριση Δ''_k του διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$. (Αν η Δ'' περιέχει μόνο τα σημεία x_{k-1} και x_k από το $[x_{k-1}, x_k]$ τότε η Δ''_k είναι διαμέριση δυο μόνο σημείων. Αλλιώς η Δ''_k έχει περισσότερα σημεία του $[x_{k-1}, x_k]$.) Έτσι, η Δ'' χωρίζεται σε μικρότερες διαδοχικές διαμερίσεις $\Delta''_0, \ldots, \Delta''_n$, μια Δ''_k για κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ της Δ'. Δηλαδή,

$$\Delta'' = \cup_{k=1}^n \Delta''_k.$$

Είναι σαφές ότι τα Δ''_k-διαστήματα είναι εκείνα ακριβώς τα Δ''-διαστήματα τα οποία περιέχονται στο $[x_{k-1}, x_k]$. Παρατηρούμε, τώρα, ότι οι όροι του αθροίσματος $\overline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k)$ είναι εκείνοι ακριβώς οι όροι του αθροίσματος $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$ οι οποίοι αντιστοιχούν στα Δ''-διαστήματα τα οποία περιέχονται στο $[x_{k-1}, x_k]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') &= \textstyle\sum_{k=1}^n \overline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k) \\ \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') &= \textstyle\sum_{k=1}^n \underline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα 6.2 σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$, βρίσκουμε

$$l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \underline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k) \leq \overline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k) \leq u_k(x_k - x_{k-1}) \tag{6.2}$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Το τελικό συμπέρασμα προκύπτει αθροίζοντας τις ανισότητες αυτές για $k = 1, \ldots, n$ και χρησιμοποιώντας τις (6.1) για τα δυο μεσαία αθροίσματα που θα προκύψουν. Από την άθροιση των αριστερών και των δεξιών όρων της (6.2) προκύπτουν τα $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')$ και $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')$, αντιστοίχως. Από την άθροιση των μεσαίων όρων της (6.2) προκύπτουν, με χρήση των (6.1), τα $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$ και $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$. □

Και το λήμμα 6.4 είναι πολύ βασικό. Λέει ότι *κάθε κάτω άθροισμα Darboux είναι μικρότερο ή ίσο κάθε άνω αθροίσματος Darboux, ακόμη κι αν τα δυο αυτά αθροίσματα Darboux δεν προέρχονται από την ίδια διαμέριση*.

ΛΗΜΜΑ 6.4. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Τότε είναι*

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$$

για κάθε δυο διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$.
Η Δ είναι λεπτότερη από την Δ' και από την Δ'', οπότε από το λήμμα 6.3 έχουμε

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'').$$

Επίσης, από το λήμμα 6.2 (δηλαδή για μία διαμέριση) συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Από τις τρεις αυτές ανισότητες συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$. □

Τονίζουμε ότι, για να ορίσουμε τα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux μιας συνάρτησης σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, *προϋποτίθεται* ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη στο διάστημα.

Ασκήσεις.

6.1.1. Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Αν υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.
Αν υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

6.1.2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$, τότε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ είναι $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = +\infty$ και ότι, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη στο $[a, b]$, τότε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ είναι $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = -\infty$.

6.1.3. Έστω $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ και $l = \inf\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και $u = \sup\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$. Ορίζουμε $\omega(f; c, d) = u - l$.[1]
Παρατηρήστε ότι $0 \leq \omega(f; c, d) \leq +\infty$ και αποδείξτε ότι $\omega(f; c, d) < +\infty$ αν και μόνο αν η f είναι φραγμένη στο $[c, d]$.
Αποδείξτε ότι $\omega(f; c, d) = \sup\{f(s) - f(t) \,|\, s, t \in [c, d]\} = \sup\{|f(s) - f(t)| \,|\, s, t \in [c, d]\}$.
Αν $[c', d'] \subseteq [c, d]$, αποδείξτε ότι $\omega(f; c', d') \leq \omega(f; c, d)$.

6.2 Ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του Darboux.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ονομάζουμε* **κάτω ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b]$ το*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \tag{6.3}$$

και **άνω ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b]$ το*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}. \tag{6.4}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και u και l το supremum και το infimum της f στο $[a, b]$. Τότε*

$$l(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq u(b - a).$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από το λήμμα 6.2 ότι ισχύει $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq u(b - a)$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$. Επειδή, λόγω της (6.4), ισχύει $\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ για κάθε Δ, συνεπάγεται $\overline{\int_a^b} f \leq u(b - a)$.
Ομοίως, από το λήμμα 6.2 ισχύει $l(b - a) \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ και, επειδή, λόγω της (6.3) ισχύει $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \underline{\int_a^b} f$ για κάθε Δ, συνεπάγεται $l(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f$.
Τώρα, έστω τυχούσες διαμερίσεις Δ' και Δ'' του $[a, b]$.
Από το λήμμα 6.4 συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$.
Άρα το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a, b]\}$, οπότε, λόγω της (6.4), είναι $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \overline{\int_a^b} f$.
Άρα το $\overline{\int_a^b} f$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a, b]\}$ και, επομένως, λόγω της (6.3), είναι $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **ολοκληρώσιμη** *ή, πιο σωστά,* **Riemann ολοκληρώσιμη** *στο $[a, b]$ αν $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε την*

[1] Το $\omega(f; c, d)$ ονομάζεται **ταλάντωση** της f στο διάστημα $[c, d]$. Υπάρχουν και οι σχετικές έννοιες της ταλάντωσης *σε σημείο* στις ασκήσεις 3.6.2 και 4.1.16.

κοινή τιμή των $\underline{\int_a^b} f$ *και* $\overline{\int_a^b} f$ *ονομάζουμε* **ολοκλήρωμα** *ή, πιο σωστά,* **Riemann ολοκλήρωμα** *της* f *στο* $[a, b]$ *και τη συμβολίζουμε* $\int_a^b f$*. Δηλαδή, αν η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$*, ορίζουμε*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Ο ορισμός αυτός του ολοκληρώματος Riemann είναι ο ορισμός τον οποίο έδωσε ο Darboux. Στην ενότητα 6.5 θα γνωρίσουμε και τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann που έδωσε ο Riemann.

Είναι πολύ συνηθισμένο να συμβολίζουμε τα $\int_a^b f$, $\underline{\int_a^b} f$ και $\overline{\int_a^b} f$ με τρόπο ώστε να φαίνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης f. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Φυσικά, τα ολοκληρώματα αυτά παραμένουν αμετάβλητα αν, αλλάζοντας το σύμβολο της ανεξάρτητης μεταβλητής, τα συμβολίσουμε $\int_a^b f(t)\,dt$, $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt$ και $\overline{\int_a^b} f(t)\,dt$, αντιστοίχως.

Παράδειγμα 6.2.1. Έστω σταθερή συνάρτηση c στο διάστημα $[a, b]$.
Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ η συνάρτηση έχει μόνο μια τιμή, τον c, οπότε $l_k = u_k = c$ και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a), \quad \overline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a).$$

Άρα τα σύνολα $\big\{\underline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a, b]\big\}$, $\big\{\overline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a, b]\big\}$ έχουν ένα μόνο στοιχείο, τον αριθμό $c(b-a)$. Άρα το supremum του πρώτου συνόλου είναι ο $c(b-a)$ και το infimum του δεύτερου συνόλου είναι, επίσης, ο $c(b-a)$. Δηλαδή,

$$\underline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a), \qquad \overline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a)$$

και, επομένως, η c είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Παράδειγμα 6.2.2. Έστω η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet** του διαστήματος $[a, b]$.
Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν ρητοί και άρρητοι, οπότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$ είναι το δισύνολο $\{0, 1\}$. Άρα $l_k = 0$ και $u_k = 1$. Άρα

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n 0(x_k - x_{k-1}) = 0, \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n 1(x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Άρα το $\big\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a, b]\big\}$ είναι το μονοσύνολο $\{0\}$, οπότε το supremum του είναι ο 0, και το $\big\{\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a, b]\big\}$ είναι το μονοσύνολο $\{b-a\}$, οπότε το infimum του είναι ο $b-a$. Δηλαδή,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a > 0.$$

Άρα $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, οπότε η f *δεν* είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και *δεν* ορίζεται το $\int_a^b f(x)\,dx$.

Παρατηρήστε ότι, λόγω των (6.3) και (6.4) και της πρότασης 6.1, για κάθε φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε δυο διαμερίσεις Δ' και Δ'' του $[a, b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$$

και, στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'').$$

Αυτές τις ανισότητες θα τις χρησιμοποιούμε συχνά από εδώ και πέρα.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το βασικό *θεωρητικό* κριτήριο για να αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ. *Έστω φραγμένη* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει διαμέριση* Δ *του* $[a, b]$ *ώστε* $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, λόγω των (6.3) και (6.4), υπάρχουν διαμερίσεις Δ' και Δ'' του $[a, b]$ ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \tfrac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'), \qquad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.5}$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, οπότε οι ανισότητες (6.5) μαζί με το λήμμα 6.3 συνεπάγονται

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \tfrac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.6}$$

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, οι ανισότητες (6.6) γράφονται

$$\int_a^b f(x)\, dx - \tfrac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \int_a^b f(x)\, dx + \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.7}$$

Από τις ανισότητες (6.7) βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \big(\int_a^b f(x)\, dx + \tfrac{\epsilon}{2} \big) - \big(\int_a^b f(x)\, dx - \tfrac{\epsilon}{2} \big) = \epsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Από τις (6.3) και (6.4) έχουμε $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$, οπότε

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq 0$$

και, επειδή η διαφορά στο αριστερό μέλος είναι ≥ 0, έχουμε $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. $\square$

Το επόμενο παράδειγμα είναι βασικό. Ένα προσεκτικό σχέδιο θα βοηθήσει.

Παράδειγμα 6.2.3. Έστω $\xi \in [a,b]$ και η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [a,b], x \neq \xi \\ 1, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$

Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε συγκεκριμένη διαμέριση Δ του $[a,b]$, διακρίνοντας περιπτώσεις, ως εξής.
Πρώτη περίπτωση: $\xi = a$.
Θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$ ώστε $x_1 - a < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$. Τότε $u_1 = 1$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 0$, $l_2 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) = x_1 - x_0 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) = 0$.
Δεύτερη περίπτωση: $\xi = b$.
Θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$ ώστε $b - x_1 < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$. Τότε $u_1 = 0$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 1$, $l_2 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) = x_2 - x_1 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) = 0$.
Τρίτη περίπτωση: $a < \xi < b$.
Θεωρούμε $x_1 \in (a,\xi)$, $x_2 \in (\xi,b)$ ώστε $x_2 - x_1 < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3 = b\}$. Τότε $u_1 = 0$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 1$, $l_2 = 0$ και $u_3 = 0$, $l_3 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) + u_3(x_3 - x_2) = x_2 - x_1 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) + l_3(x_3 - x_2) = 0$.
Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = 0$ και $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$ και, επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Επιπλέον, για την ίδια Δ, ισχύει $0 = \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $0 \leq \int_a^b f(x)\,dx < \epsilon$ και, επομένως, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Αν εξαιρέσουμε τις μεθόδους του επόμενου κεφαλαίου, οι οποίες βασίζονται στη σχέση ανάμεσα στις έννοιες του ολοκληρώματος και της παραγώγου, η πρόταση 6.2 καθώς και η πρόταση 6.15 που θα δούμε λίγο πιο μετά παρέχουν τις βασικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Οι μέθοδοι αυτές προέρχονται κατευθείαν από τον ορισμό του ολοκληρώματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0$. Στην περίπτωση αυτή,*

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, για κάθε n υπάρχει διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ ώστε

$$0 \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) < \tfrac{1}{n}.$$

Άρα υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0. \tag{6.8}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) < \epsilon$ οπότε, σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, από την

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$$

και από την (6.8) έχουμε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$. □

Όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι πολύ βασικά. Θα τα ξαναδούμε στην ενότητα 6.5 με έναν λίγο διαφορετικό και κάπως πιο απλό τρόπο, πάλι βασισμένο σε υπολογισμό αθροισμάτων που έχουν σχέση με διαμερίσεις. Θα τα ξαναδούμε, όμως, και στο επόμενο κεφάλαιο χωρίς να χρησιμοποιήσουμε διαμερίσεις αλλά χρησιμοποιώντας τη σχέση ανάμεσα στις έννοιες του ολοκληρώματος και της παραγώγου.

Παράδειγμα 6.2.4. Έστω η συνάρτηση x στο διάστημα $[a, b]$.
Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, έστω

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } \ k = 0, \dots, n.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ για το άθροισμα των n αρχικών φυσικών. Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται με επαγωγή, για παράδειγμα.
Τώρα, επειδή η x είναι αύξουσα, σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $l_k = x_{k-1}$ και $u_k = x_k$. Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(x; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\big)\\ &= \tfrac{b-a}{n}\big(na + \tfrac{b-a}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k\big) = \frac{b-a}{n}\big(na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n-1)}{2}\big) \to \frac{b^2-a^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(x; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(a + k\frac{b-a}{n}\big)\\ &= \tfrac{b-a}{n}\big(na + \tfrac{b-a}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n} k\big) = \frac{b-a}{n}\big(na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\big) \to \frac{b^2-a^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Επομένως, $\overline{\Sigma}(x; a, b; \Delta_n) - \underline{\Sigma}(x; a, b; \Delta_n) \to 0$, οπότε η x είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\textstyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Παράδειγμα 6.2.5. Έστω $0 < a < b$ και η συνάρτηση x^p στο διάστημα $[a, b]$.
Για κάθε n θεωρούμε τον αριθμό $\mu_n = \sqrt[n]{b/a}$ και τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$, όπου

$$x_k = a{\mu_n}^k \qquad \text{για } \ k = 0, \dots, n.$$

Αν $p > 0$, η x^p είναι αύξουσα, οπότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $l_k = {x_{k-1}}^p$ και $u_k = {x_k}^p$. Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(x^p; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} {x_{k-1}}^p(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} {x_{k-1}}^{p+1}\big(\frac{x_k}{x_{k-1}} - 1\big)\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(a{\mu_n}^{k-1})^{p+1}(\mu_n - 1) = a^{p+1}(\mu_n - 1)\sum_{k=1}^{n}({\mu_n}^{p+1})^{k-1}\\ &= a^{p+1}(\mu_n - 1)\tfrac{({\mu_n}^{p+1})^n - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1} = a^{p+1}(\mu_n - 1)\tfrac{({\mu_n}^n)^{p+1} - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1}\\ &= a^{p+1}(\mu_n - 1)\tfrac{(b/a)^{p+1} - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1} = \tfrac{\mu_n - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1}(b^{p+1} - a^{p+1})\\ &\to \tfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1},\end{aligned}$$

διότι $\mu_n \to 1$ και $\lim_{x\to 1}\frac{x^{p+1}-1}{x-1} = \frac{dx^{p+1}}{dx}(1) = (p+1)\cdot 1^p = p+1$.
Με τον ίδιο τρόπο, και χρησιμοποιώντας για την τέταρτη ισότητα παρακάτω τον προηγούμενο υπολογισμό $\sum_{k=1}^{n} {x_{k-1}}^p(x_k - x_{k-1}) = \frac{\mu_n-1}{{\mu_n}^{p+1}-1}(b^{p+1} - a^{p+1})$, έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(x^p; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} {x_k}^p(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(\mu_n x_{k-1})^p(x_k - x_{k-1})\\ &= {\mu_n}^p\textstyle\sum_{k=1}^{n} {x_{k-1}}^p(x_k - x_{k-1})\\ &= {\mu_n}^p\tfrac{\mu_n-1}{{\mu_n}^{p+1}-1}(b^{p+1} - a^{p+1})\\ &\to \tfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}.\end{aligned}$$

Αν $p < 0$ και $p \neq -1$, τότε η x^p είναι φθίνουσα οπότε το μόνο που αλλάζει στους προηγούμενους υπολογισμούς είναι ότι το προηγούμενο $\underline{\Sigma}(x^p; a, b; \Delta_n)$ θα είναι τώρα το $\overline{\Sigma}(x^p; a, b; \Delta_n)$ και αντιστρόφως. Οπότε πάλι βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
Επομένως, $\overline{\Sigma}(x^p; a, b; \Delta_n) - \underline{\Sigma}(x^p; a, b; \Delta_n) \to 0$, οπότε η x^p είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\textstyle\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \qquad \text{αν } \ p \neq -1 \ \text{ και } \ 0 < a < b.$$

Αν $p > 0$, η x^p ορίζεται στο διάστημα $[0, b]$ (δηλαδή, διάστημα $[a, b]$ με $a = 0$) και χρησιμοποιούμε τον αριθμό $\mu_n = \sqrt[n]{n}$ και τη διαμέριση $\Delta_n = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} = b\}$, όπου

$$x_k = \tfrac{b}{n}{\mu_n}^{k-1} \qquad \text{για } \ k = 1, \ldots, n, n+1.$$

Υπολογισμοί όμοιοι με τους παραπάνω αποδεικνύουν ότι η x^p είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, b]$ και

$$\textstyle\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} \qquad \text{αν } \ p > 0 \ \text{ και } \ 0 < b.$$

Τέλος, στην περίπτωση $p = -1$, οι προηγούμενοι υπολογισμοί ορίων *δεν έχουν νόημα*.

Πρέπει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση $p \in \mathbb{Z}$, οπότε η x^p ορίζεται και για $x < 0$, ο τύπος $\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$ ισχύει και για $a < b < 0$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιους υπολογισμούς αλλά είναι προτιμώτερο να περιμένουμε μέχρι την ενότητα 7.2.

Παράδειγμα 6.2.6. Θα δούμε την περίπτωση $p = -1$ του προηγούμενου παραδείγματος. Έστω $0 < a < b$ και η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ στο διάστημα $[a, b]$.

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, για κάθε n θεωρούμε τον $\mu_n = \sqrt[n]{b/a}$ και τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, όπου

$$x_k = a{\mu_n}^k \qquad \text{για } \ k = 0, \ldots, n.$$

Η $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα, οπότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $l_k = \frac{1}{x_k}$ και $u_k = \frac{1}{x_{k-1}}$. Άρα

$$\underline{\Sigma}(\tfrac{1}{x}; a, b; \Delta_n) = \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}(x_k - x_{k-1}) = \frac{n(\mu_n-1)}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_n}\frac{\mu_n-1}{\log\mu_n}\log\frac{b}{a} \to \log\frac{b}{a},$$

διότι $\mu_n \to 1$ και $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \frac{d\log x}{dx}(1) = \frac{1}{1} = 1$.
Ομοίως,

$$\overline{\Sigma}(\tfrac{1}{x}; a, b; \Delta_n) = \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = n(\mu_n - 1) = \frac{\mu_n-1}{\log\mu_n}\log\frac{b}{a} \to \log\frac{b}{a}.$$

Πάλι, $\overline{\Sigma}(\frac{1}{x}; a, b; \Delta_n) - \underline{\Sigma}(\frac{1}{x}; a, b; \Delta_n) \to 0$, οπότε η $\frac{1}{x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\textstyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log\frac{b}{a} \qquad \text{αν } \ 0 < a < b.$$

Παράδειγμα 6.2.7. Έστω $\rho > 0$, $\rho \neq 1$ και η συνάρτηση ρ^x στο διάστημα $[a, b]$.

Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, έστω

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } \ k = 0, \ldots, n.$$

Αν $\rho > 1$, η ρ^x είναι αύξουσα, οπότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $l_k = \rho^{x_{k-1}}$ και $u_k = \rho^{x_k}$. Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \rho^{x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\rho^a \sum_{k=1}^n \rho^{(k-1)(b-a)/n} \\ &= \tfrac{b-a}{n}\rho^a\frac{\rho^{b-a}-1}{\rho^{(b-a)/n}-1} = (\rho^b - \rho^a)\frac{(b-a)/n}{\rho^{(b-a)/n}-1} \to \frac{\rho^b-\rho^a}{\log\rho},\end{aligned}$$

διότι $\frac{b-a}{n} \to 0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\rho^x-1}{x} = \frac{d\rho^x}{dx}(0) = \rho^0\log\rho = \log\rho$.
Ομοίως,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \rho^{x_k}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\rho^a \sum_{k=1}^n \rho^{k(b-a)/n} \\ &= \tfrac{b-a}{n}\rho^a\rho^{(b-a)/n}\frac{\rho^{b-a}-1}{\rho^{(b-a)n}-1} = (\rho^b - \rho^a)\rho^{(b-a)/n}\frac{(b-a)/n}{\rho^{(b-a)/n}-1} \to \frac{\rho^b-\rho^a}{\log\rho}.\end{aligned}$$

Αν $0 < \rho < 1$, η ρ^x είναι φθίνουσα και το μόνο που αλλάζει στα προηγούμενα είναι ότι το προηγούμενο $\underline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n)$ θα είναι τώρα το $\overline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n)$ και αντιστρόφως. Πάλι βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
Επομένως, $\overline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n) - \underline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n) \to 0$, οπότε η ρ^x είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\textstyle\int_a^b \rho^x\,dx = \frac{\rho^b-\rho^a}{\log\rho} \qquad \text{αν } \ \rho > 0, \ \ \rho \neq 1 \ \text{ και } \ 0 < a < b.$$

Εμβαδό και ολοκλήρωμα Riemann.

Δεν θα μας απασχολήσει ο αυστηρός ορισμός της έννοιας του **εμβαδού** $E(A)$ υποσυνόλων A του καρτεσιανού επιπέδου. Θα δεχτούμε, όμως, ότι, όπως κι αν ορίζεται η έννοια του εμβαδού, πρέπει να έχει κάποιες βασικές αναμενόμενες ιδιότητες. Μερικές από αυτές είναι:

(i) $E(A)\geq 0$ *για κάθε σύνολο* A *το οποίο έχει εμβαδό.*

(ii) *το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο των μηκών των δυο μη-παράλληλων πλευρών του.*

(iii) *αν δυο σύνολα* A_1 *και* A_2 *έχουν εμβαδά* $E(A_1)$ *και* $E(A_2)$ *και αν η τομή τους είναι κενή ή είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους ευθυγράμμων τμημάτων, τότε η ένωσή τους* $A_1\cup A_2$ *έχει εμβαδό το οποίο δίνεται από τον τύπο* $E(A_1\cup A_2)=E(A_1)+E(A_2)$.

(iv) *αν τα σύνολα* A_1, A_2 *έχουν εμβαδά* $E(A_1)$ *και* $E(A_2)$ *και αν* $A_1\subseteq A_2$, *τότε* $E(A_1)\leq E(A_2)$.

Έστω συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με την επιπλέον υπόθεση ότι ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα $\Gamma=\{(x,f(x))\,|\,x\in[a,b]\}$ της συνάρτησης, ως υποσύνολο του καρτεσιανού επιπέδου, περιέχεται στο ημιεπίπεδο πάνω από τον x-άξονα. Ορίζεται, επίσης, και το σύνολο $A=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],y\in[0,f(x)]\}$, δηλαδή το υποσύνολο του καρτεσιανού επιπέδου το οποίο περικλείεται από το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a,0)$, $(b,0)$ (δηλαδή το διάστημα $[a,b]$ του x-άξονα), από το κατακόρυφο ευθ. τμήμα με άκρα $(a,0)$, $(a,f(a))$, από το κατακόρυφο ευθ. τμήμα με άκρα $(b,0)$, $(b,f(b))$ και από το γράφημα Γ της συνάρτησης.

Τώρα, υποθέτουμε, επιπλέον, ότι *η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και ότι το σύνολο* A *έχει εμβαδό* $E(A)$ και θα αποδείξουμε ότι

$$E(A)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta=\{x_0,x_1,\,\dots\,,x_{n-1},x_n\}$ του $[a,b]$ ώστε να είναι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\epsilon.$$

Θυμόμαστε ότι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1})$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1})$, όπου u_k και l_k είναι το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1},x_k]$.
Τώρα, για κάθε $k=1,\dots,n$ θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο B_k που έχει οριζόντια βάση το διάστημα $[x_{k-1},x_k]$ στον x-άξονα και κατακόρυφο ύψους l_k. Βάσει της ιδιότητας (ii), το B_k έχει εμβαδό

$$E(B_k)=l_k(x_k-x_{k-1}).$$

Επίσης, για κάθε $k=1,\dots,n$ θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο C_k που έχει οριζόντια βάση το ίδιο διάστημα $[x_{k-1},x_k]$ στον x-άξονα και κατακόρυφο ύψους u_k. Το C_k έχει εμβαδό

$$E(C_k)=u_k(x_k-x_{k-1}).$$

Κατόπιν, θεωρούμε τις ενώσεις $B=B_1\cup\cdots\cup B_n$ και $C=C_1\cup\cdots\cup C_n$, οι οποίες, βάσει της ιδιότητας (iii), έχουν εμβαδά

$$E(B)=\sum_{k=1}^n E(B_k)=\sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1})=\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta),$$

$$E(C)=\sum_{k=1}^n E(C_k)=\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1})=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Επειδή, για κάθε $k=1,\,\dots\,,n$, ισχύει $l_k\leq f(x)\leq u_k$ για κάθε $x\in[x_{k-1},x_k]$, συνεπάγεται ότι το σύνολο A περιέχει το σύνολο B και περιέχεται στο σύνολο C. Δηλαδή, $B\subseteq A\subseteq C$. Επομένως, βάσει της ιδιότητας (iv),

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=E(B)\leq E(A)\leq E(C)=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Από αυτές τις τελευταίες σχέσεις και από τις

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$$

προκύπτει ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - E(A)\big| \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Δηλαδή, είναι $|\int_a^b f(x)\,dx - E(A)| < \epsilon$ και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $|\int_a^b f(x)\,dx - E(A)| = 0$, οπότε $E(A) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ασκήσεις.

6.2.1. Πώς από τις ιδιότητες (i), (ii) και (iv) του εμβαδού προκύπτει ότι το εμβαδό ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι 0;

6.2.2. Αν $0 \le a < b$, αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x^2 και x^3 είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$ και $\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}$, χρησιμοποιώντας διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα. Θα χρειαστείτε τις ισότητες $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ και $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, που αποδεικνύονται με επαγωγή. Μιμηθείτε τους υπολογισμούς του παραδείγματος 6.2.4.

6.2.3. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ και αποδείξτε ότι $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$ και $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

6.2.4. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και δυο ακολουθίες $(\Delta_n{}')$ και $(\Delta_n{}'')$ διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n{}') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n{}'') \to 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n{}') \to \int_a^b f(x)\,dx$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n{}'') \to \int_a^b f(x)\,dx$.

6.2.5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε και αν ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε άρρητο $x \in [a,b]$.

6.2.6. Έστω $f,g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \le g(x) \le h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν οι f και h είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$, αποδείξτε ότι και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$.

6.2.7. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$ για κάθε c με $a < c < b$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx$. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε c με $a < c < b$.

Έστω $p > 0$. Θεωρήστε γνωστό το πρώτο αποτέλεσμα του παραδείγματος 6.2.5, δηλαδή ότι $\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$ για $0 < a < b$. Αποδείξτε, βάσει του προηγουμένου, ότι $\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$.

6.2.8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει υποδιάστημα (όχι μονοσύνολο) $[c,d]$ του $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [c,d]$.

Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα, γενικότερα, αν η f είναι φραγμένη και $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx > 0$.

6.3 Τα βασικά παραδείγματα.

Τα δυο θεωρήματα αυτής της ενότητας λένε ότι *οι συνεχείς συναρτήσεις και οι μονότονες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.2, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{b-a} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in [a,b] \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{6.9}$$

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε όλα τα Δ-διαστήματα να έχουν μήκος $< \delta$, δηλαδή, ώστε

$$x_k - x_{k-1} < \delta \qquad \text{για κάθε } \ k = 1, \ldots, n.$$

Τώρα θυμόμαστε το παράδειγμα 6.1.5. Η f είναι συνεχής στο $[x_{k-1}, x_k]$ και υπάρχουν $\zeta_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε $f(\zeta_k) \leq f(x) \leq f(\eta_k)$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Άρα $l_k = f(\zeta_k)$ και $u_k = f(\eta_k)$. Επίσης, επειδή $|\eta_k - \zeta_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta$, από την (6.9) συνεπάγεται

$$u_k - l_k = f(\eta_k) - f(\zeta_k) < \tfrac{\epsilon}{b-a}$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. $\square$

Παράδειγμα 6.3.1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα το οποίο δεν περιέχει καμιά ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$.

Παράδειγμα 6.3.2. Αν $p > 0$, η x^p είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b] \subseteq [0, +\infty)$ και, αν $p < 0$, η x^p είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.

Παράδειγμα 6.3.3. Η e^x είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b]$.

Παράδειγμα 6.3.4. Η $\log x$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$. Έστω $\epsilon > 0$ και $\delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a) + 1}$.
Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε όλα τα Δ-διαστήματα να έχουν μήκος $< \delta$, δηλαδή ώστε

$$x_k - x_{k-1} < \delta \qquad \text{για κάθε } \ k = 1, \ldots, n.$$

Επειδή η f είναι αύξουσα, είναι $l_k = f(x_{k-1})$ και $u_k = f(x_k)$ (παράδειγμα 6.1.4). Άρα

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)\delta \\ &= \delta \textstyle\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(f(b) - f(a)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Η απόδειξη στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα είναι παρόμοια. $\square$

Παράδειγμα 6.3.5. Η συνάρτηση $[x]$ είναι αύξουσα, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Ασκήσεις.

6.3.1. Σε ποιά διαστήματα είναι ολοκληρώσιμες οι $x^3 - x$, $1/(x^3 - x)$, $\sqrt{x^3 - x}$, $\log(x^3 - x)$, $\sin x$, $\tan x$;

6.3.2. [α] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[f(a), f(b)]$ και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[f(a), f(b)]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = bf(b) - af(a).$$

Αν $0 \le a < b$ και $0 \le f(a) < f(b)$, περιγράψτε το γεωμετρικό νόημα αυτής της ισότητας.

[β] Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$ και έστω ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι $ab \le \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ για κάθε $a, b > 0$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f(a) = b$.

Εφαρμόστε το αποτέλεσμα αυτό στη συνάρτηση x^{p-1} με $p > 1$ για να αποδείξετε την ανισότητα του Young στην άσκηση 5.4.21 (και στην άσκηση 5.5.38).

6.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.3. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Οι f, g είναι φραγμένες, οπότε υπάρχουν M' και M'' ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M'$ και $|g(x)| \le M''$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα ισχύει $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le M' + M''$ για κάθε $x \in [a, b]$ και, επομένως, η $f + g$ είναι φραγμένη. Αυτή είναι η πρώτη προϋπόθεση για να είναι η $f + g$ ολοκληρώσιμη.

Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') < \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.10}$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, οπότε από τις (6.10) και από το λήμμα 6.3 συνεπάγεται

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.11}$$

Έστω ${u_k}'$ και ${l_k}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και ${u_k}''$ και ${l_k}''$ οι αντίστοιχες ποσότητες γαι την g και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $f + g$.

Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει ${l_k}' \le f(x) \le {u_k}'$ και ${l_k}'' \le g(x) \le {u_k}''$ και, επομένως, ${l_k}' + {l_k}'' \le f(x) + g(x) \le {u_k}' + {u_k}''$. Άρα

$${l_k}' + {l_k}'' \le l_k \le u_k \le {u_k}' + {u_k}'',$$

οπότε

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\le \textstyle\sum_{k=1}^n {u_k}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n {u_k}''(x_k - x_{k-1}) \\ &= \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \end{aligned} \tag{6.12}$$

και, ομοίως,

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\ge \textstyle\sum_{k=1}^n {l_k}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n {l_k}''(x_k - x_{k-1}) \\ &= \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Αφαιρώντας τις (6.12) και (6.13) και χρησιμοποιώντας και τις ανισότητες στην (6.11), βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta)<\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta)<\epsilon$, οπότε η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)&\leq \textstyle\int_a^b f(x)\,dx\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\\ \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)&\leq \textstyle\int_a^b g(x)\,dx\leq\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)\end{aligned}\tag{6.14}$$

$$\underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta)\leq \textstyle\int_a^b(f(x)+g(x))\,dx\leq\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta).\tag{6.15}$$

Από τις (6.12), (6.13), (6.15) συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)\leq \textstyle\int_a^b(f(x)+g(x))\,dx\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta).$$

Αφαιρώντας από την τελευταία σχέση τις (6.14) και λαμβάνοντας υπ' όψη και τις (6.11), προκύπτει ότι

$$\big|\textstyle\int_a^b(f(x)+g(x))\,dx-\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx\big|<\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon>0$, είναι $\int_a^b(f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.4. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η $\lambda f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\textstyle\int_a^b\lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Άρα ισχύει $|\lambda f(x)|\leq|\lambda|M$ για κάθε $x\in[a,b]$, οπότε η λf είναι φραγμένη.
Αν $\lambda=0$, η $0f$ είναι η σταθερή συνάρτηση 0, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει

$$\textstyle\int_a^b 0f(x)\,dx=\int_a^b 0\,dx=0=0\int_a^b f(x)\,dx.$$

Έστω $\lambda\neq0$. Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\dots,x_n=b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\tfrac{\epsilon}{|\lambda|}.\tag{6.16}$$

Έστω ${u_k}'$ και ${l_k}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1},x_k]$ και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την λf.
Έστω $\lambda>0$. Για κάθε $x\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $f(x)\leq{u_k}'$, οπότε $\lambda f(x)\leq\lambda{u_k}'$ και, επομένως, $u_k\leq\lambda{u_k}'$. Επίσης, για κάθε $x\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $\lambda f(x)\leq u_k$, οπότε $f(x)\leq\frac{1}{\lambda}u_k$ και, επομένως, ${u_k}'\leq\frac{1}{\lambda}u_k$. Συμπεραίνουμε ότι $u_k=\lambda{u_k}'$ και, με ακριβώς ίδιο τρόπο, ότι $l_k=\lambda{l_k}'$. Τώρα,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)&=\textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1})=\lambda\sum_{k=1}^n{u_k}'(x_k-x_{k-1})=\lambda\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\\ \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)&=\textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1})=\lambda\sum_{k=1}^n{l_k}'(x_k-x_{k-1})=\lambda\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).\end{aligned}\tag{6.17}$$

Αφαιρώντας τις (6.17) και χρησιμοποιώντας και την (6.16), βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)=\lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big)<\lambda\tfrac{\epsilon}{\lambda}=\epsilon.\tag{6.18}$$

Έστω $\lambda<0$. Για κάθε $x\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $f(x)\leq{u_k}'$, οπότε $\lambda{u_k}'\leq\lambda f(x)$ και, επομένως, $\lambda{u_k}'\leq l_k$. Επίσης, για κάθε $x\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $l_k\leq\lambda f(x)$, οπότε $f(x)\leq\frac{1}{\lambda}l_k$ και, επομένως, ${u_k}'\leq\frac{1}{\lambda}l_k$. Συμπεραίνουμε ότι $l_k=\lambda{u_k}'$ και, παρομοίως, $u_k=\lambda{l_k}'$. Τώρα,

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)=\textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1})=\lambda\sum_{k=1}^n{l_k}'(x_k-x_{k-1})=\lambda\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta),$$

$$\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)=\sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1})=\lambda\sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k-x_{k-1})=\lambda\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Αφαιρώντας και χρησιμοποιώντας την (6.16) (με $|\lambda|=-\lambda$), έχουμε

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)=-\lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big)<-\lambda\tfrac{\epsilon}{-\lambda}=\epsilon. \quad (6.19)$$

Σε κάθε περίπτωση, από τις (6.18) και (6.19) συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)<\epsilon,$$

οπότε η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \quad (6.20)$$

$$\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)\leq\int_a^b \lambda f(x)\,dx\leq\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta). \quad (6.21)$$

Αν $\lambda>0$, πολλαπλασιάζοντας την (6.20) με τον λ και αφαιρώντας την (6.21) και χρησιμοποιώντας και τις (6.17) και (6.16), βρίσκουμε

$$\big|\int_a^b \lambda f(x)\,dx-\lambda\int_a^b f(x)\,dx\big|\leq\lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big)<\epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon>0$, συνεπάγεται $\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$.
Η απόδειξη της $\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$ είναι παρόμοια και στην περίπτωση $\lambda<0$. □

Οι ισότητες που αποδείχθηκαν στις προτάσεις 6.3 και 6.4 συνδυάζονται στην

$$\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx+\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Αυτή η ισότητα εύκολα γενικεύεται με επαγωγή για περισσότερους από δυο όρους:

$$\int_a^b\sum_{k=1}^n\lambda_k f_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\lambda_k\int_a^b f_k(x)\,dx,$$

αν όλες οι $f_1,\,\dots,f_n$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.

Το επόμενο παράδειγμα είναι άμεση γενίκευση του παραδείγματος 6.2.3 και είναι κι αυτό σημαντικό και, μάλιστα, θα χρησιμοποιηθεί αμέσως στην απόδειξη της πρότασης 6.5.

Παράδειγμα 6.4.1. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx=0$.
Συγκεκριμένα, έστω $\xi_1,\,\dots,\xi_m\in[a,b]$ και έστω ότι η f μηδενίζεται σε κάθε $x\in[a,b]\setminus\{\xi_1,\dots,\xi_m\}$ και $f(\xi_j)=c_j\neq0$ για κάθε $j=1,\,\dots,m$. Δηλαδή ο τύπος της f είναι

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in[a,b] \text{ και } x\neq\xi_j \text{ για κάθε } j=1,\dots,m\\ c_j, & \text{αν } x=\xi_j \text{ για κάποιον } j=1,\dots,m\end{cases}$$

Για κάθε $j=1,\,\dots,m$ θεωρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση $f_j(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in[a,b], x\neq\xi_j\\ 1, & \text{αν } x=\xi_j\end{cases}$

Αν $x\in[a,b]$ και $x\neq\xi_j$ για κάθε $j=1,\,\dots,m$, τότε $f(x)=0$ και $f_j(x)=0$ για κάθε $j=1,\,\dots,m$. Άρα

$$\sum_{j=1}^m c_jf_j(x)=\sum_{j=1}^m c_j0=0=f(x).$$

Αν $x\in\{\xi_1,\dots,\xi_m\}$, τότε $x=\xi_{j_0}$ για κάποιον $j_0=1,\,\dots,m$, οπότε $f(x)=c_{j_0}$ και $f_{j_0}(x)=1$ και $f_j(x)=0$ για κάθε $j=1,\,\dots,m$ με $j\neq j_0$. Άρα

$$\sum_{j=1}^m c_jf_j(x)=c_{j_0}=f(x).$$

Άρα ισχύει $\sum_{j=1}^m c_jf_j(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ ή, ισοδύναμα, $f=\sum_{j=1}^m c_jf_j$.
Επειδή κάθε f_j είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f_j(x)\,dx=0$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{j=1}^m c_j\int_a^b f_j(x)\,dx=\sum_{j=1}^m c_j0=0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.5. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ των οποίων οι τιμές είναι ίσες σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h = g - f : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Σύμφωνα με το παράδειγμα 6.4.1, η h είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx = 0$. Επειδή $g = f + h$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, η g είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Η πρόταση 6.5 διατυπώνεται και ως εξής: *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα και δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση αλλάζοντας τις τιμές της αρχικής σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του διαστήματος, τότε η νέα συνάρτηση είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και το ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.6. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Τότε και η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Οι f, g είναι φραγμένες, οπότε υπάρχουν M', M'' ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M'$ και $|g(x)| \leq M''$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα ισχύει $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M'M''$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε η fg είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1}, \qquad \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta'') < \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, οπότε είναι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1}, \quad \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1}. \quad (6.22)$$

Έστω ${u_k}'$ και ${l_k}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και ${u_k}''$ και ${l_k}''$ οι αντίστοιχες ποσότητες γαι την g και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την fg.
Για κάθε $s, t \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει ${l_k}' - {u_k}' \leq f(s) - f(t) \leq {u_k}' - {l_k}'$ και, επομένως, $|f(s) - f(t)| \leq {u_k}' - {l_k}'$. Ομοίως, για κάθε $s, t \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $|g(s) - g(t)| \leq {u_k}'' - {l_k}''$. Άρα για κάθε $s, t \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει

$$|f(s)g(s) - f(t)g(t)| \leq |f(s) - f(t)||g(s)| + |f(t)||g(s) - g(t)| \leq M''({u_k}' - {l_k}') + M'({u_k}'' - {l_k}'').$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση 3 πριν από το λήμμα 6.2, είναι

$$u_k - l_k \leq M''({u_k}' - {l_k}') + M'({u_k}'' - {l_k}'').$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας και τις (6.22), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(fg;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(fg;a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq M'' \textstyle\sum_{k=1}^n ({u_k}' - {l_k}')(x_k - x_{k-1}) \\
&\quad + M' \textstyle\sum_{k=1}^n ({u_k}'' - {l_k}'')(x_k - x_{k-1}) \\
&= M''\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) \\
&\quad + M'\big(\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)\big) \\
&\leq M'' \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1} + M' \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(fg;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(fg;a,b;\Delta) < \epsilon$, οπότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. □

Τονίζουμε ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση του αθροίσματος συναρτήσεων, *δεν υπάρχει τύπος ο οποίος να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου συναρτήσεων με τα ολοκληρώματα των δυο συναρτήσεων ξεχωριστά*. Για παράδειγμα, ο τύπος $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$ **δεν ισχύει γενικά**.

Παράδειγμα 6.4.2. Είναι $\int_a^b 1\cdot 1\,dx = \int_a^b 1\,dx = b-a$ και $\int_a^b 1\,dx \int_a^b 1\,dx = (b-a)(b-a) = (b-a)^2$. Η ισότητα $b-a=(b-a)^2$ δεν ισχύει γενικά!

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.7. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν υπάρχει $m>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)|\geq m$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε η $1/f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Ισχύει $\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{m}$ για κάθε $x\in[a,b]$, οπότε η $1/f$ είναι φραγμένη.
Έστω $\epsilon>0$. Υπάρχει διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\,\dots\,,x_n=b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<m^2\epsilon. \tag{6.23}$$

Έστω $u_k{}'$ και $l_k{}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1},x_k]$ καθώς και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $1/f$.
Για κάθε $s,t\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $l_k{}'-u_k{}' \leq f(s)-f(t) \leq u_k{}'-l_k{}'$, οπότε $|f(s)-f(t)| \leq u_k{}'-l_k{}'$.
Τότε για κάθε $s,t\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $\left|\frac{1}{f(s)}-\frac{1}{f(t)}\right| = \frac{|f(s)-f(t)|}{|f(s)||f(t)|} \leq \frac{u_k{}'-l_k{}'}{m^2}$ και, επομένως,

$$u_k-l_k \leq \tfrac{u_k{}'-l_k{}'}{m^2}.$$

Χρησιμοποιώντας και την (6.23), συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}\big(1/f;a,b;\Delta\big)-\underline{\Sigma}\big(1/f;a,b;\Delta\big) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k-l_k)(x_k-x_{k-1})\\ &\leq \tfrac{1}{m^2}\textstyle\sum_{k=1}^n (u_k{}'-l_k{}')(x_k-x_{k-1})\\ &= \tfrac{1}{m^2}\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big)<\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}\big(1/f;a,b;\Delta\big)-\underline{\Sigma}\big(1/f;a,b;\Delta\big)<\epsilon$, οπότε η $1/f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. □

Όπως και για το γινόμενο συναρτήσεων, δεν υπάρχει γενικός τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μιας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Για παράδειγμα, ο τύπος $\int_a^b (1/f(x))\,dx = 1/\big(\int_a^b f(x)\,dx\big)$ **δεν ισχύει γενικά**.

Παράδειγμα 6.4.3. Είναι $\int_a^b \frac{1}{1}\,dx = \int_a^b 1\,dx = b-a$ και $\frac{1}{\int_a^b 1\,dx} = \frac{1}{b-a}$. Η ισότητα $b-a=\frac{1}{b-a}$ δεν ισχύει γενικά!

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.8. *Έστω $a<c<b$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$, οπότε υπάρχουν M' και M'' ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M'$ για κάθε $x\in[a,c]$ και $|f(x)|\leq M''$ για κάθε $x\in[c,b]$. Ορίζουμε $M=\max\{M',M''\}$, οπότε ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$ και, επομένως, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις $\Delta'=\{a=x_0{}',\,\dots\,,x_n{}'=c\}$ του $[a,c]$ και $\Delta''=\{c=x_0{}'',\,\dots\,,x_m{}''=b\}$ του $[c,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')-\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')<\tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')-\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')<\tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.24}$$

Ορίζουμε τη διαμέριση $\Delta = \{a = x_0{}', \ldots, x_{n-1}{}', x_n{}' = c = x_0{}'', \ldots, x_m{}'' = b\}$ του $[a, b]$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \overline{\Sigma}(f; a, c; \Delta') + \overline{\Sigma}(f; c, b; \Delta'') \\ \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \underline{\Sigma}(f; a, c; \Delta') + \underline{\Sigma}(f; c, b; \Delta''). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Αφαιρώντας τις (6.25) και χρησιμοποιώντας και τις (6.24), βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{6.26}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(f; a, c; \Delta') &\leq \textstyle\int_a^c f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, c; \Delta') \\ \underline{\Sigma}(f; c, b; \Delta'') &\leq \textstyle\int_c^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f; c, b; \Delta'') \end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \textstyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta). \tag{6.28}$$

Αθροίζοντας τις (6.27) και χρησιμοποιώντας τις (6.25), έχουμε

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \textstyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta).$$

Από αυτήν την τελευταία σχέση και από την (6.28) συνεπάγεται

$$\big|\textstyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx\big| \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Επομένως, είναι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx\big| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.9. *Έστω $a \leq c < d \leq b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, είναι φραγμένη και στο $[c, d]$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ' του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') < \epsilon$. Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta'' = \Delta' \cup \{c, d\}$, η οποία είναι λεπτότερη από την Δ' και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') < \epsilon. \tag{6.29}$$

Αν από τα Δ''-σημεία κρατήσουμε μόνο εκείνα τα οποία ανήκουν στο διάστημα $[c, d]$ (τα σημεία c, d είναι δυο τέτοια), τότε δημιουργείται διαμέριση Δ του $[c, d]$. Τώρα τα αθροίσματα Darboux $\overline{\Sigma}(f; c, d; \Delta)$ και $\underline{\Sigma}(f; c, d; \Delta)$ προκύπτουν από τα αντίστοιχα $\overline{\Sigma}(f; c, d; \Delta'')$ και $\underline{\Sigma}(f; c, d; \Delta'')$ αν από τα δυο τελευταία αφαιρέσουμε τους όρους που προέρχονται από τα Δ''-διαστήματα που δεν είναι Δ-διαστήματα. Επομένως, η διαφορά $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ προκύπτει από την $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$ αν από αυτήν αφαιρέσουμε τους όρους που προέρχονται από τα Δ''-διαστήματα που δεν είναι Δ-διαστήματα. Σύμφωνα με την παρατήρηση 2 πριν από το λήμμα 6.2 και από την (6.29), συνεπάγεται

$$\overline{\Sigma}(f; c, d; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; c, d; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') < \epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[c, d]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; c, d; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; c, d; \Delta) < \epsilon$ και, επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* **τμηματικά σταθερή** *στο $[a, b]$ αν υπάρχουν $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και υπάρχουν $c_1, \ldots, c_m$ ώστε $f(x) = c_k$ για κάθε $x \in (\xi_{k-1}, \xi_k)$ και κάθε $k = 1, \ldots, m$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \ldots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$. Η f είναι ορισμένη στα σημεία $\xi_0, \ldots, \xi_m$ αλλά οι τιμές της στα σημεία αυτά δεν έχουν καμιά σημασία.*

Παράδειγμα 6.4.4. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά σταθερή στο $[a, b]$, όπως στον ορισμό που μόλις είδαμε.
Στο διάστημα $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ η f διαφέρει από τη σταθερή συνάρτηση c_k σε δυο *το πολύ* σημεία: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Η σταθερή συνάρτηση c_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και $\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} c_k\, dx = c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$. Άρα και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και $\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x)\, dx = c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$.
Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^m \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^m c_k(\xi_k - \xi_{k-1}).$$

Θα γνωρίσουμε, τώρα, δυο σχετικά μεγάλες κατηγορίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, οι οποίες περιέχουν τις συναρτήσεις που συναντάμε συνήθως στην πράξη. Και οι δυο κατηγορίες περιέχουν τις τμηματικά σταθερές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* **τμηματικά συνεχής** *στο $[a, b]$ αν υπάρχουν $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$, η f να είναι συνεχής σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \ldots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$ και να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi_k+} f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $k = 0, \ldots, m-1$ καθώς και το όριο $\lim_{x\to\xi_k-} f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, m$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.10. *Κάθε $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$, όπως στον ορισμό.
Για κάθε $k = 1, \ldots, m$ θεωρούμε την $g_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } \xi_{k-1} < x < \xi_k \\ \lim_{x\to\xi_k-} f(x), & \text{αν } x = \xi_k \\ \lim_{x\to\xi_{k-1}+} f(x), & \text{αν } x = \xi_{k-1} \end{cases}$
Η g_k είναι συνεχής στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και η f διαφέρει από αυτήν σε δυο *το πολύ* σημεία του $[\xi_{k-1}, \xi_k]$: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Επειδή η g_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* **τμηματικά μονότονη** *στο $[a, b]$ αν υπάρχουν $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και η f να είναι μονότονη σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \ldots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.11. *Κάθε $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ τμηματικά μονότονη και φραγμένη στο $[a, b]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά μονότονη στο $[a, b]$, όπως στον ορισμό.
Επειδή η f είναι φραγμένη, τα όρια $\lim_{x\to\xi_k-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi_{k-1}+} f(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.
Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεις g_k ακριβώς όπως στην απόδειξη της πρότασης 6.10. Κάθε g_k είναι μονότονη στο αντίστοιχο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Η f διαφέρει από την g_k σε δυο *το πολύ* σημεία του $[\xi_{k-1}, \xi_k]$: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. □

Σχεδόν όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε συγκεκριμένες εφαρμογές είναι είτε τμηματικά συνεχείς είτε τμηματικά μονότονες και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα στο οποίο είναι φραγμένες.

ΛΗΜΜΑ 6.5. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.*
[α] *Τότε $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.*
[β] *Αν $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, τότε η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή 0 στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. [α] Ο 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου τιμών $\{f(x)\,|\,a\leq x\leq b\}$. Αν θέσουμε $l=\inf\{f(x)\,|\,a\leq x\leq b\}$, τότε $l\geq 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 6.1, είναι

$$\int_a^b f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\geq l(b-a)\geq 0.$$

[β] Έστω $\int_a^b f(x)\,dx=0$ και σημείο συνέχειας $\xi\in[a,b]$ της f και έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $f(\xi)>0$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε ϵ ώστε $0<\epsilon<f(\xi)$. Τότε ισχύει $f(x)\geq\epsilon$ κοντά στον ξ, δηλαδή υπάρχει διάστημα $[c,d]\subseteq[a,b]$ με $d-c>0$ και $\xi\in[c,d]$ και ώστε να ισχύει $f(x)\geq\epsilon$ για κάθε $x\in[c,d]$. Δηλαδή, ισχύει $f(x)-\epsilon\geq 0$ για κάθε $x\in[c,d]$, οπότε είναι $\int_c^d(f(x)-\epsilon)\,dx\geq 0$. Άρα $\int_c^d f(x)\,dx-\int_c^d\epsilon\,dx\geq 0$ και, επομένως,

$$\int_c^d f(x)\,dx\geq\epsilon(d-c)>0.$$

Τώρα διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις.
Έστω $a<c<d<b$. Από το ότι ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,c]$, συνεπάγεται $\int_a^c f(x)\,dx\geq 0$. Ομοίως, $\int_d^b f(x)\,dx\geq 0$. Άρα

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx\geq 0+\int_c^d f(x)\,dx+0>0.$$

Έστω $a<c<d=b$. Όπως πριν, είναι $\int_a^c f(x)\,dx\geq 0$ και, επομένως,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx\geq 0+\int_c^d f(x)\,dx>0.$$

Έστω $a=c<d<b$. Όπως πριν, είναι $\int_d^b f(x)\,dx\geq 0$ και, επομένως,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx\geq\int_c^d f(x)\,dx+0>0.$$

Τέλος, αν $c=a$ και $d=b$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f(x)\,dx>0$.
Σε κάθε περίπτωση, είναι $\int_a^b f(x)\,dx>0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

Οι επόμενες τρεις προτάσεις περιέχουν τα βασικά εργαλεία εκτίμησης ολοκληρωμάτων: τα χρησιμοποιούμε στις περιπτώσεις που δεν βολεύει ή δεν είναι εφικτός ο ακριβής υπολογισμός των ολοκληρωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.12. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*
[α] *Αν ισχύει $f(x)\leq u$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx\leq u(b-a)$.*
Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\,dx=u(b-a)$, τότε ισχύει $f(x)=u$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.
[β] *Αν ισχύει $f(x)\geq l$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx\geq l(b-a)$.*
Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\,dx=l(b-a)$, τότε ισχύει $f(x)=l$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.
[γ] *Αν ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq M(b-a)$.*
Αν, επιπλέον, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=M(b-a)$, τότε είτε ισχύει $f(x)=M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ισχύει $f(x)=-M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

Απόδειξη. [α] Εφαρμόζουμε το λήμμα 6.5 στη συνάρτηση $u-f(x)$.
[β] Ομοίως, με τη συνάρτηση $f(x)-l$.
[γ] Από τα [α], [β] και επειδή ισχύει $-M\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$, συνεπάγεται

$$-M(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a),$$

οπότε $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq M(b-a)$.
Αν $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=M(b-a)$, τότε είτε $\int_a^b f(x)\,dx=M(b-a)$ είτε $\int_a^b f(x)\,dx=-M(b-a)$. Συνεπάγεται, αντιστοίχως, είτε ότι ισχύει $f(x)=M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ότι ισχύει $f(x)=-M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. □

Παράδειγμα 6.4.5. Η μέγιστη τιμή της $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$ είναι η $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Επομένως, $\int_1^4\frac{x}{x^2+2}\,dx\le\frac{\sqrt{2}}{4}(4-1)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.13. *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.*
[α] *Τότε $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$.*
[β] *Αν $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$, τότε ισχύει $f(x)=g(x)$ σε κάθε κοινό σημείο συνέχειας x των f,g. Ειδικώτερα, αν οι f, g είναι συνεχείς στο $[a,b]$, τότε οι f, g ταυτίζονται στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το λήμμα 6.5 στη συνάρτηση $g-f$. □

Παράδειγμα 6.4.6. Έστω η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\log(1+x)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, είναι και ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
Είναι εύκολο, με τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου, να αποδειχθεί ότι ισχύει $x\log 2\le\log(1+x)\le x$ για κάθε $x\in[0,1]$. Άρα $\int_0^1 x\log 2\,dx\le\int_0^1\log(1+x)\,dx\le\int_0^1 x dx$. Άρα $\frac{\log 2}{2}\le\int_0^1\log(1+x)\,dx\le\frac{1}{2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.14. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big|\le\int_a^b|f(x)|\,dx.$$

Αν $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big|=\int_a^b|f(x)|\,dx$, τότε είτε ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ισχύει $f(x)\le 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι και η $|f|$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\epsilon. \tag{6.30}$$

Έστω $u_k{}'$ και $l_k{}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1},x_k]$ καθώς και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $|f|$. Για κάθε $s,t\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $l_k{}'-u_k{}'\le f(s)-f(t)\le u_k{}'-l_k{}'$, οπότε $|f(s)-f(t)|\le u_k{}'-l_k{}'$. Άρα για κάθε $s,t\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $||f(s)|-|f(t)||\le|f(s)-f(t)|\le u_k{}'-l_k{}'$. Σύμφωνα με την παρατήρηση 3 πριν από το λήμμα 6.2, συνεπάγεται

$$u_k-l_k\le u_k{}'-l_k{}'.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την (6.30), έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta)&=\textstyle\sum_{k=1}^n(u_k-l_k)(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^n(u_k{}'-l_k{}')(x_k-x_{k-1})\\&=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta)<\epsilon$. Άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, ισχύει $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$ για κάθε $x\in[a,b]$, οπότε

$$-\int_a^b|f(x)|\,dx=\int_a^b(-|f(x)|)\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b|f(x)|\,dx.$$

Άρα $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$.
Αν $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big|=\int_a^b|f(x)|\,dx$, τότε είναι είτε $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b|f(x)|\,dx$ είτε $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_a^b|f(x)|\,dx$. Συνεπάγεται, αντιστοίχως, είτε ότι ισχύει $f(x)=|f(x)|$ ή, ισοδύναμα, $f(x)\ge 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ότι ισχύει $f(x)=-|f(x)|$ ή, ισοδύναμα, $f(x)\le 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. □

Παράδειγμα 6.4.7. Έστω $x > 0$.
Επειδή ισχύει $0 \leq \frac{t}{1+t} \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$, είναι $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt \leq \int_0^x 1\,dt = x$.
Επίσης, επειδή ισχύει $0 \leq \frac{t}{1+t} \leq t$ για κάθε $t \geq 0$, συνεπάγεται $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$.
Άρα $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt \leq \min\left\{x, \frac{x^2}{2}\right\} = \begin{cases} x^2/2, & \text{αν } 0 < x \leq 2 \\ x, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

ΠΡΩΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(t) = f(t)\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

για κάθε $t \in [a,b]$. Προφανώς, η h είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a,b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$ και, επομένως,

$$f(\zeta)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(\eta)g(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπάγεται

$$f(\zeta)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(\zeta)g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \int_a^b f(\eta)g(x)\,dx = f(\eta)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Άρα $h(\zeta) \leq 0 \leq h(\eta)$, οπότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $h(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Ο αριθμός $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ονομάζεται* **μέση τιμή** *της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται*

$$E(f;a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Η ονομασία *μέση τιμή* για το $E(f;a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ θα εξηγηθεί στην επόμενη ενότητα.

Είτε από την πρόταση 6.12 είτε από την πρόταση 6.1 συνεπάγεται ότι η μέση τιμή μιας f ολοκληρώσιμης στο $[a,b]$ είναι αριθμός στο διάστημα $[l,u]$, όπου u και l είναι το supremum και το infimum της f στο $[a,b]$. Επίσης, εφαρμόζοντας το πρώτο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού με τη σταθερή συνάρτηση $g = 1$, συμπεραίνουμε ότι
Η μέση τιμή μιας f συνεχούς στο $[a,b]$ είναι κάποια από τις τιμές της στο $[a,b]$.

Παράδειγμα 6.4.8. Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ στο $[-1,1]$ είναι $\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$, αλλά καμιά τιμή της συνάρτησης στο $[-1,1]$ δεν είναι 0.

Αν η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι ο αριθμός ρ, τότε $\int_a^b f(x)\,dx = \rho(b-a) = \int_a^b \rho\,dx$. Επομένως, *η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι εκείνη η τιμή που πρέπει να έχει μια σταθερή συνάρτηση στο $[a,b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της f.*

Ασκήσεις.

6.4.1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{-2}^{7/2}([x] + x^2)\,dx$, $\int_1^5(2 - 3x + 4x^2)\,dx$, $\int_{-2}^4(3x - 2^x)\,dx$, $\int_1^3(\frac{2}{x} - x^2 + x^{\sqrt{2}} + 3e^x)\,dx$.

Αν $f(x) = \begin{cases} 1+3x, & \text{αν } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \\ -2, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 2x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \\ x+2, & \text{αν } 2 < x \leq 5 \end{cases}$ υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_1^2 f(x)\,dx$, $\int_{-1}^5 g(x)\,dx$.

6.4.2. [2] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αποδείξτε ότι $0 \leq \int_c^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε $[c,d] \subseteq [a,b]$.
Γενικότερα, αν τα $[c_1,d_1], \ldots, [c_n,d_n]$ είναι ξένα ανά δύο (εκτός κοινών άκρων) και περιέχονται στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_{c_1}^{d_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^{d_n} f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$.

6.4.3. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι οι $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $\int_a^b \max\{f(x),g(x)\}\,dx + \int_a^b \min\{f(x),g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

6.4.4. Αποδείξτε ότι $\int_0^\pi (\sin x)^{n+1}\,dx \leq \int_0^\pi (\sin x)^n\,dx$ και $\int_0^{\pi/4} (\tan x)^{n+1}\,dx \leq \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n\,dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

6.4.5. Χωρίς να βρείτε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι ισχύει $xe^{-2x} \leq \int_x^{2x} e^{-t}\,dt \leq xe^{-x}$ για κάθε $x > 0$ και $3e^{-2} \leq \int_{1/2}^2 xe^{-x}\,dx \leq \frac{3}{2}e^{-1}$.

6.4.6. Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4x}{3}$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4}{3x}$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2}\,dt \leq \frac{2x^2}{3}$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2}\,dt \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\log x$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$.

6.4.7. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt$, $\lim_{x\to 0+} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

6.4.8. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

6.4.9. Έστω $a > 0$ και $f : [\ln a, \ln(a+1)] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\ln a, \ln(a+1)]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [\ln a, \ln(a+1)]$ ώστε $\int_{\ln a}^{\ln(a+1)} e^x f(x)\,dx = f(\xi)$.

6.4.10. [3] Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης $x - [x] - \frac{1}{2}$.
Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι $\int_k^{k+1} (x - [x] - \frac{1}{2})\,dx = 0$, $\int_k^{k+(1/2)} (x - [x] - \frac{1}{2})\,dx = -\frac{1}{8}$ και $\int_{k+(1/2)}^{k+1} (x - [x] - \frac{1}{2})\,dx = \frac{1}{8}$.
Αποδείξτε ότι $-\frac{1}{8} \leq \int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2})\,dx \leq \frac{1}{8}$ για κάθε a, b με $a < b$.

6.4.11. [4] [α] Αν $p > 0$, αποδείξτε ότι ισχύει $n^p \leq \int_n^{n+1} x^p\,dx \leq (n+1)^p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $n^p \leq \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} \leq (n+1)^p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^n k^p - \frac{n^{p+1}}{p+1}$ για κάθε n, είναι αύξουσα.
[β] Αν $0 < p < 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{(n+1)^{1-p} - n^{1-p}}{1-p} \leq \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p}$ για κάθε n, είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.
Αποδείξτε ότι $n^{p-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \to \frac{1}{1-p}$.
[γ] Αν $p > 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

[2] Μερικές πολύ χρήσιμες ανισότητες. Πολλές φορές, από επιπολαιότητα, γίνεται λάθος χρήση αυτών των ανισοτήτων χωρίς να έχει εξασφαλιστεί ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

[3] Οι συναρτήσεις αυτής της άσκησης θα χρησιμοποιηθούν αργότερα, στην άσκηση 7.3.20, για να αποδειχθούν μερικά σημαντικά αποτελέσματα, όπως ο τύπος του Stirling.

[4] Πολλά από τα θέματα αυτής της άσκησης θα τα ξαναδούμε στην άσκηση 7.3.20 και στις ενότητες 8.2 και 12.2.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) \leq \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$ για κάθε n, συγκλίνει.

[δ] Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{n+1} \leq \log \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ για κάθε n, είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.[5]

Αποδείξτε ότι $\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to 1$.

[ε] Αποδείξτε ότι ισχύει $\log \frac{m+1}{n} \leq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} + \log \frac{m}{n}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$.

Για κάθε $p \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι[6]

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn-1} + \frac{1}{pn} \to \log p.$$

[στ] Θεωρήστε την ακολουθία (y_n), όπου $y_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ για κάθε n. Στην ενότητα 2.5 αποδείξαμε ότι η (y_n) συγκλίνει. Αν $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι ισχύει $y_{2n} = x_{2n} - x_n + \log 2$ για κάθε n και, κατόπιν, ότι $y_{2n} \to \log 2$. Συμπεράνατε ότι[7]

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \to \log 2.$$

6.4.12. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in [a,b]$.[8]

Αποδείξτε ότι $\left| \int_c^d f(x)\,dx - f(d)(d-c) \right| \leq M\frac{(d-c)^2}{2}$ για κάθε $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Αποδείξτε[9] ότι $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k\frac{b-a}{n}) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$ για κάθε n και, επομένως, ότι $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k\frac{b-a}{n}) \to \int_a^b f(x)\,dx$.

6.4.13. [10] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε: $\lim_{x\to\xi+} \int_\xi^x f(t)\,dt = 0$ για κάθε $\xi \in [a,b)$ και $\lim_{x\to\xi-} \int_x^\xi f(t)\,dt = 0$ για κάθε $\xi \in (a,b]$.

6.4.14. [11] [α] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω η $g : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x-c)$ για κάθε $x \in [a+c, b+c]$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a+c, b+c]$ και $\int_{a+c}^{b+c} g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

[β] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau > 0$, δηλαδή ισχύει $f(x+\tau) = f(x)$ για κάθε x. Έστω ότι υπάρχει κ ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\kappa, \kappa+\tau]$.

Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε a, b με $a < b$.

Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(x)\,dx$ και $\int_a^{a+\tau} f(x)\,dx = \int_b^{b+\tau} f(x)\,dx$ για κάθε a, b με $a < b$.

[γ] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\lambda > 0$ και έστω η $g : [\lambda a, \lambda b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ για κάθε $x \in [\lambda a, \lambda b]$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[\lambda a, \lambda b]$ και $\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{αν } \lambda > 0.$$

[5] Το όριο της ακολουθίας αυτής ονομάζεται **σταθερά του Euler** και συμβολίζεται γ. Δείτε και τις ασκήσεις 2.4.6 και 7.3.20[ε].

[6] Αυτό θα το ξαναδούμε στην άσκηση 6.5.1.

[7] Αυτό θα το ξανααποδείξουμε στην ενότητα 10.2.

[8] Σύμφωνα με την υποσημείωση της άσκησης 4.6.3, η f είναι Lipschitz-συνεχής στο $[a,b]$.

[9] Θα δούμε στην άσκηση 6.5.1 ότι από την πρόταση 6.15 συνεπάγεται το παρόν όριο για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Όμως, με τη συγκεκριμένη υπόθεση για την f, προκύπτει και η παρούσα εκτίμηση της διαφοράς ανάμεσα στα αθροίσματα και στο όριό τους.

[10] Αυτή η άσκηση είναι μια “προετοιμασία” για την πρόταση 7.2 η οποία αποδεικνύει τη συνέχεια του αόριστου ολοκληρώματος.

[11] Μερικές απλές και σημαντικές αλλαγές μεταβλητής: η **μεταφορά** στο [α] και η **αλλαγή κλίμακας** στο [γ].

Το ανάλογο αποτέλεσμα, αν $\lambda < 0$, είναι:

$$\int_{\lambda b}^{\lambda a} f\big(\tfrac{x}{\lambda}\big)\, dx = -\lambda \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{αν } \lambda < 0.$$

[δ] Έστω $f : [-b,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[0,b]$.
Αν ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-b,b]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-b,b]$ και $\int_{-b}^b f(x)\, dx = 2\int_0^b f(x)\, dx$.
Αν ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-b,b]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-b,b]$ και $\int_{-b}^b f(x)\, dx = 0$.

6.4.15. [12] [α] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$ για κάθε συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.
[β] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$ για κάθε συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[a,b]$ με $g(a) = g(b) = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

6.4.16. [13] Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.
[α] Αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{2}\int_a^b \Big(\int_a^b (f(s)-f(t))(g(s)-g(t))\, ds\Big)\, dt = (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx.$$

[β] Αν οι f, g είναι είτε και οι δυο αύξουσες είτε και οι δυο φθίνουσες στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx \leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\, dx$, δηλαδή $E(f;a,b)E(g;a,b) \leq E(fg;a,b)$.
[γ] Αν η f είναι αύξουσα και η g φθίνουσα στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx \geq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\, dx$, δηλαδή $E(f;a,b)E(g;a,b) \geq E(fg;a,b)$.

6.4.17. [14] Έστω $f, g : [a,b] \to [0,+\infty)$ συνεχείς στο $[a,b]$ και $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder** για ολοκληρώματα:

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq \Big(\int_a^b (f(x))^p\, dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b (g(x))^q\, dx\Big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s(f(x))^p = t(g(x))^q$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η πολύ σημαντική **ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky**,

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq \Big(\int_a^b (f(x))^2\, dx\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b (g(x))^2\, dx\Big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] Αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για ολοκληρώματα:

$$\Big(\int_a^b (f(x)+g(x))^p\, dx\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_a^b (f(x))^p\, dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b (g(x))^p\, dx\Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sf(x) = tg(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

---

[12] Μια σημαντική άσκηση. Ένα από τα βασικά εργαλεία του Λογισμού Μεταβολών.

[13] Μια ενδιαφέρουσα ισότητα και δυο ενδιαφέρουσες ανισότητες.

[14] Εδώ έχουμε την "ολοκληρωτική" μορφή των ανισοτήτων της άσκησης 5.4.22. Με λίγο ασθενέστερες υποθέσεις θα τις ξαναδούμε στην άσκηση 6.4.26 αλλά και στην άσκηση 6.5.5.

6.4.18. [α][15] Έστω $f:[a,b]\to[c,d]$ συνεχής στο $[a,b]$ και $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής στο $[c,d]$. Αποδείξτε την **ανισότητα του Jensen** για ολοκληρώματα: $g\big(E(f;a,b)\big)\leq E(g\circ f;a,b)$ ή, ισοδύναμα,

$$g\big(\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)\leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx.$$

Αν η g είναι, επιπλέον, γνησίως κυρτή στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.

Πώς διατυπώνονται τα προηγούμενα αν η g είναι (γνησίως) κοίλη αντί (γνησίως) κυρτή;

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι:

(i) αν ο $n\in\mathbb{N}$ είναι άρτιος, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)^n\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b(f(x))^n\,dx$.

(ii) αν $\rho>1$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)^\rho\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b(f(x))^\rho\,dx$.

(iii) αν $0<\rho<1$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)^\rho\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b(f(x))^\rho\,dx$.

(iv) αν $\rho<0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)^\rho\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b(f(x))^\rho\,dx$.

(v) $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}\,dx$.

(vi) αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\log\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b\log(f(x))\,dx$. Η ανισότητα αυτή, αν γραφτεί

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\log(f(x))\,dx}\leq\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

αναφέρεται ως **ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου**.[16]

Αποδείξτε ότι καθεμιά από τις παραπάνω ανισότητες ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.

[β] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $w:[a,b]\to(0,+\infty)$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ ώστε $\int_a^b w(x)\,dx=1$. Συμβολίζουμε $E_w(f;a,b)=\int_a^b f(x)w(x)\,dx$.[17]

Στην περίπτωση της μέσης τιμής $E(f;a,b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ποιά είναι η αντίστοιχη w;

Έχουμε την εξής *γενικότερη εκδοχή της ανισότητας του Jensen*.[18] Έστω $f:[a,b]\to[c,d]$ συνεχής στο $[a,b]$ και $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής στο $[c,d]$. Έστω, επίσης, $w:[a,b]\to(0,+\infty)$ συνεχής στο $[a,b]$ ώστε $\int_a^b w(x)\,dx=1$. Αποδείξτε ότι $g\big(E_w(f;a,b)\big)\leq E_w(g\circ f;a,b)$ ή, ισοδύναμα,

$$g\big(\int_a^b f(x)w(x)\,dx\big)\leq\int_a^b g(f(x))w(x)\,dx.$$

Αν η g είναι, επιπλέον, γνησίως κυρτή στο $[c,d]$, αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.

Πώς διατυπώνονται τα προηγούμενα αν η g είναι (γνησίως) κοίλη αντί (γνησίως) κυρτή;

Διατυπώστε όλες τις ανισότητες του [α] με τη συνάρτηση w στα διάφορα ολοκληρώματα.

[ε][19] Έστω $f,w:[a,b]\to(0,+\infty)$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ ώστε $\int_a^b w(x)\,dx=1$.

Αποδείξτε ότι η $\big(\int_a^b(f(x))^p w(x)\,dx\big)^{1/p}$ είναι, ως συνάρτηση του p, αύξουσα στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p\to 0}\big(\int_a^b(f(x))^p w(x)\,dx\big)^{1/p}=e^{\int_a^b\log f(x)\,w(x)\,dx}.$$

Αν $p'<0<p''$, αποδείξτε ότι

$$\big(\int_a^b(f(x))^{p'}w(x)\,dx\big)^{1/p'}\leq e^{\int_a^b\log f(x)\,w(x)\,dx}\leq\big(\int_a^b(f(x))^{p''}w(x)\,dx\big)^{1/p''}.$$

---

[15]Εδώ έχουμε την "ολοκληρωτική" μορφή της ανισότητας του Jensen της άσκησης 5.5.39. Θα την ξαναδούμε με λίγο ασθενέστερες υποθέσεις στην άσκηση 6.4.26 και στην άσκηση 6.5.5.

[16]και θεωρείται ανάλογη της ανισότητας στην άσκηση 5.4.20[β]. Η ποσότητα $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\log(f(x))\,dx}$ ονομάζεται **γεωμετρική μέση τιμή** της f στο $[a,b]$.

[17]Ο αριθμός $E_w(f;a,b)=\int_a^b f(x)w(x)\,dx$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f ως προς την w στο $[a,b]$. Σ' αυτό το πλαίσιο, η συνάρτηση w ονομάζεται **συνάρτηση βάρους**.

[18]Με λίγο ασθενέστερες υποθέσεις υπάρχει στην άσκηση 6.4.26 και στην άσκηση 6.5.5.

[19]Η "ολοκληρωτική" μορφή της άσκησης 5.4.23.

6.4.19. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αν $u=\max\{f(x)\,|\,a\leq x\leq b\}$ αποδείξτε ότι $\big(\int_a^b (f(x))^n\,dx\big)^{1/n}\to u$.

6.4.20. [20] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $|f(x)|\leq\kappa\int_a^x|f(t)|\,dt$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο $[a,b]$.

6.4.21. Αν η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και συνεχής στον 0, αποδείξτε ότι $\int_0^1 f(x^n)\,dx\to f(0)$.

6.4.22. [α] Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένες στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx+\underline{\int}_a^b g(x)\,dx\leq \underline{\int}_a^b(f(x)+g(x))\,dx\leq\overline{\int}_a^b(f(x)+g(x))\,dx\leq\overline{\int}_a^b f(x)\,dx+\overline{\int}_a^b g(x)\,dx$.
[β] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι:
(i) αν $\lambda>0$, τότε $\overline{\int}_a^b\lambda f(x)\,dx=\lambda\overline{\int}_a^b f(x)\,dx$ και $\underline{\int}_a^b\lambda f(x)\,dx=\lambda\underline{\int}_a^b f(x)\,dx$.
(ii) αν $\lambda<0$, τότε $\overline{\int}_a^b\lambda f(x)\,dx=\lambda\underline{\int}_a^b f(x)\,dx$ και $\underline{\int}_a^b\lambda f(x)\,dx=\lambda\overline{\int}_a^b f(x)\,dx$.
[γ] Έστω $a<c<b$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^c f(x)\,dx+\overline{\int}_c^b f(x)\,dx$ και $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx=\underline{\int}_a^c f(x)\,dx+\underline{\int}_c^b f(x)\,dx$.
[δ] Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένες στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx\leq\overline{\int}_a^b g(x)\,dx$ και $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx\leq\underline{\int}_a^b g(x)\,dx$.

6.4.23. Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $\xi_0,\ldots,\xi_m$ ώστε $a=\xi_0<\cdots<\xi_m=b$ και ώστε η f να είναι συνεχής στο (ξ_{k-1},ξ_k) για κάθε $k=1,\ldots,m$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Προσέξτε: μπορεί να μην υπάρχουν τα πλευρικά όρια στους ξ_k.

6.4.24. Έστω η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } 0<x\leq 1\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και υπολογίστε το $\int_0^1 f(x)\,dx$.

6.4.25. [21] [α] Αποδείξτε ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν τμηματικά σταθερές συναρτήσεις $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx<\epsilon$.
[β] Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι τμηματικά σταθερή. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx<\epsilon$.
[γ] Αποδείξτε ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx<\epsilon$.

6.4.26. [22] [α] Έστω $f:[a,b]\to[c,d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[c,d]$. Αποδείξτε ότι η $g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
[β] Βάσει του [α], αποδείξτε ότι, αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε και η $f^2:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Κατόπιν, γράφοντας $fg=\frac14(f+g)^2-\frac14(f-g)^2$ και χρησιμοποιώντας τις προτάσεις 6.3 και 6.4, αποδείξτε την πρόταση 6.6.
[γ] Έστω, για κάθε n, πεπερασμένο $A_n\subseteq[a,b]$ ώστε $A_m\cap A_n=\emptyset$ για κάθε m,n με $m\neq n$. Ορίζουμε $f(x)=\begin{cases}1/n, & \text{αν } x\in A_n \text{ για κάποιον } n\\ 0, & \text{αν } x\in[a,b] \text{ και } x\notin A_n \text{ για κάθε } n\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

[20] Προσέξτε την ομοιότητα αυτής της άσκησης με την άσκηση 5.4.28.

[21] Μερικά σημαντικά αποτελέσματα για τη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και σε τμηματικά σταθερές συναρτήσεις καθώς και για τη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και σε συνεχείς συναρτήσεις.

[22] Ένα σημαντικό θεώρημα για την ολοκληρωσιμότητα σύνθετης συνάρτησης.

[δ] Θεωρήστε $A_n = \{\frac{2k-1}{2^n} \,|\, 1 \leq k \leq 2^{n-1}\}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $A_n \subseteq [0,1]$ για κάθε n και $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε m, n με $m \neq n$. Αποδείξτε ότι για κάθε $c, d \in [0,1]$ με $c < d$ υπάρχει $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ώστε $c < x < d$. Δηλαδή, ότι το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι πυκνό στο διάστημα $[0,1]$.

[ε] Τώρα θα δούμε ότι η σύνθεση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων μπορεί να μην είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Θεωρήστε την $f : [0,1] \to [0,1]$ που ορίζεται στο [γ] με βάση τα συγκεκριμένα A_n του [δ]. Θεωρήστε και την $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Τότε οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, αλλά αποδείξτε ότι η $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

[στ] Αποδείξτε ότι οι ανισότητες στην άσκηση 6.4.17 ισχύουν με την ασθενέστερη υπόθεση ότι οι f, g είναι, απλώς, ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.

Αποδείξτε ότι οι ανισότητες στην άσκηση 6.4.18 ισχύουν με την ασθενέστερη υπόθεση ότι οι f, w είναι, απλώς, ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.

6.4.27. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a)\big| \leq \frac{(b-a)^2 M}{4}$.

[23] Αν $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ για $k = 0, \ldots, n$ και $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k = f(\xi_k)$ για $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - (\eta_1 + \cdots + \eta_n)\tfrac{b-a}{n}\big| \leq \tfrac{1}{4}\,\tfrac{(b-a)^2 M}{n}.$$

6.4.28. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\big| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12}$.

[24] Αν $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ και $y_k = f(x_k)$ για $k = 0, \ldots, n$, αποδείξτε ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - \big(\tfrac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{y_n}{2}\big)\tfrac{b-a}{n}\big| \leq \tfrac{1}{12}\,\tfrac{(b-a)^3 M}{n^2}.$$

6.4.29. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a)\big| \leq \frac{(b-a)^3 M}{24}$.

[25] Αν $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ για $k = 0, \ldots, n$ και $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k = f(\xi_k)$ για $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - (\eta_1 + \cdots + \eta_n)\tfrac{b-a}{n}\big| \leq \tfrac{1}{24}\,\tfrac{(b-a)^3 M}{n^2}.$$

6.4.30. [α] Αποδείξτε ότι για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P βαθμού ≤ 3 και για κάθε a, b με $a < b$, ισχύει $\int_a^b P(x)\,dx = \big(P(a) + 4P(\frac{a+b}{2}) + P(b)\big)\frac{b-a}{6}$.

[β] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f^{(4)}(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))\frac{b-a}{6}\big| \leq \frac{(b-a)^5 M}{2880}$.

[26] Αν $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ και $y_k = f(x_k)$ για $k = 0, \ldots, n$ και $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k = f(\xi_k)$ για $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - \big(y_0 + y_n + 2(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + 4(\eta_1 + \cdots + \eta_n)\big)\,\tfrac{b-a}{6n}\big| \leq \tfrac{1}{2880}\,\tfrac{(b-a)^5 M}{n^4}.$$

6.5 Ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του Riemann.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω διάστημα $[a,b]$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Θεωρούμε οποιοδήποτε σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ώστε $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Το Ξ ονομάζεται* **επιλογή ενδιάμεσων σημείων** *για τη διαμέριση Δ. Τα σημεία ξ_k ονομάζονται* **Ξ-σημεία**.

[23] Η **μέθοδος των ορθογωνίων** για την προσεγγιστική αριθμητική ολοκλήρωση.

[24] Η **μέθοδος των τραπεζίων** για την προσεγγιστική αριθμητική ολοκλήρωση.

[25] Η **μέθοδος των εφαπτομένων** για την προσεγγιστική αριθμητική ολοκλήρωση.

[26] Η **μέθοδος του Simpson** για την προσεγγιστική αριθμητική ολοκλήρωση.

Είναι σαφές ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές Ξ ενδιάμεσων σημείων για την ίδια διαμέριση Δ του $[a,b]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ του $[a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε επιλογή $\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για τη διαμέριση Δ. Το άθροισμα*

$$\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann** *της f ως προς τη διαμέριση Δ και την επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.*

ΛΗΜΜΑ 6.6. *Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και διαμέριση Δ του $[a,b]$. Τότε:*
[α] $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ *για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.*
[β] $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\sup\big\{\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)\,|\,\Xi$ *επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την* $\Delta\big\}$.
[γ] $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\inf\big\{\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)\,|\,\Xi$ *επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την* $\Delta\big\}$.

Απόδειξη. [α] Έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ του $[a,b]$ και επιλογή $\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.
Έστω l_k και u_k το infimum και το supremum της f στο $[x_{k-1},x_k]$. Τότε $l_k\leq f(\xi_k)\leq u_k$, οπότε

$$\sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1})\leq\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\leq\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1}).$$

Δηλαδή, $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$.
Για τα [β], [γ] ορίζουμε το συνόλο

$$W_\Delta=\big\{\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)\,|\,\Xi\text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την }\Delta\big\}.$$

[β] Από το [α] συνεπάγεται ότι το $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου W_Δ.
Έστω $\epsilon>0$. Επειδή ο u_k είναι το supremum της f στο $[x_{k-1},x_k]$, υπάρχει $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ ώστε $f(\xi_k)>u_k-\frac{\epsilon}{b-a}$. Έτσι ορίζεται μια συγκεκριμένη επιλογή $\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ και γι αυτήν:

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)&=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})>\sum_{k=1}^n(u_k-\tfrac{\epsilon}{b-a})(x_k-x_{k-1})\\&=\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^n\tfrac{\epsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει στοιχείο του W_Δ το οποίο είναι $>\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\epsilon$ και, επομένως, το $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του W_Δ.
[γ] Από το [α] συνεπάγεται ότι το $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου W_Δ.
Έστω $\epsilon>0$. Επειδή ο l_k είναι το infimum της f στο $[x_{k-1},x_k]$, υπάρχει $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ ώστε $f(\xi_k)<l_k+\frac{\epsilon}{b-a}$. Έτσι ορίζεται μια συγκεκριμένη επιλογή $\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ (διαφορετική ίσως από την Ξ του [β]) και γι αυτήν:

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)&=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})<\sum_{k=1}^n(l_k+\tfrac{\epsilon}{b-a})(x_k-x_{k-1})\\&=\sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^n\tfrac{\epsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})=\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει στοιχείο του W_Δ το οποίο είναι $<\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\epsilon$. Επομένως, το $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του W_Δ. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ του $[a,b]$. Ονομάζουμε* **πλάτος** *της Δ το μέγιστο από τα μήκη των Δ-διαστημάτων, δηλαδή το*

$$w(\Delta)=\max\{x_k-x_{k-1}\,|\,1\leq k\leq n\}.$$

Σχόλιο. Η απόδειξη του θεωρήματος 6.3 είναι, ίσως, η δυσκολότερη όλου του βιβλίου!

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3. *Έστω φραγμένη* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
[α] *Έστω ότι υπάρχει αριθμός* $\mathcal{I}$ *με την εξής ιδιότητα. Για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε διαμέριση* Δ *του* $[a, b]$ *με* $w(\Delta) < \delta$ *και κάθε επιλογή* Ξ *ενδιάμεσων σημείων για την* Δ *να ισχύει* $\big|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \mathcal{I}\big| < \epsilon$. *Τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *και* $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}$.
[β] *Αντιστρόφως, έστω ότι η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$. *Τότε για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε διαμέριση* Δ *του* $[a, b]$ *με* $w(\Delta) < \delta$ *και κάθε επιλογή* Ξ *ενδιάμεσων σημείων για την* Δ *να ισχύει* $\big|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\big| < \epsilon$.

Απόδειξη. [α] Ορίζουμε

$$W_\Delta = \big\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \,|\, \Xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την } \Delta\big\},$$

όπως στην απόδειξη του λήμματος 6.6.
Έστω $\epsilon > 0$. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\big|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \mathcal{I}\big| < \frac{\epsilon}{4}$.
Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση Δ ώστε $w(\Delta) < \delta$, οπότε για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει

$$\mathcal{I} - \tfrac{\epsilon}{4} < \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) < \mathcal{I} + \tfrac{\epsilon}{4}.$$

Άρα οι $\mathcal{I} - \frac{\epsilon}{4}$ και $\mathcal{I} + \frac{\epsilon}{4}$ είναι κάτω φράγμα και άνω φράγμα, αντιστοίχως, του W_Δ και, επομένως, από τα [β], [γ] του λήμματος 6.6 συνεπάγεται

$$\mathcal{I} - \tfrac{\epsilon}{4} \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \mathcal{I} + \tfrac{\epsilon}{4}. \tag{6.31}$$

Άρα

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Τώρα, από τις ανισότητες (6.31) και από την γνωστή ανισότητα

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$$

συνεπάγεται

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - \mathcal{I}\big| \leq \tfrac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, είναι $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}$.
[β] Η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, υπάρχει διαμέριση Δ_0 του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.32}$$

Έστω $n_0 \geq 2$ το πλήθος των Δ_0-σημείων. Ορίζουμε

$$\delta = \tfrac{\epsilon}{4n_0(M+1)}. \tag{6.33}$$

Έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ με

$$w(\Delta) < \delta \tag{6.34}$$

και έστω l_k και u_k το infimum και το supremum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$.
Χωρίζουμε τους δείκτες $k = 1, \dots, n$ σε δυο κατηγορίες. Το σύνολο A έχει ως στοιχεία του εκείνους ακριβώς τους k για τους οποίους το $[x_{k-1}, x_k]$ περιέχει ένα τουλάχιστον Δ_0-σημείο ως *εσωτερικό* του σημείο. Το σύνολο B έχει ως στοιχεία του ακριβώς τους υπόλοιπους k, δηλαδή

εκείνους τους k για τους οποίους το $[x_{k-1}, x_k]$ δεν περιέχει κανένα Δ_0-σημείο ως εσωτερικό του σημείο. (Μπορεί, πάντως, να είναι Δ_0-σημείο το ένα ή και τα δύο άκρα του $[x_{k-1}, x_k]$.) Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k\in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k\in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (6.35)$$

Είναι προφανές ότι το πλήθος των στοιχείων του A είναι $\leq n_0$. Επίσης, είναι προφανές ότι για κάθε $k \in A$ ισχύει $-M \leq l_k \leq u_k \leq M$ και, επομένως, $u_k - l_k \leq 2M$. Άρα, και λόγω των (6.33) και (6.34), για κάθε $k \in A$ ισχύει

$$(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq 2Mw(\Delta) \leq 2M\delta < \tfrac{\epsilon}{2n_0}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k\in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k\in A} \tfrac{\epsilon}{2n_0} \leq n_0 \tfrac{\epsilon}{2n_0} = \tfrac{\epsilon}{2}. \quad (6.36)$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta' = \Delta \cup \Delta_0$ και παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in B$, το Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι και Δ'-διάστημα. Άρα, σύμφωνα με την παρατήρηση 2 πριν από το λήμμα 6.2 και επειδή η Δ' είναι λεπτότερη της Δ_0 και λόγω της (6.32), είναι

$$\begin{aligned} \sum_{k\in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) &\leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \\ &\leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) < \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, από τις (6.35), (6.36) και (6.37) ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (6.38)$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$.
Τώρα θεωρούμε και οποιαδήποτε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ, οπότε, σύμφωνα με το λήμμα 6.6[α], είναι

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta). \quad (6.39)$$

Συνδυάζοντας την (6.39) με τη γνωστή ανισότητα

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$$

και χρησιμοποιώντας την (6.38), συμπεραίνουμε ότι

$$\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \epsilon$$

για κάθε διαμέριση Δ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. □

Ιδού ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann που έδωσε ο Riemann.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **ολοκληρώσιμη** *ή, πιό σωστά,* **Riemann ολοκληρώσιμη** *στο $[a, b]$ αν υπάρχει αριθμός $\mathcal{I}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \mathcal{I}\right| < \epsilon$.*
Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε ο αριθμός $\mathcal{I}$ ονομάζεται **ολοκλήρωμα** *ή, πιο σωστά,* **Riemann ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b]$ και συμβολίζεται*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}.$$

Το περιεχόμενο του θεωρήματος 6.3 είναι ακριβώς ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος που έδωσε ο Darboux και ο ορισμός που έδωσε ο Riemann είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή, *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον έναν ορισμό, τότε είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα και με τον άλλον ορισμό και οι τιμές των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων της ταυτίζονται.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.15. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$. Για κάθε n θεωρούμε μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων για την Δ_n. Τότε*

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει

$$\Big|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)\, dx\Big| < \epsilon.$$

Επειδή $w(\Delta_n) \to 0$, ισχύει τελικά $w(\Delta_n) < \delta$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$\Big|\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) - \int_a^b f(x)\, dx\Big| < \epsilon.$$

Άρα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f(x)\, dx$. □

Μια όχι τόσο αυστηρή αλλά πολύ συνηθισμένη και παραστατική διατύπωση της πρότασης 6.15 είναι η εξής.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τα αθροίσματα Riemann της f συγκλίνουν στο ολοκλήρωμά της όταν το πλάτος των αντίστοιχων διαμερίσεων τείνει στο 0.

Υπάρχει και το ανάλογο σύμβολο:

$$\lim_{w(\Delta)\to 0} \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 6.15, *αν γνωρίζουμε* ότι μια συγκεκριμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι* ολοκληρώσιμη, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της θεωρώντας μια ακολουθία (Δ_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$ και, για κάθε Δ_n, μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων γι αυτήν. Υπολογίζουμε τα αθροίσματα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$ και, τέλος, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα, αφού $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f(x)\, dx$. Η μοναδική μας φροντίδα είναι να βρούμε κατάλληλες Δ_n και αντίστοιχες Ξ_n ώστε να υπολογίζονται εύκολα τα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$.

Τα παραδείγματα που είδαμε μετά από την πρόταση 6.2 μπορούμε να τα χειριστούμε με λίγο πιο απλό τρόπο ως εξής. Όλες οι συναρτήσεις σε αυτά τα παραδείγματα είναι συνεχείς, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 6.1, είναι ολοκληρώσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα. Θεωρούμε, τώρα, τις ίδιες ακολουθίες διαμερίσεων (Δ_n) που είχαμε θεωρήσει και προηγουμένως. Κατόπιν, για κάθε Δ_n θεωρούμε οποιαδήποτε αντίστοιχη επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων και υπολογίζουμε το άθροισμα Riemann $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$. Συνήθως, ως ενδιάμεσα σημεία επιλέγουμε ένα από τα δυο άκρα των υποδιαστημάτων. Στην ενότητα 6.2 κάναμε, σε κάθε παράδειγμα και για κάθε Δ_n, *δυο επιλογές* Ξ_n. Η μία επιλογή μας έδινε ως $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$ το άνω άθροισμα Darboux $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n)$ και η άλλη επιλογή μας έδινε ως $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$ το κάτω άθροισμα Darboux $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n)$. Στην ενότητα 6.2 έπρεπε να κάνουμε και τις δυο επιλογές διότι εκεί εργαζόμασταν με άνω και κάτω αθροίσματα Darboux. Εδώ, όμως, είναι αρκετό να κάνουμε μόνο μια επιλογή και να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to+\infty} \Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$, η τιμή του οποίου είναι το ζητούμενο $\int_a^b f(x)\, dx$.

Παράδειγμα 6.5.1. Οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι συνεχείς και, επομένως, ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a,b]$. Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα $\int_a^b \cos x\, dx$ και $\int_a^b \sin x\, dx$.

Κατ' αρχάς αποδεικνύουμε τους τριγωνομετρικούς τύπους

$$\sin\tfrac{q}{2} \sum_{k=1}^n \cos(kq) = \sin\tfrac{nq}{2} \cos\tfrac{(n+1)q}{2}, \qquad \sin\tfrac{q}{2} \sum_{k=1}^n \sin(kq) = \sin\tfrac{nq}{2} \sin\tfrac{(n+1)q}{2}. \quad (6.40)$$

Ο πρώτος προκύπτει εύκολα από την ισότητα $\sin\frac{q}{2}\cos(kq) = \frac{1}{2}\sin(kq + \frac{q}{2}) - \frac{1}{2}\sin(kq - \frac{q}{2})$ με άθροιση για $k = 1, \ldots, n$. Ο δεύτερος τύπος προκύπτει με τον ίδιο τρόπο από την ισότητα

$\sin\frac{q}{2}\sin(kq) = -\frac{1}{2}\cos(kq+\frac{q}{2}) + \frac{1}{2}\cos(kq-\frac{q}{2})$.
Τώρα για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση $\Delta_n = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$ με

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } k = 0, \dots, n.$$

Επίσης, θεωρούμε $\Xi_n = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ με

$$\xi_k = x_k \qquad \text{για } k = 0, \dots, n.$$

Το πλάτος της Δ_n είναι, προφανώς, $w(\Delta_n) = \frac{b-a}{n}$, οπότε $w(\Delta_n) \to 0$.
Τότε

$$\Sigma(\cos x; a, b; \Delta_n, \Xi_n) = \textstyle\sum_{k=1}^n \cos\xi_k\,(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \cos(a + k\frac{b-a}{n}).$$

Θέτουμε $q = \frac{b-a}{n}$ για απλούστευση και από τους τύπους (6.40) έχουμε

$$\begin{aligned}
\Sigma(\cos x; a, b; \Delta_n, \Xi_n) &= q\cos a \textstyle\sum_{k=1}^n \cos(kq) - q\sin a \sum_{k=1}^n \sin(kq)\\
&= \tfrac{q}{\sin\frac{q}{2}}\cos a \sin\tfrac{nq}{2}\cos\tfrac{(n+1)q}{2} - \tfrac{q}{\sin\frac{q}{2}}\sin a \sin\tfrac{nq}{2}\sin\tfrac{(n+1)q}{2}\\
&= \tfrac{q}{\sin\frac{q}{2}}\sin\tfrac{nq}{2}\cos(a + \tfrac{(n+1)q}{2}) = \tfrac{\frac{b-a}{n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\sin\tfrac{b-a}{2}\cos(a + \tfrac{(n+1)(b-a)}{2n})\\
&\to 2\sin\tfrac{b-a}{2}\cos\tfrac{b+a}{2} = \sin b - \sin a.
\end{aligned}$$

Άρα $\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και το $\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$.
Με άλλα λόγια,

$$\textstyle\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Πάντως, η αξία της πρότασης 6.15, όπως και της ανάλογης πρότασης 6.2, είναι περισσότερο θεωρητική παρά πρακτική. Στο κεφάλαιο 7 θα γνωρίσουμε την πιο απλή μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων, η οποία βασίζεται στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Τονίζουμε, όμως, ότι τα αθροίσματα Riemann είναι το κατεξοχήν εργαλείο σύνδεσης του ολοκληρώματος με τις πολυάριθμες εφαρμογές του στη Γεωμετρία, στη Φυσική και οπουδήποτε αλλού στην επιστήμη. Σχεδόν κάθε ποσότητα, η οποία εκφράζεται με κάποιο ολοκλήρωμα, πρώτα "ποσοτικοποιείται" προσεγγιστικά με τη μορφή αθροισμάτων Riemann και κατόπιν καταλήγει μέσω ορίου στη μορφή ολοκληρώματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα, την μέση τιμή συνάρτησης, θα δούμε αμέσως.
Στο ίδιο πλαίσιο, μπορούν να υπολογιστούν μερικά όρια ακολουθιών με κατάλληλη αναγωγή σε υπολογισμό αντίστοιχων ολοκληρωμάτων.

Τώρα θα αιτιολογήσουμε την επιλογή του όρου *μέση τιμή* για το $E(f; a, b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ξεκινώντας από την πρωταρχική και απλή χρήση του όρου *μέση τιμή*.

Είναι γνωστό ότι η *μέση τιμή* οποιωνδήποτε αριθμών $y_1, \dots, y_n$, όπου ο κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\tfrac{\nu_1 y_1 + \cdots + \nu_n y_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n} = \tfrac{\nu_1}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\,y_1 + \cdots + \tfrac{\nu_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\,y_n = w_1 y_1 + \cdots + w_n y_n,$$

όπου κάθε $w_k = \frac{\nu_k}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$ είναι η σχετική συχνότητα του αντίστοιχου y_k, δηλαδή η αναλογία του αριθμού εμφανίσεων του y_k προς τον συνολικό αριθμό εμφανίσεων των $y_1, \dots, y_n$. Είναι, επίσης, γνωστό ότι ο αριθμός αυτός μπορεί να μην είναι ίσος με κανέναν από τους $y_1, \dots, y_n$ αλλά ότι είναι ανάμεσα στον μικρότερο και στον μεγαλύτερο από τους $y_1, \dots, y_n$.

Τώρα, έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και οποιαδήποτε επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Θεωρούμε και τις αντίστοιχες τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$. Αν το πλάτος $w(\Delta)$ είναι αρκετά μικρό, δηλαδή αν κάθε Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, τότε τα σημεία $x \in [x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ κοντά στον αντίστοιχο ξ_k, οπότε είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε τιμή $f(\xi_k)$ "εκπροσωπεί" τις τιμές $f(x)$ για $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και, επομένως, ότι οι τιμές $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)$ "εκπροσωπούν" όλες τις τιμές της συνάρτησης. Πρέπει, φυσικά, να σκεφτούμε ότι αν κάποιο $[x_{k-1}, x_k]$ έχει μεγαλύτερο μήκος από κάποιο άλλο $[x_{l-1}, x_l]$, τότε η τιμή $f(\xi_k)$ "εκπροσωπεί" περισσότερες τιμές της συνάρτησης από όσες "εκπροσωπεί" η τιμή $f(\xi_l)$. Θα δεχτούμε, λοιπόν, ότι η αναλογία του συνόλου των τιμών $f(x)$ που "εκπροσωπούνται" από οποιαδήποτε τιμή $f(\xi_k)$ προς το σύνολο όλων των τιμών της συνάρτησης είναι ίδια με την αναλογία $w_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$ του μήκους του αντίστοιχου $[x_{k-1}, x_k]$ προς το συνολικό μήκος $b-a$. Επομένως, αν θέλουμε να εισαγάγουμε την έννοια της μέσης τιμής *όλων* των τιμών της f, μια καλή ιδέα είναι να θεωρήσουμε τη μέση τιμή

$$\tfrac{x_1 - x_0}{b-a} f(\xi_1) + \cdots + \tfrac{x_n - x_{n-1}}{b-a} f(\xi_n)$$

των "αντιπροσωπευτικών" τιμών $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)$ και να δούμε μήπως αυτή η μέση τιμή πλησιάζει κάποιον αριθμό αν το πλάτος $w(\Delta)$ γίνει αρκετά μικρό. Όμως, αυτή η μέση τιμή είναι, προφανώς, ίση με

$$\tfrac{1}{b-a}\, \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi).$$

και, επομένως, πλησιάζει τον αριθμό $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ όταν το $w(\Delta)$ γίνεται κατάλληλα μικρό.

Ασκήσεις.

6.5.1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι[27]

$$\tfrac{b-a}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Αποδείξτε, επίσης, ότι

$$\tfrac{b-a}{n} \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \to \int_a^b f(x)\, dx, \qquad \tfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(a + (k - \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\big) \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Και στις τρεις περιπτώσεις περιγράψτε τις αντίστοιχες διαμερίσεις και τις επιλογές ενδιάμεσων σημείων.

[28] Αποδείξτε τα παρακάτω όρια:

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}} \to \int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$ για $p > 0$.

(ii) $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \to \int_1^p \frac{1}{x}\, dx = \log p$ για $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.[29]

(iii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

(iv) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}} \to \int_1^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$.

(v) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \to \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

(vi) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - (k-1)^2} \to \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

6.5.2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και οποιαδήποτε ακολουθία (Δ_n) διαμερίσεων του $[a, b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n) \to \int_a^b f(x)\, dx, \qquad \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n) \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

6.5.3. [30] Αποδείξτε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε δυο διαμερίσεις Δ_1, Δ_2 του $[a, b]$ με $w(\Delta_1) < \delta$, $w(\Delta_2) < \delta$ και κάθε δυο επιλογές Ξ_1, Ξ_2 ενδιάμεσων σημείων των Δ_1, Δ_2, αντιστοίχως, να είναι $|\Sigma(f; a, b; \Delta_1; \Xi_1) - \Sigma(f; a, b; \Delta_2; \Xi_2)| < \epsilon$.

[27] Αυτό το όριο το είδαμε σε μια πολύ ειδική περίπτωση στην άσκηση 6.4.12.

[28] Τα αθροίσματα Riemann χρησιμεύουν για να υπολογίζουμε ολοκληρώματα. Μπορεί, όμως, να γίνει και το αντίστροφο. Μερικές φορές οι όροι μιας ακολουθίας μπορούν να γραφτούν στη μορφή αθροισμάτων Riemann μιας συγκεκριμένης συνάρτησης, οπότε το όριο της ακολουθίας είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Αυτή η ιδέα εφαρμόζεται σ' αυτά τα όρια ακολουθιών. Μερικά από τα ολοκληρώματα που προκύπτουν θα μπορέσετε να τα υπολογίσετε αφού μάθετε κατάλληλες μεθόδους στο επόμενο κεφάλαιο. Δείτε την άσκηση 7.3.6.

[29] Το όριο αυτό το ξαναείδαμε στην άσκηση 6.4.11.

[30] Ένα "κριτήριο Cauchy" για σύγκλιση αθροισμάτων Riemann.

6.5.4. Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \delta) = \sup\big\{\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b] \text{ με } w(\Delta) < \delta\big\}$$

και

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \delta) = \inf\big\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b] \text{ με } w(\Delta) < \delta\big\}.$$

Αν $0 < \delta_1 < \delta_2$, αποδείξτε ότι $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \delta_1) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \delta_2)$.
Αν $0 < \delta_1 < \delta_2$, αποδείξτε ότι $\underline{\Sigma}(f; a, b; \delta_2) \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \delta_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{\delta\to 0+} \overline{\Sigma}(f; a, b; \delta) = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ και $\lim_{\delta\to 0+} \underline{\Sigma}(f; a, b; \delta) = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{\delta\to 0+} \big(\overline{\Sigma}(f; a, b; \delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \delta)\big) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

6.5.5. Αποδείξτε τις ανισότητες Hölder, Minkowski και Jensen για ολοκληρώματα, που βρίσκονται στις ασκήσεις 6.4.17 και 6.4.18, όταν οι συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ (η g στην ανισότητα του Jensen πρέπει να είναι συνεχής) (δείτε και την άσκηση 6.4.26[στ]), χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ανισότητες για αθροίσματα, που βρίσκονται στις ασκήσεις 5.4.22, 5.4.23 και 5.5.39.

6.5.6. Θεωρούμε καμπύλη Γ στο xy-επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, όπου η παράμετρος t διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ και οι συναρτήσεις $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ του $[a, b]$ και σχηματίζουμε την πολυγωνική γραμμή Γ_Δ στο xy-επίπεδο με διαδοχικές κορυφές τα σημεία $(x_k, y_k) = (x(t_k), y(t_k))$ για $k = 0, 1, \ldots, n-1, n$. Το μήκος αυτής της πολυγωνικής γραμμής είναι, φυσικά, ίσο με

$$\text{μήκος}\,(\Gamma_\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Στην Γεωμετρία, ως **μήκος** της καμπύλης Γ ορίζεται το

$$\text{μήκος}\,(\Gamma) = \sup\big\{\text{μήκος}\,(\Gamma_\Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\big\}.$$

Αν έχουμε καμπύλες Γ_1 με παραμετρικές εξισώσεις $x = x_1(t)$ και $y = y_1(t)$ στο διάστημα $[a, b]$ και Γ_2 με παραμετρικές εξισώσεις $x = x_2(t)$ και $y = y_2(t)$ στο διάστημα $[b, c]$ και αν $x_1(b) = x_2(b)$, $y_1(b) = y_2(b)$, ορίζουμε την καμπύλη Γ με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στο $[a, c]$, όπου

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{αν } t \in [a, b] \\ x_2(t), & \text{αν } t \in [b, c] \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{αν } t \in [a, b] \\ y_2(t), & \text{αν } t \in [b, c] \end{cases}$$

Η Γ ονομάζεται **άθροισμα** των Γ_1 και Γ_2 και συμβολίζεται $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$.
Αποδείξτε την αθροιστικότητα του μήκους, δηλαδή ότι

$$\text{μήκος}\,(\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2) = \text{μήκος}\,(\Gamma_1) + \text{μήκος}\,(\Gamma_2).$$

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Θεωρούμε την ειδικού τύπου καμπύλη Γ στο xy-επίπεδο με παραμετρική εξίσωση $y = f(x)$, όπου η παράμετρος x διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ (δηλαδή, με παραμετρικές εξισώσεις $x = t$ και $y = f(t)$ στο $[a, b]$). Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι

$$\text{μήκος}\,(\Gamma) = \textstyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Γενικότερα, αποδείξτε ότι, αν η καμπύλη Γ έχει παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στο διάστημα $[a, b]$ με παραγώγους ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε

$$\text{μήκος}\,(\Gamma) = \textstyle\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$ [31]

[31] Για τον υπολογισμό του μήκους μερικών συγκεκριμένων καμπυλών δείτε την άσκηση 7.3.30.

Κεφάλαιο 7

Σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος.

7.1 Αντιπαράγωγοι, αόριστα ολοκληρώματα.

Αντιπαράγωγοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αν για την $F : I \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I,$$

τότε η F ονομάζεται **αντιπαράγωγος** *ή* **παράγουσα** *ή* **πρωτεύουσα συνάρτηση** *ή* **αρχική συνάρτηση** *της f στο διάστημα I.*

Παράδειγμα 7.1.1. Η συνάρτηση $\frac{1}{p+1}x^{p+1}$ είναι αντιπαράγωγος της x^p (i) στο $(-\infty, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{N}$, (ii) στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{Z}$ και $p \leq -2$, (iii) στο $[0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $p > 0$ και (iv) στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $p < 0$.
Μένουν οι περιπτώσεις $p = -1$ και $p = 0$.
Η x είναι αντιπαράγωγος της σταθερής συνάρτησης 1 στο $\mathbb{R}$.
Η $\log |x|$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 7.1.2. Αν $\rho > 0$, $\rho \neq 1$, η $\frac{1}{\log \rho}\, \rho^x$ είναι αντιπαράγωγος της ρ^x στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 7.1.3. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε x.
Επειδή ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και η F είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε να ισχύει $F(x) = c_1$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$. Ομοίως, επειδή ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε να ισχύει $F(x) = c_2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Άρα $c_1 = F(0) = c_2$ και, συμβολίζοντας $c = c_1 = c_2$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $F(x) = c$ για κάθε x. Επομένως, ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε x και καταλήγουμε σε αντίφαση, αφού $F'(0) = f(0) = 1$.
Υπάρχει και ένας βαθύτερος λόγος που η f δεν έχει αντιπαράγωγο. Αν υπήρχε η F όπως παραπάνω, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Darboux στην άσκηση 5.3.23[β], η $f = F'$ θα είχε την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής. Αυτό, όμως, δεν ισχύει: για παράδειγμα, είναι $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ και δεν υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = \frac{1}{2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1. *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$. Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μια από τις F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγος της f στο I, τότε και η άλλη είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγοι της f στο I, τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $F_2(x) - F_1(x) = c$ και ${F_1}'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Τότε ισχύει

$${F_2}'(x) = (F_1 + c)'(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

για κάθε $x \in I$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει ${F_1}'(x) = f(x)$ και ${F_2}'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Ορίζουμε την $h = F_2 - F_1 : I \to \mathbb{R}$ και τότε ισχύει

$$h'(x) = {F_1}'(x) - {F_2}'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

για κάθε $x \in I$. Άρα η h είναι σταθερή συνάρτηση στο I. □

Το αποτέλεσμα της πρότασης 7.1 μπορεί να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο.
Έστω F αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, και μόνο από αυτές.
Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρες* αντιπαραγώγους στο διάστημα I και αυτές είναι ακριβώς οι εξής: μια οποιαδήποτε από τις αντιπαραγώγους συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα 7.1.4. Οι αντιπαράγωγοι της συνάρτησης x στο $\mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.
Γενικότερα, για κάθε συνάρτηση στα παραδείγματα 7.1.1 και 7.1.2 μπορούμε να βρούμε όλες τις αντιπαραγώγους της, αν επισυνάψουμε το σύμβολο c στην αναφερόμενη αντιπαράγωγο.

Πρέπει να προσεχθεί το εξής. Αν μια συνάρτηση g έχει παράγωγο σταθερή 0 στην ένωση *δυο μη-διαδοχικών* διαστημάτων, τότε δεν συνεπάγεται ότι η g είναι σταθερή στην ένωση των δυο αυτών διαστημάτων. Αυτό το είχαμε επισημάνει, και με το παράδειγμα 5.4.2, μετά από την πρόταση 5.7. Έτσι, λοιπόν, καταλαβαίνουμε γιατί στην πρόταση 7.1 αναφέρεται “διάστημα” και όχι “ένωση διαστημάτων”.

Παράδειγμα 7.1.5. Οι συναρτήσεις $\log|x| + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, είναι οι αντιπαράγωγοι της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$ αλλά *όχι* στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Οι αντιπαράγωγοι της $\frac{1}{x}$ στην $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι οι συναρτήσεις $F(x) = \begin{cases} \log|x| + c_1, & \text{αν } x < 0 \\ \log|x| + c_2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αντιστοίχως, *όχι απαραιτήτως ίσες*.

Αόριστα ολοκληρώματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, οπότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$. Είναι πολύ χρήσιμη η εξής επέκταση του συμβόλου του ολοκληρώματος:*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Επίσης, αν απλώς ορίζεται η f στον a, τότε την θεωρούμε, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, a] = \{a\}$ και ορίζουμε:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Άρα επιτρέπεται να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στην κάτω μεριά και το μικρότερο άκρο στην πάνω μεριά του συμβόλου του ολοκληρώματος. Δηλαδή, έχουμε ορίσει το σύμβολο $\int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε a, b με την προϋπόθεση ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, αν $a < b$, ολοκληρώσιμη στο $[b, a]$, αν $b < a$, και, απλώς, ορισμένη στον a, αν $a = b$.
Η γνωστή ιδιότητα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

η οποία ισχύει όταν $a < c < b$, επεκτείνεται για όλες τις περιπτώσεις σχετικής διάταξης των a, b, c, αρκεί η f να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από τον μικρότερο μέχρι τον μεγαλύτερο από τους τρεις αυτούς αριθμούς. Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, διακρίνοντας περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν $b < c < a$, η ισότητα γράφεται $-\int_b^a f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$ ή, ισοδύναμα, $\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$ και αυτή είναι η ήδη γνωστή μας ισότητα. Επίσης, αν $a = b < c$, η ισότητα γράφεται $0 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$ η οποία είναι, προφανώς, σωστή. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια.

Μια ακόμη γνωστή ιδιότητα που επεκτείνεται είναι η εξής. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, αν $a < b$, και στο $[b, a]$, αν $b < a$, και αν ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε x στο ίδιο διάστημα, τότε

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx\big| \le M|b - a|.$$

Πράγματι, αν $a < b$, οπότε $|b - a| = b - a$, τότε το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό. Αν $b < a$, τότε $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big| = \big|-\int_b^a f(x)\,dx\big| = \big|\int_b^a f(x)\,dx\big| \le M(a - b) = M|b - a|$. Τέλος, αν $a = b$, τότε η ανισότητα $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big| \le M|b - a|$ ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $a \in I$, κατόπιν θεωρούμε έναν μεταβλητό $x \in I$ και για κάθε τέτοιον x γράφουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^x f(t)\,dt$. Αυτό είναι ένας αριθμός η τιμή του οποίου εξαρτάται από την τιμή του x. Τέλος, παίρνουμε και έναν αυθαίρετο αριθμό c, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I.$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση ονομάζεται ***αόριστο ολοκλήρωμα*** *της f στο διάστημα I και ο a ονομάζεται* ***αρχικό σημείο*** *του αόριστου ολοκληρώματος.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.2. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι συνάρτηση συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $a \in I$, αριθμός c και η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$ για κάθε $x \in I$.
Έστω $\xi \in I$ όχι δεξιό άκρο του I. Θεωρούμε $b \in I$ με $b > \xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[\xi, b]$ είναι φραγμένη στο $[\xi, b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [\xi, b]$. Τότε, για κάθε $x \in [\xi, b]$ ισχύει

$$|F(x) - F(\xi)| = \big|\big(\int_a^x f(t)\,dt + c\big) - \big(\int_a^\xi f(t)\,dt + c\big)\big| = \big|\int_\xi^x f(t)\,dt\big| \le M(x - \xi). \tag{7.1}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[\xi, x] \subseteq [\xi, b]$, οπότε ισχύει $|f(t)| \le M$ για κάθε $t \in [\xi, x]$.
Από την (7.1) συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi+}(F(x) - F(\xi)) = 0$, οπότε $\lim_{x\to\xi+} F(x) = F(\xi)$.
Έστω $\xi \in I$ όχι αριστερό άκρο του I. Τα υπόλοιπα είναι παραλλαγή της προηγούμενης παραγράφου. Θεωρούμε $b \in I$ με $b < \xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[b, \xi]$ είναι φραγμένη στο $[b, \xi]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [b, \xi]$. Για κάθε $x \in [b, \xi]$ ισχύει

$$|F(x) - F(\xi)| = \big|\big(\int_a^x f(t)\,dt + c\big) - \big(\int_a^\xi f(t)\,dt + c\big)\big| = \big|\int_x^\xi f(t)\,dt\big| \le M(\xi - x). \tag{7.2}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[x, \xi] \subseteq [b, \xi]$, οπότε ισχύει $|f(t)| \le M$ για κάθε $t \in [x, \xi]$.
Από την (7.2) συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi-}(F(x) - F(\xi)) = 0$, οπότε $\lim_{x\to\xi-} F(x) = F(\xi)$.
Άρα η F είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in I$. ☐

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό σημείο $a \in I$ με ένα άλλο $a' \in I$ σε ένα αόριστο ολοκλήρωμα, κάνουμε το εξής απλό:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c = \int_{a'}^x f(t)\,dt + \int_a^{a'} f(t)\,dt + c = \int_{a'}^x f(t)\,dt + c',$$

όπου $c' = \int_a^{a'} f(t)\,dt + c$. Δηλαδή, η αντικατάσταση ενός αρχικού σημείου a με ένα άλλο a' μετατρέπει, απλώς, τον αριθμό c σε έναν άλλον c'. Γι αυτό όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα επιλέγουμε κατάλληλο αρχικό σημείο a τέτοιο ώστε είτε να είναι βολικότερες οι πράξεις για τον υπολογισμό του $\int_a^x f(t)\,dt$ είτε να είναι πιο απλός ο τύπος που θα προκύψει.

Παράδειγμα 7.1.6. Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της x στο $\mathbb{R}$, παίρνουμε $a = 0$ και έχουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$. Ένα οποιοδήποτε άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της x είναι το $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.
Αν επιλέξουμε κάποιον άλλο a ως αρχικό σημείο, για παράδειγμα τον $a = 4$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_4^x t\,dt$ είναι το $\int_4^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 8$ και ο νέος σταθερός αριθμός είναι ο $c = -8$.

Προσέξτε την ομοιότητα ανάμεσα στις προτάσεις 7.1 και 7.3.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.3. *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μια από τις F_1, F_2 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I, τότε και η άλλη είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I. Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αόριστα ολοκληρώματα της f στο I, τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Έστω $F_2(x) - F_1(x) = c$ για κάθε $x \in I$ και έστω $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + c_1$ για κάθε $x \in I$, όπου $a_1 \in I$. Συνεπάγεται

$$F_2(x) = F_1(x) + c = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + (c_1 + c) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2$$

για κάθε $x \in I$, όπου $a_2 = a_1$, $c_2 = c_1 + c$.
Αντιστρόφως, έστω $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + c_1$ και $F_2(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2$ για κάθε $x \in I$, όπου $a_1, a_2 \in I$. Συνεπάγεται

$$F_2(x) - F_1(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2 - \int_{a_1}^x f(t)\,dt - c_1 = \int_{a_2}^{a_1} f(t)\,dt + c_2 - c_1$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. $\square$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.
Έστω F ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, και μόνο από αυτές.
Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρα* αόριστα ολοκληρώματα στο διάστημα I και αυτά είναι ακριβώς οι εξής συναρτήσεις: ένα οποιοδήποτε από τα αόριστα ολοκληρώματα συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Αν επιλέξουμε έναν οποιονδήποτε $a \in I$, τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $\int_a^x f(t)\,dt + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Παραδοσιακά, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\int^x f(t)\,dt$ και $\int f(x)\,dx$ για να συμβολίσουμε όλα μαζί τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I. Δηλαδή, γράφουμε*

$$\int^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + c \quad \text{ή} \quad \int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \text{για } x \in I$$

και διαβάζουμε: το $\int^x f(t)\,dt$ ή $\int f(x)\,dx$ είναι κάθε συνάρτηση $\int_a^x f(t)\,dt + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Ελπίζουμε να μη δημιουργηθεί σύγχυση!

Πάντοτε γράφουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x: είτε στο σύμβολο $\int^x f(t)\,dt$ είτε στο σύμβολο $\int f(x)\,dx$. Στο σύμβολο $\int^x f(t)\,dt$, η "μεταβλητή ολοκλήρωσης" μπορεί να συμβολιστεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα: $\int^x f(u)\,du$, $\int^x f(s)\,ds$ κλπ.

Παράδειγμα 7.1.7. Γράφουμε $\int^x t\,dt = \int_0^x t\,dt + c = \frac{x^2}{2} + c$ ή, ισοδύναμα, $\int x\,dx = \int_0^x t\,dt + c = \frac{x^2}{2} + c$. Διαβάζουμε: το $\int^x t\,dt$ ή $\int x\,dx$ είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της x στο $\mathbb{R}$, δηλαδή οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παρατηρήστε ότι στα παραδείγματα 7.1.4 και 7.1.7 είδαμε ότι το σύνολο των αντιπαραγώγων της συνάρτησης x στο $\mathbb{R}$ είναι ίδιο με το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της. Στην επόμενη ενότητα αυτό θα γενικευθεί.

Πριν προχωρήσουμε ας δούμε δυο απλές ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων. Η πρώτη είναι:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Η ισότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της αντίστοιχης ισότητας ανάμεσα σε ολοκληρώματα με συγκεκριμένα άκρα. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$. Επομένως,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c_1, \qquad \int g(x)\, dx = G(x) + c_2,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις. Άρα

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx &= F(x) + c_1 + G(x) + c_2 \\ &= F(x) + G(x) + (c_1 + c_2) \\ &= \int_a^x (f(t) + g(t))\, dt + (c_1 + c_2). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Όταν οι c_1, c_2 διατρέχουν όλους τους αριθμούς, τότε και ο $c_1 + c_2$ διατρέχει όλους τους αριθμούς. Δηλαδή, η $c_1 + c_2$ είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Επομένως, επειδή το $\int_a^x (f(t) + g(t))\, dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $f + g$, συνεπάγεται

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^x (f(t) + g(t))\, dt + (c_1 + c_2). \tag{7.4}$$

Από τις (7.3) και (7.4) συνεπάγεται $\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx = \int (f(x) + g(x))\, dx$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι:

$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx \qquad \text{αν } \lambda \neq 0.$$

Θεωρούμε, όπως πριν, το ίδιο αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, οπότε

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

όπου ο c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Τώρα

$$\lambda \int f(x)\, dx = \lambda F(x) + \lambda c = \int_a^x \lambda f(t)\, dt + \lambda c. \tag{7.5}$$

Όταν ο c διατρέχει όλους τους αριθμούς, τότε (ακριβώς επειδή $\lambda \neq 0$) και ο λc διατρέχει όλους τους αριθμούς. Δηλαδή, ο λc είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Οπότε, επειδή το $\int_a^x \lambda f(t)\, dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της λf, έχουμε ότι

$$\int \lambda f(x)\, dx = \int_a^x \lambda f(t)\, dt + \lambda c. \tag{7.6}$$

Από τις (7.5) και (7.6) συνεπάγεται $\lambda \int f(x)\, dx = \int \lambda f(x)\, dx$.

Όπως είδαμε παραπάνω, όταν προσθέτουμε δύο αόριστα ολοκληρώματα $\int f(x)\, dx$, $\int g(x)\, dx$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το άθροισμα των δυο αυθαίρετων σταθερών συναρτήσεων που εμφανίζονται με *μία* αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Ομοίως, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)\, dx$ με ένα αριθμό $\neq 0$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το γινόμενο της αυθαίρετης σταθερής συνάρτησης και του πολλαπλασιαστή αριθμού με *μία* αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα 7.1.8. Γράφουμε $\int (x + x^2)\, dx = \int x\, dx + \int x^2\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$ και αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x + x^2)\, dx = \int x\, dx + \int x^2\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1 + \frac{x^3}{3} + c_2$.

Παράδειγμα 7.1.9. Γράφουμε $\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + c$ και αποφεύγουμε να γράψουμε $\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + 7c$.

Παράδειγμα 7.1.10. Γράφουμε $\int (x + g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \int g(x)\,dx$ και αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x + g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + c + \int g(x)\,dx$ διότι η αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση c μπορεί να "απορροφηθεί" στο $\int g(x)\,dx$ το οποίο περιέχει αφ' εαυτού μια αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα 7.1.11. Προσέξτε! Γράφουμε $\int x\,dx - \int x\,dx = c$ και όχι $= 0$. Διότι είναι $\int x\,dx - \int x\,dx = \int (x - x)\,dx = \int 0\,dx = c$ ή, με άλλο τρόπο, $\int x\,dx - \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{x^2}{2} - c_2 = c_1 - c_2 = c$.

Παράδειγμα 7.1.12. Προσέξτε! Είναι $0\int f(x)\,dx \neq \int 0f(x)\,dx$. Πράγματι: $0\int f(x)\,dx = 0$ ενώ $\int 0f(x)\,dx = \int 0\,dx = c$.

Ασκήσεις.

7.1.1. Βρείτε όλες τις αντιπαραγώγους της $2x+3x^2$ στο $\mathbb{R}$. Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $2x+3x^2$ στο $\mathbb{R}$ ώστε η τιμή της στον 1 να είναι -2. Πόσες τέτοιες αντιπαράγωγοι υπάρχουν;

Γενικότερα, έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία έχει αντιπαράγωγο στο I. Έστω $a \in I$ και αριθμός κ. Πόσες αντιπαράγωγοι της f στο I υπάρχουν οι οποίες έχουν τιμή κ στον a;

7.1.2. Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε να ισχύει $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και ώστε $F(1) = 1$. Ποιά είναι η απάντηση αν αντί του $(0, +\infty)$ έχουμε την ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε να ισχύει $F'(\log x) = 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $F'(\log x) = x$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και ώστε $F(1) = 1$.

7.1.3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ και $\begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Παρατηρήστε ότι και οι δυο συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στον 0 και αποδείξτε ότι η πρώτη δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$ ενώ η δεύτερη *έχει* αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.

7.1.4. Βρείτε όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1-x$ στο $\mathbb{R}$. Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - x$ στο $\mathbb{R}$ ώστε η τιμή του στον 2 να είναι -1. Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;

Γενικότερα, έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και αριθμός κ. Πόσα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I υπάρχουν τα οποία έχουν τιμή κ στον a;

7.1.5. Υποθέστε ότι $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + x^2 - 3$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$;

7.1.6. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_\xi^b f(x)\,dx$.

7.1.7. Θεωρήστε την $f(x) = x-[x]-\frac{1}{2}$. Η συνάρτηση αυτή εμφανίστηκε και στην άσκηση 6.4.10.

Αποδείξτε ότι η f είναι περιοδική στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1.

Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0, 1)$. Εκφράστε με απλό τρόπο τον τύπο της F στο $\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $[x]$.

Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_0^x (F(t) + \frac{1}{12})\,dt$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0, 1)$.

Σε ποιά διαστήματα είναι η f συνεχής; Σε ποιά διαστήματα είναι η F αντιπαράγωγος της f;

Σε κάθε σημείο ασυνέχειας της f να συγκρίνετε καθένα από τα δυο πλευρικά όρια της f με την αντίστοιχη πλευρική παράγωγο της F. Τί παρατηρείτε;

7.1.8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau > 0$ και ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, \tau]$. Σύμφωνα με την άσκηση 6.4.14[β], η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός μ ώστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_0^x (f(t) - \mu)\, dt$ να είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο τ. Ποιός είναι ο μ; Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 7.1.7.

7.1.9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και έστω ότι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της f είναι περιοδική ή άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ισχύει τότε ότι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της f είναι περιοδικές ή άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, αντιστοίχως;

7.2 Το θεμελιώδες θεώρημα.

Το θεμελιώδες θεώρημα είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα του απειροστικού λογισμού. Παρέχει την καθόλου προφανή σύνδεση ανάμεσα σε δυο φαινομενικά ασύνδετες έννοιες: την παράγωγο και το ολοκλήρωμα. Οι συνέπειες για τον χειρισμό αλλά και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων είναι σημαντικές.

ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ για κάθε $x \in I$. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιον $x \in I$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στον x και ισχύει $F'(x) = f(x)$. Δηλαδή,*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x) \qquad \text{αν } f \text{ συνεχής στον } x.$$

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στον x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $t \in I$ με $|t - x| < \delta$.
Έστω, λοιπόν, οποιοσδήποτε $y \in I$ με $0 < |y - x| < \delta$. Τότε για κάθε $t \in [x, y]$ ή $t \in [y, x]$ ισχύει $|t - x| < \delta$, οπότε

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για } t \text{ ανάμεσα στα } x \text{ και } y.$$

Άρα

$$\Big| \int_x^y (f(t) - f(x))\, dt \Big| \leq \frac{\epsilon}{2} |y - x| < \epsilon |y - x|.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\Big| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \Big| &= \frac{1}{|y-x|} \big| F(y) - F(x) - (y - x) f(x) \big| \\
&= \frac{1}{|y-x|} \Big| \int_a^y f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt - f(x)(y - x) \Big| \\
&= \frac{1}{|y-x|} \Big| \int_x^y f(t)\, dt - f(x)(y - x) \Big| = \frac{1}{|y-x|} \Big| \int_x^y f(t)\, dt - \int_x^y f(x)\, dt \Big| \\
&= \frac{1}{|y-x|} \Big| \int_x^y (f(t) - f(x))\, dt \Big| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in I$ με $0 < |y - x| < \delta$ να ισχύει $\Big| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \Big| < \epsilon$. Άρα $\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$, οπότε $F'(x) = f(x)$. $\square$

Σχετικά με το τελευταίο μέρος του θεμελιώδους θεωρήματος, παρατηρήστε ότι, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε είναι, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και, επομένως, ορίζονται τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I.

Οι επόμενες τρεις προτάσεις είναι απλά πορίσματα του θεμελιώδους θεωρήματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.4. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I και αντιστρόφως. Με άλλα λόγια, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της f στο I.*

Απόδειξη. Βάσει του θεμελιώδους θεωρήματος, το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I.
Σύμφωνα με την πρόταση 7.3, επειδή η F είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.
Αλλά και, σύμφωνα με την πρόταση 7.1, επειδή η F είναι αντιπαράγωγος της f στο I, οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι (πάλι) οι συναρτήσεις $F+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. □

Η πρόταση 7.5 έχει σπουδαία πρακτική αξία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.5. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και $F : I \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο I.*
[α] *Τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Δηλαδή*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I.$$

[β] *Το ολοκλήρωμα της f σε οποιοδήποτε $[a, b] \subseteq I$ είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της F στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{για κάθε } a, b \text{ στο } I.$$

Απόδειξη. [α] Οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι οι $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I, και, σύμφωνα με την πρόταση 7.4, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της στο I.
[β] Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Άρα η $\int_a^x f(t)\,dt - F(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. Άρα

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = \int_a^a f(t)\,dt - F(a) = -F(a)$$

για κάθε $x \in I$ και, επομένως, $\int_a^b f(t)\,dt - F(b) = -F(a)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.6. [1] *Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο I. Τότε,*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{για κάθε } a, b \text{ στο } I.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την πρόταση 7.5[β] στην $f = F'$, παρατηρώντας ότι η F είναι, προφανώς, αντιπαράγωγος της f στο I. □

Μετά από όλα αυτά, παρατηρήστε τον “αντίστροφο χαρακτήρα” των “πράξεων” της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, όπως αυτός εκφράζεται με τους τύπους

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x), \qquad \int \frac{dF}{dx}\,dx = F(x) + c.$$

Ο πρώτος τύπος ισχύει σε διάστημα στο οποίο η f είναι συνεχής και εκφράζει το θεμελιώδες θεώρημα: *η παράγωγος κάθε αόριστου ολοκληρώματος συνεχούς συνάρτησης είναι η ίδια η συνάρτηση.* Ο δεύτερος τύπος ισχύει σε διάστημα στο οποίο η $f = \frac{dF}{dx}$ είναι συνεχής και, επειδή η F είναι αντιπαράγωγος της f, λέει ότι: *το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων μιας συνάρτησης (της f) ταυτίζεται με το σύνολο των αντιπαραγώγων της ίδιας συνάρτησης.*

[1] Για την Πρόταση 7.6 με τις ασθενέστερες δυνατές υποθέσεις δείτε την άσκηση 7.2.19.

Τα βασικά παραδείγματα.

Στα επόμενα παραδείγματα εκμεταλλευόμαστε το ότι ήδη γνωρίζουμε μια αντιπαράγωγο των συναρτήσεων που εμφανίζονται σ' αυτά και εφαρμόζουμε την πρόταση 7.5.

Παράδειγμα 7.2.1. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$:

$$\int 1\,dx = x + c, \qquad \int_a^b 1\,dx = b - a.$$

Παράδειγμα 7.2.2. Για κάθε $p \neq -1$,

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \qquad \int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει (i) στο $\mathbb{R}$, αν $p \in \mathbb{N}$, (ii) στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{Z}$ και $p \leq -2$, (iii) στο $[0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $p > 0$, και (iv) στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $p < 0$. Η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε a, b τα οποία ανήκουν σε ένα (και το ίδιο) από τα προηγούμενα διαστήματα. Για παράδειγμα, αν $p \in \mathbb{Z}$ και $p \leq -2$, τότε η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε $a, b < 0$ και για κάθε $a, b > 0$, αλλά όχι όταν $a < 0 < b$ ή $b < 0 < a$ (και, φυσικά, ούτε όταν κάποιος από τους a, b είναι 0).

Παράδειγμα 7.2.3. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και η δεύτερη για κάθε $a, b < 0$ και κάθε $a, b > 0$:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log|b| - \log|a| = \log\frac{b}{a}.$$

Παρατηρήστε ότι, επειδή οι a, b είναι ομόσημοι, έχουμε $\frac{b}{a} > 0$ και, επομένως, $\log|b| - \log|a| = \log\frac{|b|}{|a|} = \log|\frac{b}{a}| = \log\frac{b}{a}$.

Παράδειγμα 7.2.4. Αν $\rho > 0$ και $\rho \neq 1$, η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$:

$$\int \rho^x\,dx = \frac{\rho^x}{\log\rho} + c, \qquad \int_a^b \rho^x\,dx = \frac{\rho^b - \rho^a}{\log\rho}.$$

Παράδειγμα 7.2.5. Οι πρώτες δυο ισότητες ισχύουν στο $\mathbb{R}$ και οι επόμενες δυο ισχύουν για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c,$$

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Παράδειγμα 7.2.6. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$ ενώ η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε a, b στο ίδιο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ και για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan b - \tan a.$$

Παράδειγμα 7.2.7. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(k\pi, \pi + k\pi)$ για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$ και η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε a, b στο ίδιο $(k\pi, \pi + k\pi)$ και για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = -\cot x + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = \cot a - \cot b.$$

Παράδειγμα 7.2.8. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-1, 1)$ και η δεύτερη για κάθε a, b στο $(-1, 1)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin b - \arcsin a.$$

Παράδειγμα 7.2.9. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan b - \arctan a.$$

Τώρα μπορούμε να δούμε και τη συσχέτιση ανάμεσα στα θεωρήματα μέσης τιμής του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

Θεωρούμε στο πρώτο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού την ειδική περίπτωση όπου, εκτός από την f, και η g είναι συνεχής στο $[a,b]$. Το αποτέλεσμα του θεωρήματος είναι ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Τώρα θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\,dt$ και $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ και η σχέση $\int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt$ γράφεται

$$g(\xi)\int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(\xi)g(\xi)\int_a^b g(t)\,dt$$

και αυτή γράφεται

$$G'(\xi)(F(b)-F(a))=F'(\xi)(G(b)-G(a)).$$

Αυτή είναι η σχέση στο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy.

Ασκήσεις.

7.2.1. Σκεφτείτε ότι το $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ ισοδυναμεί με $F'(x)=f(x)$ αν η f είναι συνεχής στο κατάλληλο διάστημα. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int \cos(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+c$ και $\int\sin(ax)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+c$ στο $\mathbb{R}$.
(ii) $\int\log x\,dx=x\log x-x+c$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.
(iii) $\int\frac{1}{x\log x}\,dx=\log(\log x)+c$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.
(iv) $\int\frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,dx=\log(\log(\log x))+c$ στο διάστημα $(e,+\infty)$.
(v) $\int x^ne^{-x}\,dx=n!e^{-x}\big(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^n}{n!}\big)+c$ στο $\mathbb{R}$.
(vi) $\int x^ne^{x}\,dx=(-1)^{n-1}n!e^{x}\big(e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\big)+c$ στο $\mathbb{R}$.

7.2.2. Βρείτε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ και αριθμό a ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;
Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt=e^x$ για κάθε x; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t)\,dt=e^x-1$. Πόσες λύσεις υπάρχουν;

7.2.3. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο I. Αν ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι $\int_a^b\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log\frac{f(b)}{f(a)}$ για κάθε $a,b\in I$. Συζητήστε ιδιαίτερα τον ρόλο της υπόθεσης ότι ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in I$ σε σχέση με το πρόσημο της f στο I.

7.2.4. Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και $a,b\in I$.
Αν η $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι σταθερή στο I, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I.
Αν ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^b f(t)\,dt$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I.

7.2.5. Βρείτε τις συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x>0$.
Βρείτε τις συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)=1-x\int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x>0$.

7.2.6. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Επίσης, έστω $g,h:A\to I$ και η $F:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)}f(t)\,dt$ για κάθε $x\in A$.
Αν οι g,h είναι συνεχείς στον $x\in A$, αποδείξτε ότι η F είναι κι αυτή συνεχής στον x.
Αν οι g,h είναι παραγωγίσιμες στον $x\in A$ και η f είναι συνεχής στους $g(x)$, $h(x)$, αποδείξτε ότι

η F είναι παραγωγίσιμη στον x και $F'(x) = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x))$.

Βρείτε τα πεδία ορισμού των $\int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt$, $\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$, $\int_{2-x}^{2+x} \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$, $\int_{x+\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{t}{t-1}\,dt$ και τις παραγώγους τους.

Βρείτε $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = 1 - 2^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.2.7. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t-x}(2t+1)\,dt$.
Βρείτε $a > 0$ και b, c, d ώστε $\lim_{x\to0+} \frac{1}{e^x-b-cx-dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 1$.

7.2.8. Αν $a \neq \pm b$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt = 0$. Ποιά είναι η τιμή του ορίου στις περιπτώσεις $a = \pm b$;

7.2.9. [α] Δώστε δεύτερη απόδειξη του λήμματος 6.5[β] με βάση το θεμελιώδες θεώρημα.
[β] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b (f(t))^2\,dt = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της.
[γ] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \geq 0$ για κάθε $x', x'' \in [a,b]$ με $x' < x''$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

7.2.10. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $(f(x))^2 = 2\int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \geq 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

7.2.11. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ ώστε η $f' : [0,a] \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο $[0,a]$ και $f(0) = 0$.
Θεωρήστε την $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} (f(x))^2/x, & \text{αν } 0 < x \leq a \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0,a]$.
Να συγκρίνετε τις παραγώγους των $g(x)$ και $\int_0^x (f'(t))^2\,dt$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $(f(x))^2 \leq x\int_0^x (f'(t))^2\,dt$ για κάθε $x \in [0,a]$.
Αν $(f(a))^2 = a\int_0^a (f'(t))^2\,dt$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο $(0,a]$.
Αν $(f(a))^2 = a\int_0^a (f'(t))^2\,dt$ και $f'(0) = 2$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 2x$ για κάθε $x \in [0,a]$.

7.2.12. [2] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \in I$.
Αν υπάρχει το $\lim_{y\to x+} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $F'_+(x) = \lim_{y\to x+} f(y)$. Ειδικώτερα, αν η f είναι δεξιά συνεχής στον x, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στον x από τα δεξιά του και $F'_+(x) = f(x)$.
Αν υπάρχει το $\lim_{y\to x-} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $F'_-(x) = \lim_{y\to x-} f(y)$. Ειδικώτερα, αν η f είναι αριστερά συνεχής στον x, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στον x από τα αριστερά του και $F'_-(x) = f(x)$.

7.2.13. Έστω $p, r : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο διάστημα I. Λέμε ότι η συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της **διαφορικής εξίσωσης**

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{7.7}$$

στο διάστημα I αν ισχύει $y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$ για κάθε $x \in I$.
Αν $x_0 \in I$ και αν $\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x p(t)\,dt}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι οι λύσεις της (7.7) στο I είναι οι συναρτήσεις

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\Big(\int_{x_0}^x \mu(t)r(t)\,dt + c\Big) \qquad \text{για } x \in I$$

και μόνο αυτές.

[2]Μια χρήσιμη επέκταση του θεμελιώδους θεωρήματος.

7.2.14. Συνέχεια της άσκησης 5.3.19. Έστω $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο διάστημα I. Λέμε ότι η συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της **ομογενούς διαφορικής εξίσωσης**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{7.8}$$

στο διάστημα I αν ισχύει $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.

Στα επόμενα θεωρήστε γνωστό το εξής θεώρημα. *Για κάθε* $x_0 \in I$ *και για κάθε δυο αριθμούς* $y_0, y_0{}'$ *υπάρχει μοναδική λύση* $y(x)$ *της* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ *στο* I *ώστε* $y(x_0) = y_0$ *και* $y'(x_0) = y_0{}'$.

Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δυο οποιεσδήποτε λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (7.8) στο I.

[α] Αποδείξτε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ είναι λύση της (7.8) στο I. Με άλλα λόγια, το σύνολο των λύσεων της (7.8) στο I είναι *γραμμικός χώρος*.

[β] Δείτε την άσκηση 7.2.13 και αποδείξτε ότι η $W(y_1, y_2)(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' + p(x)y = 0$ στο I.

[γ] Αποδείξτε ότι είτε (i) ισχύει $W(y_1, y_2)(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ είτε (ii) ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Στην περίπτωση (i) αποδείξτε ότι μια από τις δυο αυτές λύσεις είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I. Στην περίπτωση (ii) αποδείξτε ότι καμιά από τις δυο αυτές λύσεις δεν είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I, δηλαδή ότι οι δυο λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ στο I είναι *γραμμικά ανεξάρτητες*. Σύμφωνα με την άσκηση 5.3.19, στην περίπτωση (ii), ανάμεσα σε δυο διαδοχικές ρίζες της μιας λύσης βρίσκεται ακριβώς μια ρίζα της άλλης λύσης και αντιστρόφως.

[δ] Έστω ότι ισχύει η περίπτωση (ii) στο [γ]. Θεωρήστε οποιαδήποτε λύση $y(x)$ της (7.8) στο I και οποιονδήποτε $x_0 \in I$. Αποδείξτε ότι το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) &= y(x_0) \\ \lambda_1 y_1{}'(x_0) + \lambda_2 y_2{}'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση ως προς τους λ_1 και λ_2. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $W(y, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = 0$ για κάθε $x \in I$ και ότι $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ για κάθε $x \in I$. Άρα οι λύσεις της (7.8) στο I είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ και μόνο αυτοί. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ *παράγουν* τον γραμμικό χώρο των λύσεων της (7.8) στο I. Και, επειδή, οι δυο αυτές λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αποτελούν *βάση* του χώρου των λύσεων. Δηλαδή, ο χώρος των λύσεων έχει γραμμική διάσταση ίση με 2.

[ε] Έστω η ειδική περίπτωση $y'' + ky' + ly = 0$, όπου $p(x) = k$ και $q(x) = l$ είναι σταθερές συναρτήσεις.

Αν η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δυο (διαφορετικές) λύσεις, τις κ_1 και κ_2, αποδείξτε ότι οι $y_1(x) = e^{\kappa_1 x}$ και $y_2(x) = e^{\kappa_2 x}$ είναι λύσεις της (7.8) στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε x.

Αν η $t^2 + kt + l = 0$ έχει μοναδική λύση, την κ, αποδείξτε ότι οι $y_1(x) = e^{\kappa x}$ και $y_2(x) = xe^{\kappa x}$ είναι λύσεις της (7.8) στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε x.

Αν η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, τις $\kappa + i\lambda$ και $\kappa - i\lambda$ με $\lambda > 0$, αποδείξτε ότι οι $y_1(x) = e^{\kappa x}\cos(\lambda x)$ και $y_2(x) = e^{\kappa x}\sin(\lambda x)$ είναι λύσεις της (7.8) στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε x.

Σε κάθε περίπτωση, ποιές είναι όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y'' + ky' + ly = 0$ στο $\mathbb{R}$;

Έστω $p, q, r : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο διάστημα I. Θεωρούμε την **μη-ομογενή διαφορική εξίσωση**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{7.9}$$

στο διάστημα I και έστω $y_s(x)$ μια οποιαδήποτε λύση της (7.9) στο I.

[στ] Αποδείξτε ότι η $y(x)$ είναι λύση της (7.9) στο I αν και μόνο αν

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) \qquad \text{για } \ x \in I,$$

όπου $y_h(x)$ είναι λύση της (7.8) στο I.

[ζ] Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δυο λύσεις της (7.8) στο I ώστε να ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε, βάσει του [δ], ότι η $y(x)$ είναι λύση της (7.9) στο I αν και μόνο αν

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + y_s(x) \qquad \text{για } x \in I.$$

[η] Με τις υποθέσεις του [ζ], θεωρούμε την συνάρτηση $y_s : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$y_s(x) = \lambda_1(x) y_1(x) + \lambda_2(x) y_2(x) \qquad \text{για } x \in I,$$

όπου οι $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ είναι δυο άγνωστες συναρτήσεις στο I. Αποδείξτε ότι, αν οι $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} y_1(x){\lambda_1}'(x) + y_2(x){\lambda_2}'(x) &= 0 \\ {y_1}'(x){\lambda_1}'(x) + {y_2}'(x){\lambda_2}'(x) &= r(x) \end{aligned} \qquad \text{για } x \in I,$$

τότε η $y_s(x) = \lambda_1(x) y_1(x) + \lambda_2(x) y_2(x)$ είναι λύση της (7.9) στο I. Κατόπιν, αποδείξτε ότι οι

$$\lambda_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{r(t) y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, dt, \quad \lambda_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{r(t) y_1(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, dt \qquad \text{για } x \in I,$$

όπου $x_0 \in I$, ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα.
Ποιές είναι, λοιπόν, όλες οι λύσεις (7.9) στο I, εκφρασμένες συναρτήσει των $y_1(x)$ και $y_2(x)$;

[θ] Εφαρμόστε τα προηγούμενα ώστε, σε συνδυασμό με το [ε], να βρείτε όλες τις λύσεις της $y'' + ky' + ly = r(x)$.

7.2.15. [α] Αποδείξτε ότι:
(i) $\int_0^{2\pi} \sin(kx)\, dx = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.
(iii) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\, dx = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$.
(iv) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$.
(v) $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\, dx = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$.
(vi) $\int_0^{2\pi} (\sin(nx))^2\, dx = \int_0^{2\pi} (\cos(nx))^2\, dx = \pi$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

[β][3] Αν $f(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ για κάθε x, αποδείξτε ότι

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\, dx \quad \text{για } k \geq 0, \qquad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\, dx \quad \text{για } k \geq 1.$$

Αν $f(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ και $g(x) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{n} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx))$ για κάθε x, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx = a_0 c_0 + 2\sum_{k=1}^{n} (a_k c_k + b_k d_k).$$

Τέλος, αποδείξτε ότι[4]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, dt = a_0 c_0 + 2\sum_{k=1}^{n} \big((a_k c_k - b_k d_k)\cos(kx) + (a_k d_k + b_k c_k)\sin(kx) \big).$$

7.2.16. Συνέχεια της άσκησης 5.6.16.
Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \int_{-1}^{x} g(t)\, dt$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι σταθερή 0 στο $(-\infty, -1]$, σταθερή 1 στο $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.
Έστω $\delta > 0$ και η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\phi(x) = f(3 + \frac{4x}{\delta}) f(3 - \frac{4x}{\delta})$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η ϕ είναι άρτια, άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, σταθερή 0 στα $(-\infty, -\delta]$ και $[\delta, +\infty)$, σταθερή 1 στο $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$ γνησίως αύξουσα στο $[-\delta, -\frac{\delta}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\delta}{2}, \delta]$.

7.2.17. Ορίζουμε μια ακολουθία πολυωνύμων[5] (P_n) επαγωγικά από τις σχέσεις: $P_0(x) = 1$ για

[3] Κάθε συνάρτηση με τύπο $f(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ ονομάζεται **τριγωνομετρικό πολυώνυμο**. Αν οι a_n, b_n δεν είναι και οι δυο 0, τότε ο n ονομάζεται **βαθμός** του τριγωνομετρικού πολυωνύμου. Είναι σαφές ότι κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι συνάρτηση περιοδική με περίοδο 2π.

[4] Γενικά, αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π και ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$, η συνάρτηση $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, dt$, ως συνάρτηση του x, ονομάζεται **συνέλιξη** των $f(x)$ και $g(x)$ και συμβολίζεται $(f * g)(x)$. Όπως βλέπουμε εδώ, η συνέλιξη τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

[5] Τα $P_n(x)$ ονομάζονται **πολυώνυμα του Bernoulli**.

κάθε x, $P_n{}'(x) = nP_{n-1}(x)$ για κάθε x και κάθε n, $\int_0^1 P_n(x)\,dx = 0$ για κάθε n.
Βρείτε τα πολυώνυμα $P_n(x)$ για $n = 1, 2, 3, 4$.
Αποδείξτε με επαγωγή ότι το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο x^n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(0) = P_n(1)$ για κάθε $n \geq 2$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1}$ για κάθε x και κάθε n.
Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^m k^n = \int_0^{m+1} P_n(x)\,dx = \frac{P_{n+1}(m+1)-P_{n+1}(0)}{n+1}$ και επαληθεύστε τους γνωστούς τύπους $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ και $\sum_{k=1}^m k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ για κάθε x και κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $P_{2n+1}(0) = 0$ και $P_{2n-1}(\frac{1}{2}) = 0$ για κάθε n.

7.2.18. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f_1{}'(x) = f(x)$ και $f_{n+1}{}'(x) = f_n(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f_n{}^{(n)}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.
[6] Αποδείξτε ότι το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a,b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n+1)$-άδα $(f(b), f_1(b), \ldots, f_n(b))$.
[7] Αποδείξτε ότι το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a,b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n+1)$-άδα $\big(f(a), \int_a^b f(t)\,dt, \ldots, \int_a^b (t-a)^{n-1} f(t)\,dt\big)$.

7.2.19. [8] Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αποδείξτε ότι ισχύει $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$ για κάθε $a, b \in I$.

7.2.20. Θυμόμαστε ότι, αν η f είναι κυρτή σε διάστημα I, τότε για κάθε εσωτερικό σημείο x του I ορίζονται οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x)$ και $f'_+(x)$, αυτές είναι αριθμοί και ισχύει $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. Αν η f είναι κοίλη στο I, ισχύουν τα ίδια με $\geq$ αντί $\leq$.
[α] Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Έστω $g : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in I$ ο αριθμός $g(x)$ να είναι ανάμεσα στους $f'_+(x)$ και $f'_-(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$.
Ειδικώτερα, $\int_a^b f'_-(x)\,dx = f(b) - f(a)$ και $\int_a^b f'_+(x)\,dx = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$.
[β] Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Αν η f έχει παράγωγο στο I, αποδείξτε βάσει της άσκησης 7.2.19 και όχι βάσει του [α], ότι ισχύει $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$.
[γ][9] Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I αν και μόνο αν είναι αόριστο ολοκλήρωμα μιας, αντιστοίχως, αύξουσας ή φθίνουσας συνάρτησης στο I.

[6] Αποτέλεσμα του Fekete.

[7] Αποτέλεσμα του Fejer.

[8] Μια ισχυροποίηση της πρότασης 7.6. Το συμπέρασμα είναι το ίδιο, αλλά οι υποθέσεις είναι ασθενέστερες: δεν απαιτείται να είναι η παράγωγος συνεχής στο διάστημα αλλά μόνο να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του διαστήματος. Η υπόθεση αυτή είναι η ασθενέστερη δυνατή, αφού το αποτέλεσμα αναφέρεται στα ολοκληρώματα της παραγώγου.

[9] Ένας σημαντικός χαρακτηρισμός των κυρτών και των κοίλων συναρτήσεων.

7.3 Τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.7. *Έστω διαστήματα I, J. Έστω $\phi : I \to J$ ώστε η $\phi' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο I και έστω $f : J \to \mathbb{R}$ συνεχής στο J. Τότε*

$$\int^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int^{\phi(x)} f(s)\,ds, \qquad \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy, \tag{7.10}$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει για κάθε $x \in I$ και η δεύτερη για κάθε $a, b \in I$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $(f \circ \phi)\phi'$ είναι συνεχής στο I.
Έστω $F : J \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο J. Τότε

$$\int^y f(s)\,ds = F(y) + c$$

για κάθε $y \in J$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$\int^{\phi(x)} f(s)\,ds = F(\phi(x)) + c \tag{7.11}$$

για κάθε $x \in I$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.
Τώρα, ισχύει

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η $F \circ \phi : I \to \mathbb{R}$ είναι αντιπαράγωγος της $f(\phi(x))\phi'(x)$ στο I. Άρα

$$\int^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(x)) + c \tag{7.12}$$

για κάθε $x \in I$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.
Από τις (7.11) και (7.12) συνεπάγεται $\int^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int^{\phi(x)} f(s)\,ds$ για κάθε $x \in I$.
Για τη δεύτερη ισότητα (7.10) παρατηρούμε ότι από τις (7.11) και (7.12) συνεπάγεται ότι οι συγκεκριμένες συναρτήσεις $\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$ και $\int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ διαφέρουν κατά μια σταθερή συνάρτηση στο διάστημα I. Επειδή η τιμή και των δυο συναρτήσεων είναι 0 για $x = a$, συνεπάγεται ότι οι δυο συναρτήσεις είναι ίσες στο I. Άρα ισχύει

$$\int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$$

για κάθε $x \in I$ και με $x = b$ παίρνουμε την δεύτερη ισότητα (7.10). □

Η πρώτη ισότητα (7.10) γράφεται και

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)}. \tag{7.13}$$

Παρατηρούμε, τώρα, σχετικά με την (7.13) το εξής. Το $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ συμβολίζει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(\phi(x))\phi'(x)$, τα οποία είναι, φυσικά, συναρτήσεις του $x \in I$. Το $\int f(y)\,dy$ συμβολίζει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(y)$, τα οποία είναι συναρτήσεις του $y \in J$. Η ισότητα (7.13) προκύπτει *μόνο όταν γίνει αντικατάσταση του y με το $\phi(x)$*.

Και στην (7.13) αλλά και στη δεύτερη ισότητα (7.10), συνήθως λέμε ότι η δεξιά μεριά τους προκύπτει από την αριστερή "με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \phi(x)$ και με αντικατάσταση του $\phi'(x)\,dx$ από το dy". Αυτή η αντικατάσταση αιτιολογείται από τις γνωστές μας σχέσεις $\frac{dy}{dx} = \phi'(x)$ και $dy = \phi'(x)\,dx$ ανάμεσα στα απειροστά των μεταβλητών x και y.

Παράδειγμα 7.3.1. Αν $n \in \mathbb{N}$, θα υπολογίσουμε το $\int (\sin x)^n \cos x\,dx$.
Με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sin x$ έχουμε

$$\int (\sin x)^n \cos x\,dx = \int y^n\,dy\big|_{y=\sin x} = \big(\tfrac{y^{n+1}}{n+1} + c\big)\big|_{y=\sin x} = \tfrac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} + c.$$

Παράδειγμα 7.3.2. Για να βρούμε το $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = x^2+1$, οπότε

$$\int \tfrac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \tfrac{1}{y}\,dy\big|_{y=x^2+1} = (\log|y|+c)\big|_{y=x^2+1} = \log(x^2+1)+c.$$

Παράδειγμα 7.3.3. Για τον υπολογισμό του $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx$ χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \log x$ και έχουμε

$$\int_a^b \tfrac{1}{x\log x}\,dx = \int_{\log a}^{\log b} \tfrac{1}{y}\,dy = \log\left|\tfrac{\log b}{\log a}\right|.$$

Πρέπει να προσέξουμε ώστε οι a, b να είναι τέτοιοι ώστε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\log x$, το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα με άκρα a, b, να περιέχεται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της $\frac{1}{y}$, δηλαδή είτε στο $(-\infty, 0)$ είτε στο $(0, +\infty)$. Αυτό το σύνολο τιμών της $\log x$ είναι το διάστημα με άκρα $\log a, \log b$. Άρα πρέπει να είναι είτε $\log a, \log b > 0$ ή, ισοδύναμα, $a, b > 1$, είτε $\log a, \log b < 0$ ή, ισοδύναμα, $0 < a, b < 1$. Ειδικώτερα, οι $\log a, \log b$ έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε

$$\int_a^b \tfrac{1}{x\log x}\,dx = \log\tfrac{\log b}{\log a}.$$

Ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.8. [10] *Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ ώστε οι $f', g' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχείς στο I. Τότε*

$$\int^x f(t)g'(t)\,dt = f(x)g(x) - \int^x f'(t)g(t)\,dt,$$
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει για κάθε $x \in I$ και η δεύτερη για κάθε $a, b \in I$.

Απόδειξη. Έστω $F : I \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της $f'g$ στο I. Τότε ισχύει

$$\int^x f'(t)g(t)\,dt = F(x) - c$$

για κάθε $x \in I$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Θεωρούμε την $G = fg - F : I \to \mathbb{R}$. Τότε ισχύει

$$G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - F'(x) = f(x)g'(x)$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η G είναι αντιπαράγωγος της fg' στο I. Άρα ισχύει

$$\int^x f(t)g'(t)\,dt = G(x) + c = f(x)g(x) - F(x) + c = f(x)g(x) - \int^x f'(t)g(t)\,dt$$

για κάθε $x \in I$.
Για τη δεύτερη ισότητα, βλέπουμε από την πρώτη ισότητα ότι οι συγκεκριμένες συναρτήσεις $\int_a^x f(t)g'(t)\,dt$ και $f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\,dt$ διαφέρουν κατά μια σταθερή συνάρτηση στο διάστημα I. Επειδή και οι δυο συναρτήσεις έχουν τιμή 0 για $x = a$, συνεπάγεται ότι είναι ίσες στο I. Άρα ισχύει

$$\int_a^x f(t)g'(t)\,dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\,dt$$

για κάθε $x \in I$ και με $x = b$ παίρνουμε την δεύτερη ισότητα. □

Η πρώτη ισότητα της πρότασης 7.8 γράφεται και

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

[10] Για την γενικότερη περίπτωση όπου οι f' και g' είναι, απλώς, ολοκληρώσιμες δείτε την άσκηση 7.3.25. Για μια ακόμη γενικότερη περίπτωση δείτε την άσκηση 7.3.26.

Παράδειγμα 7.3.4. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int \tfrac{dx}{dx}\log x\,dx = x\log x - \int x\tfrac{d\log x}{dx}\,dx = x\log x - \int x\tfrac{1}{x}\,dx\\ &= x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3.5. Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^x\,dx &= \int_0^2 x\tfrac{de^x}{dx}\,dx = 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 \tfrac{dx}{dx}e^x\,dx = 2e^2 - \int_0^2 e^x\,dx\\ &= 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3.6. Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x\,dx &= -\int_0^\pi x\tfrac{d\cos x}{dx}\,dx = -\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \int_0^\pi \tfrac{dx}{dx}\cos x\,dx\\ &= \pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3.7. Αν $a \neq 0$, με μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Προκύπτει ολοκλήρωμα παρόμοιο με το αρχικό, οπότε εφαρμόζουμε πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες και βρίσκουμε

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \tfrac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx.$$

Άρα

$$\big(1 + \tfrac{b^2}{a^2}\big)\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a^2}e^{ax}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση και, επομένως,

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\big(\tfrac{a}{a^2+b^2}\sin(bx) - \tfrac{b}{a^2+b^2}\cos(bx)\big) + c.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο χρήσιμος αυτός τύπος ισχύει και στην περίπτωση $a = 0, b \neq 0$, αφού τότε γράφεται $\int \sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(bx) + c$. Άρα ο τύπος ισχύει αν $a^2 + b^2 \neq 0$, δηλαδή αν δεν είναι και οι δυο a, b ίσοι με μηδέν.
Ομοίως, αποδεικνύεται και ο τύπος

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = e^{ax}\big(\tfrac{a}{a^2+b^2}\cos(bx) + \tfrac{b}{a^2+b^2}\sin(bx)\big) + c.$$

Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Τώρα θα περιγράψουμε την γενική μέθοδο υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\int R(x)\,dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,dx,$$

όπου $R(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ είναι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση.
Πρώτο βήμα. Αναγόμαστε στην περίπτωση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Αν $m < n$ εξ αρχής, παραλείπουμε το πρώτο βήμα. Αν $m \geq n$, διαιρούμε τα πολυώνυμα και βρίσκουμε πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ ώστε ο βαθμός του $Q(x)$ να είναι $< n$ και να ισχύει

$$a_m x^m + \cdots + a_0 = P(x)(b_n x^n + \cdots + b_0) + Q(x)$$

για κάθε x. Τότε

$$R(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Το $\int P(x)\,dx$ υπολογίζεται εύκολα, οπότε από τώρα και στο εξής θα υποθέσουμε ότι $m < n$.

Δεύτερο βήμα. Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες - εν γένει μιγαδικές - του παρονομαστή και είναι πολύ δύσκολο ή και αδύνατο αλλά σε αρκετές περιπτώσεις είναι εφικτό. Το γενικό συμπέρασμα, το οποίο δεν θα αποδείξουμε, είναι το εξής.

Κάθε πολυώνυμο $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων

$$b_nx^n + \cdots + b_0 = b_n(x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho \cdots ((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau,$$

όπου οι εκθέτες $\kappa, \dots, \lambda, \rho, \dots, \tau$ είναι φυσικοί αριθμοί με $\kappa + \cdots + \lambda + 2\rho + \cdots + 2\tau = n$ και οι αριθμοί $\nu, \dots, \delta$ είναι όλοι > 0.

Στην ανάλυση αυτή, η ύπαρξη των πρωτοβάθμιων όρων $x-\alpha, \dots, x-\gamma$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι $\alpha, \dots, \gamma$ είναι όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\kappa, \dots, \lambda$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, η ύπαρξη των δευτεροβάθμιων όρων $(x-\mu)^2+\nu^2, \dots, (x-\epsilon)^2+\delta^2$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι μιγαδικοί αριθμοί $\mu \pm i\nu, \dots, \epsilon \pm i\delta$ είναι όλες οι γνησίως μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\rho, \dots, \tau$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Προσέξτε ότι οι γνησίως μιγαδικές ρίζες αποτελούν ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Επισημαίνουμε ότι οι πραγματικές ρίζες $\alpha, \dots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά μας: είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $\alpha, \dots, \gamma$ καθώς και τα $\pm\infty$.

Τρίτο βήμα. Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε **απλούς λόγους**:

$$\begin{aligned} R(x) = \big(\tfrac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \tfrac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}\big) + \cdots + \big(\tfrac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \cdots + \tfrac{\Gamma_\lambda}{(x-\gamma)^\lambda}\big) \\ + \big(\tfrac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \tfrac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\big) + \cdots + \big(\tfrac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \tfrac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\big). \end{aligned}$$

Ο πρωτοβάθμιος παράγων $x-\alpha$ του παρονομαστή καθορίζει μια ομάδα λόγων με αριθμούς ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως κ (η πολλαπλότητα του α) ως παρονομαστές. Το ίδιο ισχύει και για τους άλλους πρωτοβάθμιους παράγοντες. Ο δευτεροβάθμιος παράγων $(x-\mu)^2+\nu^2$ καθορίζει μια ομάδα λόγων με πρωτοβάθμιους όρους ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως ρ (η πολλαπλότητα των $\mu \pm i\nu$) ως παρονομαστές. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους δευτεροβάθμιους παράγοντες. Οι αριθμοί $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$, δηλαδή όλοι οι συντελεστές των αριθμητών, είναι άγνωστοι και πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό επιτυγχάνεται με απαλοιφή των παρονομαστών, αν πολλαπλασιάσουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους, δηλαδή το $b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0$. Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δυο πολυωνύμων που προκύπτουν, βρίσκουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με τους n αγνώστους $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$ και το λύνουμε.

Τέταρτο βήμα. Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής τριών τύπων:

$$\int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx, \quad \int \tfrac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Εξετάζουμε καθέναν από τους τρεις τύπους ξεχωριστά.

(i) Για το $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx$, είτε στο διάστημα $(-\infty, \alpha)$ είτε στο $(\alpha, +\infty)$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x - \alpha$ και τότε $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \int \frac{1}{y^k}\,dy\big|_{y=x-\alpha}$.

Άρα $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \big(-\frac{1}{(k-1)y^{k-1}} + c\big)\big|_{y=x-\alpha} = -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + c$ αν $k \geq 2$.

Επίσης, $\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = (\log|y| + c)\big|_{y=x-\alpha} = \log|x-\alpha| + c$ αν $k = 1$.

Δηλαδή,

$$\int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + c, & \text{αν } k \geq 2 \\ \log|x-\alpha| + c, & \text{αν } k = 1 \end{cases}$$

(ii) Για το $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = (x-\mu)^2 + \nu^2$ και βρίσκουμε ότι είναι $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^k}\,dy\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}$.

Επομένως, $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \big(-\frac{1}{2(k-1)y^{k-1}}+c\big)\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = -\frac{1}{2(k-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}}+c$ αν $k\geq 2$.
Και $\int \frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2}\,dx = (\frac{1}{2}\log|y|+c)\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2)+c$ αν $k=1$.
Άρα

$$\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{2(k-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}}+c, & \text{αν } k\geq 2 \\ \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2)+c, & \text{αν } k=1 \end{cases}$$

(iii) Τέλος, για το $\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x-\mu}{\nu}$, οπότε συνεπάγεται $\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \frac{1}{\nu^{2k-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy\big|_{y=(x-\mu)/\nu}$.
Έτσι αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy \qquad \text{για } k\in\mathbb{N}.$$

Αυτό είναι πιο περίπλοκο από τα προηγούμενα και υπολογίζεται με *αναδρομικό τύπο*.
Κατ' αρχάς, αν $k=1$, τότε

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y + c.$$

Αν $k>1$, τότε, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες στην τέταρτη ισότητα παρακάτω,

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k}\,dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy - \int y\frac{y}{(y^2+1)^k}\,dy \\ &= I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στον αναδρομικό τύπο $I_k = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}$, ο οποίος ανάγει τον υπολογισμό του I_k στον υπολογισμό του I_{k-1} και, επαγωγικά, στο I_1. Συγκεκριμένα, για $k\geq 2$ είναι:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} \\ &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \frac{(2k-3)(2k-5)}{(2k-2)(2k-4)}I_{k-2} \\ &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \cdots + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\frac{y}{y^2+1} \\ &\quad + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\arctan y + c. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στο ότι κάθε ομάδα όρων $\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}$ στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $R(x)$ συνεισφέρει μια αντίστοιχη ομάδα

$$A_1\log|x-\alpha| - \frac{A_2}{x-\alpha} - \cdots - \frac{A_\kappa}{(k-1)(x-\alpha)^{\kappa-1}}$$

στο ολοκλήρωμα $\int R(x)\,dx$, κάθε ομάδα $\frac{M_1(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2}+\frac{M_2(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2}+\cdots+\frac{M_\rho(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ συνεισφέρει μια αντίστοιχη ομάδα

$$\frac{M_1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2) - \frac{M_2}{2((x-\mu)^2+\nu^2)} - \cdots - \frac{M_\rho}{2(\rho-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}$$

και, τέλος, κάθε ομάδα $\frac{N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2}+\frac{N_2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2}+\cdots+\frac{N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ συνεισφέρει μια αντίστοιχη ομάδα

$$N_1'\arctan\frac{x-\mu}{\nu} + \frac{N_2'(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{N_\rho'(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}},$$

όπου οι $N_1',\ldots,N_\rho'$ είναι διαφορετικοί από τους $N_1,\ldots,N_\rho$.

Παράδειγμα 7.3.8. Σε καθένα από τα $(-\infty,3)$ και $(3,+\infty)$ είναι

$$\int \frac{2}{x-3}\,dx = 2\log|x-3| + c.$$

Παράδειγμα 7.3.9. Σε καθένα από τα $(-\infty,-2)$ και $(-2,+\infty)$ είναι

$$\int \frac{-5}{(x+2)^3}\,dx = \frac{5}{2(x+2)^2} + c.$$

Παράδειγμα 7.3.10. Στο $(-\infty,+\infty)$ είναι

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\Big|_{y=(x+1)/3} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + c.$$

Παράδειγμα 7.3.11. Στο $(-\infty,+\infty)$ είναι

$$\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\log((x-2)^2+4) + c.$$

Παράδειγμα 7.3.12. Στο $(-\infty,+\infty)$ είναι

$$\int \frac{x-2}{((x-2)^2+4)^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^4}\,dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = -\frac{1}{6((x-2)^2+4)^3} + c.$$

Παράδειγμα 7.3.13. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx$.
Διαιρούμε το x^3-2x^2+2 με το x^2-3x+2 και βρίσκουμε

$$x^3-2x^2+2 = (x^2-3x+2)(x+1)+x.$$

Άρα

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ αναλύουμε τον λόγο $\frac{x}{x^2-3x+2}$ σε απλούς λόγους. Οι ρίζες του x^2-3x+2 είναι οι 1 και 2, οπότε είναι $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2},$$

όπου οι αριθμοί a, b πρέπει να προσδιοριστούν. Πολλαπλασιάζουμε τα δυο μέλη της τελευταίας ισότητας με το $(x-1)(x-2)$ και προκύπτει $x = a(x-2)+b(x-1)$ ή, ισοδύναμα,

$$x = (a+b)x + (-2a-b).$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιόβαθμων μονωνύμων των δυο μελών της τελευταίας ισότητας και βρίσκουμε

$$a+b=1 \quad \text{και} \quad -2a-b=0.$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $a=-1$, $b=2$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx = -\log|x-1| + 2\log|x-2| + c$$

και, τέλος,

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \log|x-1| + 2\log|x-2| + c$$

στα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,2)$ και $(2,+\infty)$.

Παράδειγμα 7.3.14. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$.
Παραγοντοποιούμε το x^3+x^2-x-1 ως εξής:

$$x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2.$$

Δηλαδή, το x^3+x^2-x-1 έχει απλή ρίζα τον 1 και διπλή ρίζα τον -1. Άρα

$$\tfrac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}=\tfrac{a}{x-1}+\tfrac{b}{x+1}+\tfrac{c}{(x+1)^2},$$

όπου πρέπει να υπολογίσουμε τους a,b,c. Συνεχίζουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία ισότητα με το $(x-1)(x+1)^2$ και προκύπτει μια ισότητα ανάμεσα σε δυο δευτεροβάθμια πολυώνυμα. Εξισώνουμε τους συντελεστές των όμοιων δυνάμεων του x και βρίσκουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων από το οποίο προκύπτει ότι $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{5}{4}$, $c=-\frac{3}{2}$. Άρα

$$\tfrac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}=\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{x-1}+\tfrac{5}{4}\tfrac{1}{x+1}-\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{(x+1)^2}.$$

Άρα

$$\int\tfrac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx=\tfrac{3}{4}\log|x-1|+\tfrac{5}{4}\log|x+1|+\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{x+1}+c$$

στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 7.3.15. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx$.

Παραγοντοποιούμε:

$$x^4-x^2-2x+2=(x-1)^2(x^2+2x+2)=(x-1)^2((x+1)^2+1).$$

Δηλαδή, το x^4-x^2-2x+2 έχει διπλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη πραγματική ρίζα. Άρα

$$\tfrac{x}{x^4-x^2-2x+2}=\tfrac{a}{x-1}+\tfrac{b}{(x-1)^2}+\tfrac{c(x+1)+d}{(x+1)^2+1}.$$

Όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, βρίσκουμε $a=\frac{1}{25}$, $b=\frac{1}{5}$, $c=-\frac{1}{25}$, $d=-\frac{7}{25}$. Άρα

$$\tfrac{x}{x^4-x^2-2x+2}=\tfrac{1}{25}\tfrac{1}{x-1}+\tfrac{1}{5}\tfrac{1}{(x-1)^2}-\tfrac{1}{25}\tfrac{x+1}{(x+1)^2+1}-\tfrac{7}{25}\tfrac{1}{(x+1)^2+1}.$$

Επομένως,

$$\int\tfrac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx=\tfrac{1}{25}\log|x-1|-\tfrac{1}{5}\tfrac{1}{x-1}-\tfrac{1}{50}\log((x+1)^2+1)-\tfrac{7}{25}\arctan(x+1)+c$$

στα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 7.3.16. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$.

Διαιρώντας, βρίσκουμε

$$\tfrac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=x^2+7x+5+\tfrac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}.$$

Άρα

$$\int\tfrac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx=\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{7}{2}x^2+5x+\int\tfrac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx.$$

Παραγοντοποιούμε εύκολα:

$$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=(x^2+1)^2(x-1).$$

Άρα το $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$ έχει απλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη πραγματική ρίζα, οπότε

$$\tfrac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\tfrac{a}{x-1}+\tfrac{bx+c}{x^2+1}+\tfrac{dx+e}{(x^2+1)^2}.$$

Υπολογίζουμε $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{17}{2}$, $c=-\frac{11}{2}$, $d=4$ και $e=2$ και, επομένως,

$$\int\tfrac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx=\tfrac{3}{2}\log|x-1|-\tfrac{17}{4}\log(x^2+1)-\tfrac{11}{2}\arctan x-\tfrac{2}{x^2+1}+2\int\tfrac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\int\tfrac{1}{(x^2+1)^2}\,dx&=\int\tfrac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx-\int\tfrac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\tfrac{1}{x^2+1}\,dx-\int x\tfrac{x}{(x^2+1)^2}\,dx\\&=\arctan x+\tfrac{x}{2(x^2+1)}-\tfrac{1}{2}\int\tfrac{1}{x^2+1}\,dx=\tfrac{1}{2}\arctan x+\tfrac{x}{2(x^2+1)}+c.\end{aligned}$$

Τελικά:

$$\begin{aligned}\int\tfrac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx=&\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{7}{2}x^2+5x+\tfrac{x-2}{x^2+1}+\tfrac{3}{2}\log|x-1|-\tfrac{17}{4}\log(x^2+1)\\&-\tfrac{9}{2}\arctan x+c\end{aligned}$$

στα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Ολοκληρώματα κάποιων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Κατόπιν, θα δούμε μια μέθοδο υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\int f(x)\,dx = \int r(\cos x, \sin x)\,dx,$$

όπου η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών s,t. Δηλαδή, $f(x) = r(\cos x, \sin x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ και καθεμιά από τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ είναι της μορφής $\sum_{j=1}^{n} a_j\,(\cos x)^{k_j}(\sin x)^{l_j}$, όπου $a_j \in \mathbb{R}$ και $k_j, l_j \in \mathbb{Z}$, $k_j, l_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

Παράδειγμα 7.3.17. Στο

$$\int \frac{\sin x + (\cos x)^3 - (\sin x)^2 \cos x}{\sin x + (\cos x)^2}\,dx$$

η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η $f(x) = \frac{\sin x + (\cos x)^3 - (\sin x)^2 \cos x}{\sin x + (\cos x)^2} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, όπου $f_1(x) = (\cos x)^3 - \cos x (\sin x)^2 + \sin x$, $f_2(x) = (\cos x)^2 + \sin x$ και η αντίστοιχη ρητή συνάρτηση είναι η $r(s,t) = \frac{s^3 - st^2 + t}{s^2 + t}$.

Παρατηρούμε ότι οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ότι η f δεν ορίζεται στα σημεία στα οποία η f_2 έχει τιμή 0 και ότι, αν εξαιρέσουμε αυτά τα σημεία, δηλαδή αν περιοριστούμε στο πεδίο ορισμού της f, τότε η f είναι συνεχής. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.

Τώρα θα διακρίνουμε δυο βασικές περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Η f δεν ορίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του $(-\infty, +\infty)$.

Α. Ως *πρώτη υποπερίπτωση*, υποθέτουμε ότι η f δεν ορίζεται στο $-\pi$. Τότε, λόγω περιοδικότητας, η f δεν ορίζεται στο π όπως και στο $-\pi + k2\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Και πάλι, επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο 2π, αν θέλουμε να μελετήσουμε την f, μπορούμε κατ' αρχάς να περιοριστούμε στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ μήκους 2π.

Τώρα, είτε η f ορίζεται στο διάστημα $(-\pi,\pi)$, οπότε είναι συνεχής στο $(-\pi,\pi)$, είτε δεν ορίζεται σε διάφορα σημεία του $(-\pi,\pi)$, οπότε είναι συνεχής σε διάφορα υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$. Ένας καλός τρόπος να μελετήσουμε την f στο $(-\pi,\pi)$ είναι να θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

και την αντίστροφη αλλαγή μεταβλητής

$$x = 2\arctan u.$$

Γνωρίζουμε καλά ότι η συνάρτηση $u = \tan\frac{x}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\pi,\pi)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση $x = 2\arctan u$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\pi,\pi)$. Άρα, καθώς η μεταβλητή x αυξάνεται και διατρέχει το διάστημα $(-\pi,\pi)$, η u αυξάνεται και διατρέχει το $(-\infty,+\infty)$ και αντιστρόφως. Τώρα, είναι

$$\cos x = \frac{1-(\tan(x/2))^2}{1+(\tan(x/2))^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+(\tan(x/2))^2} = \frac{2u}{1+u^2},$$

οπότε η συνάρτηση $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στο $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση

$$R(u) = r\big(\tfrac{1-u^2}{1+u^2}, \tfrac{2u}{1+u^2}\big)$$

στο $(-\infty,+\infty)$. Το σημαντικό είναι ότι *η νέα αυτή συνάρτηση είναι ρητή συνάρτηση του* u.

Παράδειγμα 7.3.18. Στη συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x + (\cos x)^3 - (\sin x)^2 \cos x}{\sin x + (\cos x)^2}$ στο $(-\pi,\pi)$ του προηγούμενου παραδείγματος αντιστοιχεί, με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$, η συνάρτηση

$$R(u) = \frac{\frac{2u}{1+u^2} + (\frac{1-u^2}{1+u^2})^3 - (\frac{2u}{1+u^2})^2 \frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} + (\frac{1-u^2}{1+u^2})^2} = \frac{1+2u+u^2+4u^3-u^4+2u^5-u^6}{1+2u-u^2+4u^3-u^4+2u^5+u^6}$$

στο $(-\infty,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = R(u) = R(\tan\tfrac{x}{2}), \qquad R(u) = f(x) = f(2\arctan u)$$

και, επομένως, ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $R(u)$ προκύπτουν η μια από την άλλη μέσω σύνθεσης με συνεχή συνάρτηση. Άρα, αν η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιον $x \in (-\pi, \pi)$, τότε η $R(u)$ είναι συνεχής στον αντίστοιχο $u \in (-\infty, +\infty)$ και αντιστρόφως. Επίσης, αν η $f(x)$ δεν ορίζεται σε κάποιον $x \in (-\pi, \pi)$, τότε η $R(u)$ δεν ορίζεται στον αντίστοιχο $u \in (-\infty, +\infty)$ και αντιστρόφως. Άρα για να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $f(x)$ στο $(-\pi, \pi)$ αρκεί να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $R(u)$ στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή να βρούμε τις ρίζες ενός *πολυωνύμου*. Αν η $R(u)$ ορίζεται και, επομένως, είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$, τότε η $f(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\pi, \pi)$. Αν η $R(u)$ δεν ορίζεται στους $u_1, \ldots, u_n$, όπου $u_1 < \cdots < u_n$, οπότε είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{n-1}, u_n), (u_n, +\infty)$, τότε η $f(x)$ δεν ορίζεται στους αντίστοιχους $x_1, \ldots, x_n$, όπου $-\pi < x_1 < \cdots < x_n < \pi$ και είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\pi, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, \pi)$. Δεν ξεχνάμε ότι οι x_i και u_i αλληλοκαθορίζονται μέσω των σχέσεων $u_i = \tan\frac{x_i}{2}$ και $x_i = 2\arctan u_i$.

Επομένως, αν περιορίσουμε τον υπολογισμό του $\int r(\sin x, \cos x)\, dx = \int f(x) dx$ *κατ' αρχάς* στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, τότε είναι

$$\int r(\sin x, \cos x) dx = \int f(x) dx = \int R(u)\tfrac{2}{1+u^2} du\Big|_{u=\tan(x/2)}. \tag{7.14}$$

Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα της $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$ στα οποία αυτή ορίζεται και είναι συνεχής ανάγεται στο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$.

Έστω, λοιπόν, ότι υπολογίζουμε το

$$\int R(u)\tfrac{2}{1+u^2}\, du = G(u) + c, \tag{7.15}$$

όπου η $G(u)$ είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση του u, δηλαδή ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $R(u)\frac{2}{1+u^2}$, στα κατάλληλα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$. Τότε, βάσει των παραπάνω και αφού ορίσουμε την συνάρτηση

$$F(x) = G(\tan\tfrac{x}{2}),$$

από τις (7.14) και (7.15) συνεπάγεται

$$\int r(\cos x, \sin x)\, dx = \int f(x)\, dx = G(\tan\tfrac{x}{2}) + c = F(x) + c$$

στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$. Επομένως, η συνάρτηση $F(x)$ είναι ένα από τα ζητούμενα αόριστα ολοκληρώματα της $f(x)$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$.

Παρατηρούμε ότι, όπως η $f(x)$ έχει περίοδο 2π, έτσι και η $F(x) = G(\tan\frac{x}{2})$ και, επομένως, και η $F'(x)$ έχουν περίοδο 2π. Πράγματι, είναι

$$F(x + 2\pi) = G(\tan\tfrac{x+2\pi}{2}) = G(\tan\tfrac{x}{2}) = F(x).$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, επειδή η $F(x)$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ σε υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$, θα είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ και στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του οποιουδήποτε $(-\pi + k2\pi, \pi + k2\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι ισχύει $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ σε κάποιο υποδιάστημα (a, b) του $(-\pi, \pi)$ στο οποίο η $f(x)$ είναι συνεχής. Αυτό, φυσικά, ισοδυναμεί με το ότι ισχύει $F'(x) = f(x)$ στο ίδιο υποδιάστημα. Θεωρούμε το αντίστοιχο υποδιάστημα $(a + k2\pi, b + k2\pi)$ του $(-\pi + k2\pi, \pi + k2\pi)$, οπότε για κάθε $x \in (a + k2\pi, b + k2\pi)$ ισχύει $x - k2\pi \in (a, b)$ και, επομένως,

$$F'(x) = F'(x - k2\pi) = f(x - k2\pi) = f(x).$$

Άρα ισχύει $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ και στο $(a + k2\pi, b + k2\pi)$.

Έχει, επομένως, τελειώσει ο υπολογισμός του $\int r(\cos x, \sin x)\, dx$ σε όλα τα υποδιαστήματα των διαστημάτων $(-\pi + k2\pi, \pi + k2\pi)$ στα οποία η $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ ορίζεται και είναι συνεχής. Αρκεί, φυσικά, να υπολογιστεί η συνάρτηση $G(u)$.

Παράδειγμα 7.3.19. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.
Το παράδειγμα αυτό εμπίπτει στην πρώτη υποπερίπτωση της περίπτωσης 1 διότι η $\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$. Θα εργαστούμε κατ' αρχάς στο $(-\pi,\pi)$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{x}{2}$ η συνάρτηση $\frac{1}{\sin x}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{1+u^2}{2u}$ στο $(-\infty,+\infty)$. Η $\frac{1+u^2}{2u}$ δεν ορίζεται στον $u=0\in(-\infty,+\infty)$ και η $\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται στον αντίστοιχο $x=0\in(-\pi,\pi)$. Τώρα, στα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \tfrac{1}{\sin x}dx &= \int \tfrac{1+u^2}{2u}\tfrac{2}{1+u^2}du\Big|_{u=\tan(x/2)} = \int \tfrac{1}{u}du\Big|_{u=\tan(x/2)}\\ &= (\log|u|+c)|_{u=\tan(x/2)} = \log\left|\tan\tfrac{x}{2}\right|+c.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα σύμβολα που χρησιμοποιήσαμε στη θεωρητική συζήτηση πριν από αυτό το παράδειγμα, είναι

$$G(u)=\log|u|, \qquad F(x)=\log\left|\tan\tfrac{x}{2}\right|.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{1}{\sin x}$ και $\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ έχουν και οι δυο περίοδο 2π, συνεπάγεται $\int\frac{1}{\sin x}\,dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\pi+k2\pi,k2\pi)$ και $(k2\pi,\pi+k2\pi)$ του οποιουδήποτε διαστήματος $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.
Πιο απλά, γράφουμε:

$$\int\tfrac{1}{\sin x}\,dx=\log\left|\tan\tfrac{x}{2}\right|+c \qquad \text{στο διάστημα } (k\pi,\pi+k\pi) \text{ για κάθε } k\in\mathbb{Z}.$$

B. Ερχόμαστε, τώρα, στη *δεύτερη υποπερίπτωση*, όπου υποθέτουμε ότι η f δεν ορίζεται σε κάποιον x_0, ο οποίος μπορεί να είναι $\neq -\pi$. Τώρα η f δεν ορίζεται και στον $x_0+2\pi$ όπως και στον $x_0+k2\pi$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$z=x-x_0-\pi$$

η οποία μεταφέρει τα x-σημεία $x_0+k2\pi$ στα αντίστοιχα z-σημεία $-\pi+k2\pi$. Θεωρούμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$f_*(z)=f(z+x_0+\pi)=f(x).$$

Επειδή η $f(x)$ δεν ορίζεται στα x-σημεία $x_0+k2\pi$, συνεπάγεται ότι η $f_*(z)$ δεν ορίζεται στα z-σημεία $-\pi+k2\pi$. Τέλος, είναι

$$\int f(x)\,dx=\int f(z+x_0+\pi)\,dz\Big|_{z=x-x_0-\pi}=\int f_*(z)\,dz\Big|_{z=x-x_0-\pi},$$

οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό του $\int f_*(z)\,dz$, δηλαδή στην πρώτη υποπερίπτωση A την οποία ήδη μελετήσαμε.

Παράδειγμα 7.3.20. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{(\cos x)^2}\,dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό μας είναι ήδη γνωστό και είναι ευκαιρία να ελέγξουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε.
Η συνάρτηση $\frac{1}{(\cos x)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\frac{\pi}{2}$ (αλλά ορίζεται στον $-\pi$). Με την αλλαγή μεταβλητής $z=x-(-\frac{\pi}{2})-\pi=x-\frac{\pi}{2}$ η συνάρτηση $\frac{1}{(\cos x)^2}$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{1}{(\cos(z+(\pi/2)))^2}=\frac{1}{(\sin z)^2}$ και είναι

$$\int\tfrac{1}{(\cos x)^2}\,dx=\int\tfrac{1}{(\sin z)^2}\,dz\Big|_{z=x-(\pi/2)}.$$

Η συνάρτηση $\frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$ και εργαζόμαστε κατ' αρχάς στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{z}{2}$ η $\frac{1}{(\sin z)^2}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ στο $(-\infty,+\infty)$. Η $\frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ δεν ορίζεται στον $0\in(-\infty,+\infty)$ και η $\frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον $0\in(-\pi,\pi)$. Τώρα, στα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$, είναι

$$\begin{aligned}\int\tfrac{1}{(\sin z)^2}\,dz &= \int\tfrac{(1+u^2)^2}{4u^2}\tfrac{2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=\tan(z/2)}=\int\tfrac{1+u^2}{2u^2}\,du\Big|_{u=\tan(z/2)}\\ &= \Big(-\tfrac{1}{2u}+\tfrac{u}{2}\Big)\Big|_{u=\tan(z/2)}+c=-\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{z}{2}+\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{z}{2}+c=-\cot z+c\end{aligned}$$

Όταν ο z διατρέχει τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$, ο $x = z + \frac{\pi}{2}$ διατρέχει τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Άρα σ' αυτά τα διαστήματα είναι

$$\int \tfrac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \int \tfrac{1}{(\sin z)^2}\, dz\Big|_{z=x-(\pi/2)} = -\cot(x - \tfrac{\pi}{2}) + c = \tan x + c.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{1}{(\cos x)^2}$ και $\tan x$ έχουν και οι δυο περίοδο 2π, είναι $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan x + c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ και $(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ του οποιουδήποτε διαστήματος $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
Πιο απλά, γράφουμε:

$$\int \tfrac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan x + c \qquad \text{στο διάστημα } \ (-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi) \ \text{ για κάθε } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Περίπτωση 2. Η f ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$.

Συνεπάγεται, φυσικά, ότι η f είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\int f(x)\, dx$ ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή ότι ισχύει

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \qquad \text{για κάθε } \ x,$$

όπου η F είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

Θα δούμε, τώρα, πώς υπολογίζεται μια τέτοια συνάρτηση F.

Όπως στην περίπτωση 1, εργαζόμαστε, *προσωρινά*, στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ χρησιμοποιώντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής $u = \tan \frac{x}{2}$ και την αντίστροφή της $x = 2 \arctan u$. Μετατρέπουμε τη συνάρτηση $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στο $(-\pi, \pi)$ στη ρητή συνάρτηση $R(u) = r\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\big)$ στο $\mathbb{R}$. Κατόπιν, υπολογίζουμε το $\int R(u) \frac{2}{1+u^2}\, du = G(u) + c$, όπου η $G(u)$ είναι κάποιο συγκεκριμένο από τα αόριστα ολοκληρώματα της $R(u)\frac{2}{1+u^2}$. Τότε για τη συνάρτηση $G(\tan \frac{x}{2})$ έχουμε ότι ισχύει

$$\int f(x)\, dx = G(\tan \tfrac{x}{2}) + c \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-\pi, \pi),$$

οπότε η $G(\tan \frac{x}{2})$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $(-\pi, \pi)$. Άρα για την F που ζητάμε, δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $(-\infty, +\infty)$, θα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει

$$F(x) = G(\tan \tfrac{x}{2}) + c \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-\pi, \pi).$$

Επειδή, όμως, και η $F - c$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $(-\infty, +\infty)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για την F που ζητάμε ισχύει

$$F(x) = G(\tan \tfrac{x}{2}) \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-\pi, \pi). \tag{7.16}$$

Μέχρι στιγμής, γνωρίζουμε τα εξής για την άγνωστη συνάρτηση F. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε x. Επίσης, η (7.16) μας δίνει τον τύπο της F στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, όπου η G είναι γνωστή συνάρτηση. Λόγω συνέχειας της F μπορούμε να βρούμε και τις τιμές της στους $-\pi$ και π. Αυτές είναι

$$F(-\pi) = \lim_{x\to-\pi+} F(x) = \lim_{x\to-\pi+} G(\tan \tfrac{x}{2}),$$

$$F(\pi) = \lim_{x\to\pi-} F(x) = \lim_{x\to\pi-} G(\tan \tfrac{x}{2}).$$

Συμπεραίνουμε και τονίζουμε ότι τα όρια

$$A = \lim_{x\to-\pi+} G(\tan \tfrac{x}{2}) = F(-\pi), \qquad B = \lim_{x\to\pi-} G(\tan \tfrac{x}{2}) = F(\pi),$$

ακριβώς επειδή είναι ίσα με τις τιμές $F(-\pi)$ και $F(\pi)$, *υπάρχουν και είναι αριθμοί.*

Η συνάρτηση $G(\tan\frac{x}{2})$ είναι ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$ εκτός από τα σημεία $-\pi+k2\pi$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Επίσης, η ίδια συνάρτηση είναι προφανώς περιοδική με περίοδο 2π. Άρα, για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, το δεξιό πλευρικό όριό της στον $-\pi+k2\pi$ είναι ίσο με A και το αριστερό πλευρικό όριό της είναι ίσο με B. Τώρα, για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, ορίζουμε την $G(\tan\frac{x}{2})$ και στο σημείο $-\pi+k2\pi$, δίνοντάς της τιμή ίση με A στο σημείο αυτό. Ορίζουμε, λοιπόν,

$$F_*(x)=\begin{cases} G(\tan\frac{x}{2}), & \text{αν } x\neq-\pi+k2\pi \text{ για κάθε } k\in\mathbb{Z} \\ A, & \text{αν } x=-\pi+k2\pi \text{ για κάποιον } k\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{7.17}$$

Η συνάρτηση F_* είναι ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$, περιοδική με περίοδο 2π, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και *δεξιά συνεχής* με τιμή A στο σημείο $-\pi+k2\pi$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Η F_* μπορεί να μην είναι αριστερά συνεχής στα σημεία αυτά διότι το αριστερό πλευρικό όριό της στα σημεία αυτά είναι B.

Μέχρι στιγμής έχουμε δυο συναρτήσεις: την άγνωστη F και τη γνωστή F_* ορισμένες στο $(-\infty,+\infty)$ και, λόγω των (7.16) και (7.17), ισχύει

$$F(x)=F_*(x) \qquad \text{για κάθε } x\in[-\pi,\pi). \tag{7.18}$$

Λόγω περιοδικότητας της f, ισχύει

$$F'(x+2\pi)-F'(x)=f(x+2\pi)-f(x)=0 \qquad \text{για κάθε } x,$$

οπότε η συνάρτηση $F(x+2\pi)-F(x)$ είναι σταθερή στο $(-\infty,+\infty)$. Άρα ισχύει

$$F(x+2\pi)-F(x)=F(\pi)-F(-\pi)=B-A=\mu \qquad \text{για κάθε } x, \tag{7.19}$$

όπου για συντομία θέσαμε $\mu=B-A$, και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=F(x)-\mu\big[\tfrac{x+\pi}{2\pi}\big] \qquad \text{για κάθε } x. \tag{7.20}$$

Χρησιμοποιώντας δυο φορές τον τύπο (7.20) της h καθώς και την (7.19) έχουμε ότι ισχύει

$$h(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\mu\big[\tfrac{(x+2\pi)+\pi}{2\pi}\big]=F(x)+\mu-\mu\big[\tfrac{x+\pi}{2\pi}+1\big]=F(x)-\mu\big[\tfrac{x+\pi}{2\pi}\big]=h(x)$$

για κάθε x και, επομένως, η h είναι περιοδική με περίοδο 2π. Επίσης, για κάθε $x\in[-\pi,\pi)$ είναι $\big[\frac{x+\pi}{2\pi}\big]=0$, οπότε από τις (7.18) και (7.20) έχουμε

$$h(x)=F(x)=F_*(x) \qquad \text{για κάθε } x\in[-\pi,\pi).$$

Άρα οι h και F_* είναι περιοδικές με περίοδο 2π και ταυτίζονται στο $[-\pi,\pi)$. Επομένως, ταυτίζονται στο $(-\infty,+\infty)$. Άρα, από την (7.20) έχουμε ότι ισχύει $F_*(x)=F(x)-\mu\big[\frac{x+\pi}{2\pi}\big]$ για κάθε x, οπότε τώρα έχουμε τον τύπο της F στο $(-\infty,+\infty)$. Επομένως,

$$\int f(x)\,dx=F(x)+c=F_*(x)+\mu\big[\tfrac{x+\pi}{2\pi}\big]+c \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 7.3.21. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx$.
Η συνάρτηση $\frac{1}{2+\sin x}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Κατ' αρχάς εργαζόμαστε στο $(-\pi,\pi)$ με την αλλαγή $u=\tan\frac{x}{2}$, οπότε

$$\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx=\int\frac{1}{u^2+u+1}\,du\Big|_{u=\tan(x/2)} \qquad \text{για κάθε } x\in(-\pi,\pi).$$

Τώρα, είναι

$$\int\frac{1}{u^2+u+1}\,du=\int\frac{1}{(u+(1/2))^2+(\sqrt{3}/2)^2}\,du=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+c \qquad \text{για κάθε } u.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $G(u)$ που αναφέρθηκε στην παραπάνω θεωρητική συζήτηση είναι η

$$G(u)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\tfrac{2u+1}{\sqrt{3}}\qquad\text{για κάθε }\ u$$

και, επομένως, είναι

$$G(\tan\tfrac{x}{2})=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\tan\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)\qquad\text{για κάθε }\ x\in(-\pi,\pi).$$

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι ισχύει

$$\int\tfrac{1}{2+\sin x}\,dx=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\tan\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)+c\qquad\text{για κάθε }\ x\in(-\pi,\pi).$$

Για να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $\frac{1}{2+\sin x}$ στο $(-\infty,+\infty)$, βρίσκουμε τα όρια $A=\lim_{x\to-\pi+}G(\tan\frac{x}{2})=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ και $B=\lim_{x\to\pi-}G(\tan\frac{x}{2})=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ και τον $\mu=B-A=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Κατόπιν, ορίζουμε την

$$F_*(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big), & \text{αν } x\neq-\pi+k2\pi \text{ για κάθε } k\in\mathbb{Z}\\ -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, & \text{αν } x=-\pi+k2\pi \text{ για κάποιον } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\int\tfrac{1}{2+\sin x}\,dx=F(x)+c=F_*(x)+\tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\big[\tfrac{x+\pi}{2\pi}\big]+c\qquad\text{για κάθε }\ x.$$

Ολοκληρώματα κάποιων αλγεβρικών συναρτήσεων.

Τέλος, θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int r\big(x,\sqrt{1-x^2}\big)\,dx,\qquad\int r\big(x,\sqrt{x^2-1}\big)\,dx,\qquad\int r\big(x,\sqrt{x^2+1}\big)\,dx.$$

Και στα τρία ολοκληρώματα η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών s, t.

(i) Το πρώτο ολοκλήρωμα ορίζεται κατ' αρχάς στο $[-1,1]$ και είναι φυσιολογικό να χρησιμοποιηθεί η αλλαγή μεταβλητής $x=\sin t$ με τον t στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{1-x^2}=\cos t$ και προκύπτει το $\int r(\sin t,\cos t)\cos t\,dt$, στο οποίο, όπως είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, θα γίνει νέα αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Μετά από λίγες πράξεις παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Είναι, λοιπόν, προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε κατ' ευθείαν την αλλαγή μεταβλητής

$$u=\tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ και το σύνολο τιμών της είναι, επίσης, το $[-1,1]$. Εύκολα υπολογίζουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης

$$x=\tfrac{2u}{1+u^2}.$$

Επίσης,

$$\sqrt{1-x^2}=\tfrac{1-u^2}{1+u^2}$$

και, επομένως,

$$\int r(x,\sqrt{1-x^2})\,dx=\int r\big(\tfrac{2u}{1+u^2},\tfrac{1-u^2}{1+u^2}\big)\tfrac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\,dy\big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}.$$

Αναγόμαστε έτσι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο διάστημα $[-1,1]$.

Φυσικά, για να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x,\sqrt{1-x^2})$ ενδέχεται να πρέπει να περιορισθεί ο x σε κάποια υποδιαστήματα του $[-1,1]$. Αυτό, όμως, εξαρτάται από το συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.3.22. Θα βρούμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Πρέπει να περιοριστούμε στα υποδιαστήματα $[-1,-1/\sqrt{2})$ και $(-1/\sqrt{2},1]$ του $[-1,1]$, επειδή πρέπει να είναι $x+\sqrt{1-x^2}\neq 0$ ή ισοδύναμα $x\neq -1/\sqrt{2}$. Άρα ο

$$u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

περιορίζεται είτε στο $[-1,1-\sqrt{2})$ είτε στο $(1-\sqrt{2},1]$, αντιστοίχως, και στα διαστήματα αυτά ισχύει

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\,du\Big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}.$$

Υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης και βρίσκουμε

$$2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\,du = \frac{1}{2}\log\frac{|1+2u-u^2|}{1+u^2}+\arctan u + c$$

για u στα διαστήματα $(-\infty,1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ και $(1+\sqrt{2},+\infty)$. Άρα

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{1-x^2}|+\arctan\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+c$$

για x στα $[-1,1-\sqrt{2})$ και $(1-\sqrt{2},1]$.

(ii) Το δεύτερο ολοκλήρωμα ορίζεται είτε στο $[1,+\infty)$ είτε στο $(-\infty,-1]$. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση του $[1,+\infty)$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x=\frac{1}{\sin t}$ με τον t στο $(0,\frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t}$ και το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $-\int r(\frac{1}{\sin t},\frac{\cos t}{\sin t})\frac{\cos t}{(\sin t)^2}\,dt$, οπότε, βάσει της προηγούμενης υποενότητας, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u=x+\sqrt{x^2-1}$, οπότε χρησιμοποιούμε κατ' ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής χωρίς να μεσολαβήσει ο t. Θεωρούμε, λοιπόν, την αλλαγή μεταβλητής

$$u=x+\sqrt{x^2-1}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Από το όριο $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=+\infty$ συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[1,+\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$x=\frac{u^2+1}{2u}$$

και, επίσης,

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{u^2-1}{2u}.$$

Άρα

$$\int r(x,\sqrt{x^2-1})\,dx=\int r\Big(\frac{u^2+1}{2u},\frac{u^2-1}{2u}\Big)\frac{u^2-1}{2u^2}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}$$

και καταλήγουμε πάλι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $[1,+\infty)$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα στο $(-\infty,-1]$, χρησιμοποιούμε τις αλλαγές μεταβλητής

$$u=x-\sqrt{x^2-1}\,,\qquad x=\frac{u^2+1}{2u}$$

και καταλήγουμε σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $(-\infty,-1]$. Οι λεπτομέρειες είναι παρόμοιες με τις παραπάνω.

Φυσικά, εκτός από τον περιορισμό στα $(-\infty,-1]$ ή $[1,+\infty)$, ενδέχεται να πρέπει να περιοριστούμε σε μικρότερα διαστήματα ώστε να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x,\sqrt{x^2-1})$.

Παράδειγμα 7.3.23. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$ στο $[1,+\infty)$.

Δεν περιοριζόμαστε σε μικρότερα διαστήματα, διότι ισχύει $x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$ στο $[1,+\infty)$. Άρα για x στο $[1,+\infty)$ είναι

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int\Big(\frac{1}{2u}-\frac{1}{2u^3}\Big)\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Τώρα, για u στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ισχύει

$$\int \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{2u^3}\right) du = \frac{1}{2}\log|u| + \frac{1}{4u^2} + c,$$

οπότε, για x στο $[1, +\infty)$,

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\, dx = \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2-1})^2} + c.$$

(iii) Το τρίτο ολοκλήρωμα ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x = -\cot t$ με τον t στο $(0, \pi)$. Τότε $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sin t}$ και το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\int r(-\frac{\cos t}{\sin t}, \frac{1}{\sin t})\frac{1}{(\sin t)^2}\, dt$, οπότε, βάσει της προηγούμενης υποενότητας, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{t}{2}$. Όμως, τότε

$$u = x + \sqrt{x^2+1},$$

οπότε θεωρούμε κατ' ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής. Η $u = x + \sqrt{x^2+1}$ είναι γνησίως αύξουσα. Υπολογίζουμε $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της $u = x + \sqrt{x^2+1}$ είναι το $(0, +\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$x = \frac{u^2-1}{2u}.$$

Επίσης,

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{u^2+1}{2u}.$$

Άρα

$$\int r(x, \sqrt{x^2+1})\, dx = \int r\Big(\frac{u^2-1}{2u}, \frac{u^2+1}{2u}\Big)\frac{u^2+1}{2u^2}\, du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 7.3.24. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\, dx$ είτε στο $(-\infty, 0)$ είτε στο $(0, +\infty)$. Ο περιορισμός του x στα δυο αυτά υποδιαστήματα είναι αυτονόητος, οπότε και ο $u = x+\sqrt{x^2+1}$ περιορίζεται, αντιστοίχως, είτε στο $(0, 1)$ είτε στο $(1, +\infty)$. Καταλήγουμε στην ισότητα

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\, dx = 2\int \frac{1}{u^2-1}\, du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και υπολογίζουμε το $2\int \frac{1}{u^2-1}\, du$ είτε στο $(0, 1)$ είτε στο $(1, +\infty)$ και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $\log|u-1| - \log(u+1) + c$.
Επομένως, για x στο $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, +\infty)$,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\, dx = \log\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Βάσει των παραπάνω τριών τύπων ολοκληρωμάτων, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int r\big(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}\big)\, dx,$$

όπου κ, λ, μ είναι αριθμοί με $\kappa \neq 0$ και η $r(s, t)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των s, t. Πράγματι, αφού γράψουμε

$$\kappa x^2 + \lambda x + \mu = \kappa\Big((x + \tfrac{\lambda}{2\kappa})^2 + \tfrac{4\kappa\mu-\lambda^2}{4\kappa^2}\Big) = \kappa\big((x+a)^2 + b\big)$$

με $a = \frac{\lambda}{2\kappa}$ και $b = \frac{4\kappa\mu-\lambda^2}{4\kappa^2}$, το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int r\big(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}\big)\, dx = \int r\Big(x, \sqrt{\kappa\big((x+a)^2 + b\big)}\Big)\, dx$$

και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $\kappa > 0$ και $b > 0$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{1}{\sqrt{b}}(x+a)$ το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\sqrt{b}\int r\big(\sqrt{b}\,u-a,\sqrt{\kappa b}\sqrt{u^2+1}\big)\,du = \int r_*(u,\sqrt{u^2+1})\,du,$$

όπου $r_*(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.
Περίπτωση 2. $\kappa > 0$ και $b < 0$.
Τώρα με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{1}{\sqrt{-b}}(x+a)$ μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο

$$\sqrt{-b}\int r\big(\sqrt{-b}\,u-a,\sqrt{-\kappa b}\sqrt{u^2-1}\big)\,du = \int r_*(u,\sqrt{u^2-1})\,du,$$

όπου $r_*(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.
Περίπτωση 3. $\kappa < 0$ και $b < 0$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{1}{\sqrt{-b}}(x+a)$ μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο

$$\sqrt{-b}\int r\big(\sqrt{-b}\,u-a,\sqrt{\kappa b}\sqrt{1-u^2}\big)\,du = \int r_*(u,\sqrt{1-u^2})\,du,$$

όπου $r_*(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.

Η περίπτωση $\kappa < 0$ και $b > 0$ αποκλείεται διότι τότε δεν ορίζεται σε κανένα σημείο η $\sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu}$. Οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, όπου ένας τουλάχιστον από τους κ και b είναι 0, καταλήγει σε ολοκλήρωμα απλούστερης μορφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τα ολοκληρώματα $\int r(x,\sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu})\,dx$, όπου $\kappa \neq 0$, είναι ειδική περίπτωση των ολοκληρωμάτων $\int r(x,\alpha(x))\,dx$, όπου η $\alpha(x)$ είναι οποιαδήποτε “αλγεβρική συνάρτηση” (δείτε τον ορισμό αμέσως μετά) του x. Τα τελευταία αυτά ολοκληρώματα ονομάζονται* **ολοκληρώματα του Abel** *ή* **αβελιανά ολοκληρώματα**. *Μια ακόμη ειδική περίπτωση αβελιανών ολοκληρωμάτων είναι αυτά για τα οποία $\alpha(x) = \sqrt{\rho x^4+\sigma x^3+\kappa x^2+\lambda x+\mu}$, όπου ένας τουλάχιστον από τους ρ, σ είναι $\neq 0$, και ονομάζονται* **ελλειπτικά ολοκληρώματα**, *διότι έχουν άμεση σχέση με υπολογισμό μηκών ελλειπτικών τόξων.*[11]

Αναφέραμε προηγουμένως τον όρο “αλγεβρική συνάρτηση”. Αν και δεν θα ασχοληθούμε με τις αλγεβρικές συναρτήσεις καθεαυτές, αξίζει να εξηγήσουμε, συνοπτικά, ποιές είναι αυτές. Οι ρητές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις $\sqrt[n]{x}$ είναι τα απλούστερα παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι, γενικά, συναρτήσεις που προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις με συνδυασμό των τεσσάρων αλγεβρικών πράξεων και την εξαγωγή ριζών οποιασδήποτε τάξης όπως, για παράδειγμα, η συνάρτηση $\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x-1}}$. Ο γενικός ορισμός των αλγεβρικών συναρτήσεων είναι ο εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωρούμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής $P_0(x)+P_1(x)y+\cdots+P_n(x)y^n=0$ με άγνωστο y, όπου $n \geq 1$ και κάθε $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\dots$, $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο και το $P_n(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση α με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I (όχι μονοσύνολο), η οποία είναι συνεχής και επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση στο I, δηλαδή ισχύει $P_0(x)+P_1(x)\alpha(x)+\cdots+P_n(x)\alpha(x)^n=0$ για κάθε $x \in I$. Τότε η α χαρακτηρίζεται* **αλγεβρική συνάρτηση** *στο I.*

Παράδειγμα 7.3.25. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι αλγεβρική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, η $P(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $-P(x)+1y=0$, της οποίας οι συντελεστές $-P(x)$, 1 είναι πολυώνυμα.

Παράδειγμα 7.3.26. Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η $\frac{P(x)}{Q(x)}$ επαληθεύει την εξίσωση $-P(x)+Q(x)y=0$, της οποίας οι συντελεστές $-P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα.

[11] Δείτε την άσκηση 7.3.30.

Παράδειγμα 7.3.27. Κάθε συνάρτηση $\sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και τα $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επαληθεύει την εξίσωση $-P(x)+Q(x)y^n=0$, της οποίας οι συντελεστές $-P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα.
Ειδικώτερα, οι συναρτήσεις $\sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu}$ και $\alpha(x)=\sqrt{\rho x^4+\sigma x^3+\kappa x^2+\lambda x+\mu}$ που είδαμε προηγουμένως είναι αλγεβρικές συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις που δεν είναι αλγεβρικές χαρακτηρίζονται **υπερβατικές συναρτήσεις**. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι υπερβολικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

Ασκήσεις.

7.3.1. Βρείτε με αλλαγές μεταβλητής τα $\int x\cos(x^2)\,dx$, $\int(\cos x)^2\sin x\,dx$, $\int\tan x\,dx$, $\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$, $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$, $\int\frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$, $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, $\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx$, $\int\frac{1}{x(x^4+16)}\,dx$, $\int(\sin x)^3\,dx$, $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$, $\int\frac{x^5}{(x^2+4)^4}\,dx$, $\int\frac{1}{(\sin x)^3}\,dx$, $\int(\sin x)^4\,dx$, $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$, $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\int\frac{1}{2+(\cos x)^2}\,dx$, $\int\frac{1}{1+\cos x}\,dx$.

7.3.2. Βρείτε με ολοκληρώσεις κατά παράγοντες και αλλαγές μεταβλητής τα $\int(x^2+3x)\sin x dx$, $\int x^3e^{-x^2}dx$, $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$, $\int x^2(\log x)^4\,dx$, $\int\arcsin x\,dx$, $\int\arctan\sqrt{x}\,dx$, $\int\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$, $\int(\sin x)^4\,dx$, $\int\frac{x}{(\cos x)^2}\,dx$, $\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$, $\int\frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx$, $\int(\sin x)^3\sin(5x)\,dx$.

7.3.3. Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων $\int\frac{5x+3}{x^2+2x-1}\,dx$, $\int\frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx$, $\int\frac{3x^2+1}{x^3-1}\,dx$, $\int\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$, $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$, $\int\frac{1}{x^4-1}\,dx$, $\int\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-x+1)}\,dx$, $\int\frac{1}{x^4+1}\,dx$, $\int\frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx$, $\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$, $\int\frac{1}{(x-1)^2(x+2)^3(x^2+1)^2}\,dx$, $\int\frac{1}{x^5+1}\,dx$, $\int\frac{1}{x^6+1}\,dx$, $\int\frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$.

7.3.4. Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin x$, $\cos x$: $\int\frac{1}{(\sin x)^4}\,dx$, $\int\frac{1}{1+2\sin x}\,dx$, $\int\frac{1}{2+\cos x}\,dx$, $\int\frac{(\sin x)^2}{1+(\sin x)^2}\,dx$, $\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$.

7.3.5. Βρείτε τα $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$, $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$, $\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

7.3.6. Σε σχέση με κάποια από τα όρια στην άσκηση 6.5.1, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}\to\frac{\pi}{4}$, $\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}\to\log(\sqrt{2}+1)$, $\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-(k-1)^2}\to\frac{\pi}{4}$.

7.3.7. [α] Αν η $f(\sin x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, αποδείξτε ότι και η $f(\cos x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και ότι $\int_0^{\pi/2}f(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2}f(\cos x)\,dx$.
Εφαρμόστε, βρίσκοντας το $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2\,dx$.
[β] Αν η $f(\sin x,\cos x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, αποδείξτε ότι και η $f(\cos x,\sin x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και ότι $\int_0^{\pi/2}f(\sin x,\cos x)\,dx=\int_0^{\pi/2}f(\cos x,\sin x)\,dx$.
Εφαρμόστε, βρίσκοντας το $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

7.3.8. Βρείτε συνθήκες για τους a, b, c, A, B, C ώστε το $\int\frac{ax^2+2bx+c}{(Ax^2+2Bx+C)^2}\,dx$ να είναι ρητή συνάρτηση του x.

7.3.9. [α] Ορίζουμε $I_n(x)=\int x^ne^x\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Αποδείξτε τον αναδρομικό τύπο $I_{n+1}(x)=x^{n+1}e^x-(n+1)I_n(x)$, βρείτε μέσω αυτού το $I_n(x)$ και ελέγξτε στην άσκηση 7.2.1.
[β] Όπως στο [α], βρείτε αναδρομικούς τύπους για καθένα από τα $\int x^n\sin x\,dx$, $\int x^n\cos x\,dx$, $\int x^m(\log x)^n\,dx$, $\int(\tan x)^n\,dx$, $\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int\frac{1}{(a+b\cos x)^n}\,dx$, $\int\frac{x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.

7.3.10. Ορίζουμε $J_n(x) = \int (\cos x)^n\, dx$ και $I_n(x) = \int (\sin x)^n\, dx$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε τους αναδρομικούς τύπους $J_{n+2}(x) = \frac{\sin x (\cos x)^{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} J_n(x)$ και $I_{n+2}(x) = -\frac{\cos x (\sin x)^{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} I_n(x)$ και βρείτε τα $J_n(x)$, $I_n(x)$.

7.3.11. [12] Ορίζουμε $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\, dx$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.
Αποδείξτε τον αναδρομικό τύπο $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
Είναι προφανές ότι $I_0 = \frac{\pi}{2}$ και $I_1 = 1$. Αποδείξτε ότι ισχύει $I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \frac{\pi}{2}$ και $I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$ για κάθε $n \geq 1$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{\pi}{2} = \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots (2n))^2}{(3\cdot 5\cdots (2n-1))^2 (2n+1)} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ για κάθε $n \geq 1$ και $(n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $n \geq 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}$ και $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ για κάθε $n \geq 1$ και, Επομένως, $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1$.
Αποδείξτε τον **τύπο του Wallis**,

$$\frac{1}{2n+1} \Big(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots (2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n-3)(2n-1)} \Big)^2 \to \frac{\pi}{2}.$$

Αποδείξτε ότι $\binom{2n}{n} \frac{\sqrt{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\sqrt{n}}{4^n} \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

7.3.12. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, αποδείξτε ότι $\int x^n e^{-x^2}\, dx = P_{n-1}(x) e^{-x^2} + c$, όπου $P_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.
Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, αποδείξτε ότι $\int x^n e^{-x^2}\, dx = P_{n-1}(x) e^{-x^2} + \int e^{-x^2}\, dx$, όπου $P_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

7.3.13. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ μέσω κατάλληλων αναδρομικών τύπων.[13]

7.3.14. Έστω $\kappa_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots(1 \text{ ή } 2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(1 \text{ ή } 2)}{(m+n)(m+n-2)\cdots(1 \text{ ή } 2)}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Ορίζουμε $A_{m,n} = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^m (\sin x)^n\, dx$ για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$.
Αφού βρείτε κατάλληλους αναδρομικούς τύπους, αποδείξτε ότι $A_{m,n} = \frac{\pi}{2} \kappa_{m,n}$, αν οι $m, n \geq 2$ είναι και οι δυο άρτιοι, και $A_{m,n} = \kappa_{m,n}$, αν ένας τουλάχιστον από τους $m, n \geq 2$ είναι περιττός.

7.3.15. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και η f'' είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, αποδείξτε ότι $\int_0^\pi \big(f(x) + \frac{1}{n^2} f''(x) \big) \sin(nx)\, dx = \frac{f(0) + (-1)^{n-1} f(\pi)}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7.3.16. Αποδείξτε το **δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού**: [14] αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη και έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ και η $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx.$$

Έστω ότι η ϕ έχει μονότονη παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, b]$ και ότι υπάρχει $m > 0$ ώστε να ισχύει $\phi'(x) \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\big| \int_a^b \sin(\phi(x))\, dx \big| \leq \frac{4}{m}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\big| \int_a^b \sin(x^2)\, dx \big| \leq \frac{2}{a}$ για κάθε a, b με $0 < a < b$.

7.3.17. Έστω $a < b$ και $Q_n(x) = (x-a)^n (x-b)^n$ για κάθε n.[15] Ορίζουμε τα πολυώνυμα $P_0(x) = 1$ και $P_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n} {Q_n}^{(n)}(x)$ για κάθε n.

[12] Το αποτέλεσμα αυτής της άσκησης θα χρησιμοποιηθεί στην άσκηση 7.3.20 για να αποδειχθεί ο τύπος του Stirling.
[13] Το αποτέλεσμα αυτό θα γενικευτεί στην άσκηση 12.5.8.
[14] Για το ίδιο αποτέλεσμα αλλά με τις ασθενέστερες δυνατές υποθέσεις δείτε την άσκηση 7.3.27.
[15] Τα πολυώνυμα αυτά εμφανίζονται και στην άσκηση 5.5.15.

Αποδείξτε ότι το $P_n(x)$ έχει βαθμό n.

Αποδείξτε ότι $\int_a^b P(x)P_n(x)\,dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $< n$.

Αποδείξτε ότι $\int_a^b P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$, αν $m \neq n$, και $\int_a^b (P_n(x))^2\,dx = \frac{b-a}{2n+1}$.

Αποδείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού n υπάρχουν $c_0, \dots, c_n$ ώστε να ισχύει $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$ για κάθε x και, κατόπιν, αποδείξτε ότι οι $c_0, \dots, c_n$ δίνονται από τον τύπο $c_k = \frac{2k+1}{b-a}\int_a^b P(x)P_k(x)\,dx$.

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού n με την ιδιότητα: $\int_a^b Q(x)P(x)\,dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $Q(x)$ βαθμού $< n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $P(x) = cP_n(x)$ για κάθε x.

7.3.18. Έστω f με συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$ ώστε $f(a) = f(b) = 0$ και $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 1$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$ και την ανισότητα[16]

$$\int_a^b x^2(f(x))^2\,dx \int_a^b (f'(x))^2\,dx > \frac{1}{4}.$$

7.3.19. Αποδείξτε ότι $\int_1^n \log x\,dx \leq \sum_{k=2}^n \log k \leq \int_2^n \log x\,dx + \log n$ για κάθε $n \geq 2$.

[17] Αποδείξτε ότι $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$.

7.3.20. [18] [α] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n$ και αριθμοί $a_m, \dots, a_n$. Ορίζουμε την τμηματικά σταθερή συνάρτηση $A : [m,n] \to \mathbb{R}$ με τύπο $A(x) = \sum_{k=m}^{[x]} a_k$ για κάθε $x \in [m,n]$. Κατανοήστε το γράφημα της A. Ποιά είναι τα σημεία ασυνέχειας της A και ποιά είναι τα αντίστοιχα άλματά της;

Έστω $f : [m,n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[m,n]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [m,n]$ ισχύει

$$\sum_{k=m}^{[x]} a_k f(k) = A(x)f(x) - \int_m^x A(t)f'(t)\,dt.$$

[β] Είτε κατευθείαν είτε εφαρμόζοντας το [α] με $m = 1$, $a_k = 1$ για κάθε k και $f(x) = \frac{1}{x^p}$, αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = \frac{1}{n^{p-1}} + p\int_1^n \frac{[x]}{x^{p+1}}\,dx$ για κάθε n και κάθε p.

[γ] Αν $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$ για κάθε n, αποδείξτε, βάσει του [β], ότι η αύξουσα ακολουθία (x_n) συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

[δ] Βάσει του [β], αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{p}{1-p} - p\int_1^n \frac{x-[x]}{x^{p+1}}\,dx$, για κάθε n και κάθε $p \neq 1$.

Αν $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p}$ για κάθε n και αν $0 < p < 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και συγκλίνει.

[ε] Βάσει του [β], αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + 1 - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}\,dx$ για κάθε n.

Αν $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και συγκλίνει.[19]

[στ] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n$ και $f : [m,n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[m,n]$. Είτε κατευθείαν είτε βάσει του [α], αποδείξτε τον **τύπο άθροισης του Euler**,[20]

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x)\,dx + \int_m^n f'(x)(x - [x] - \tfrac{1}{2})\,dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}.$$

[ζ] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n$ και $f : [m,n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[m,n]$. Θεωρούμε την $\phi(x) = \int_m^x (t - [t] - \frac{1}{2})\,dt$ για κάθε $x \in [m,n]$. Αποδείξτε, βάσει του [στ], ότι

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x)\,dx - \int_m^n f''(x)\phi(x)\,dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}.$$

[16] Η ανισότητα αυτή περιέχει το βασικό μαθηματικό περιεχόμενο της **Αρχής της Αβεβαιότητας του Heisenberg**.

[17] Αυτό το όριο το είχαμε δει στην άσκηση 2.4.4.

[18] Το θέμα αυτής της σημαντικής άσκησης είναι ο **χειρισμός αθροισμάτων με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων**. Αυτό το ζήτημα προέκυψε και στην άσκηση 6.4.11 και θα το ξαναδούμε, πιο επίσημα, στις ενότητες 8.2 και 12.2.

[19] Το όριο αυτό είναι η **σταθερά του Euler** και το ξαναείδαμε στις ασκήσεις 2.4.6 και 6.4.11[δ].

[20] Με σημαντικές εφαρμογές στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών.

[η] Έστω $\phi(x)=\int_1^x\big(t-[t]-\frac{1}{2}\big)\,dt$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$. Εφαρμόζοντας το [ζ] με $m=1$ και με την $f(x)=\log x$, αποδείξτε ότι ισχύει $\log(n!)=\big(n+\frac{1}{2}\big)\log n-n+1+\int_1^n\frac{\phi(x)}{x^2}\,dx$ για κάθε n.
[θ] Δείτε στην άσκηση 6.4.10 κάποιες απλές ιδιότητες της $\phi(x)$ στα [ζ],[η].
Αν $x_n=\frac{n!}{e^{-n}n^{n+(1/2)}}$ για κάθε n, αποδείξτε, βάσει του [η], ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάποιον θετικό αριθμό.[21]
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{{x_n}^2}{x_{2n}}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)(2n-1)}\big(\frac{2}{n}\big)^{1/2}$ για κάθε n και, βάσει του τύπου του Wallis στην άσκηση 7.3.11, αποδείξτε ότι $\frac{{x_n}^2}{x_{2n}}\to\sqrt{2\pi}$.
Τέλος, αποδείξτε τον πολύ σημαντικό **τύπο του Stirling**,[22]

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{n+(1/2)}}\to 1.$$

7.3.21. [α] Έστω $n\in\mathbb{N}$ και η συνάρτηση $P_n(x)=\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $0\leq P_n(x)\leq\frac{1}{2^n n!}$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε k, οι ${P_n}^{(k)}(0)$ και ${P_n}^{(k)}(1)$ είναι ακέραιοι.
[β] Υποθέστε ότι ο π είναι ρητός, δηλαδή $\pi=\frac{m}{l}$ με $m,l\in\mathbb{N}$.
Θεωρήστε τη συνάρτηση $Q_n(x)=l^{2n}\sum_{k=0}^n(-1)^k{P_n}^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k}$.
Αποδείξτε ότι οι $Q_n(0)$ και $Q_n(1)$ είναι ακέραιοι.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\pi^2m^{2n}P_n(x)\sin(\pi x)=\frac{d}{dx}\big({Q_n}'(x)\sin(\pi x)-\pi Q_n(x)\cos(\pi x)\big)$ για κάθε x.
Αποδείξτε ότι $Q_n(1)+Q_n(0)=\pi m^{2n}\int_0^1P_n(x)\sin(\pi x)\,dx$.
Αποδείξτε ότι, αν ο n είναι κατάλληλα μεγάλος, τότε $0<Q_n(0)+Q_n(1)<1$ και καταλήξτε σε αντίφαση. Συμπεράνατε ότι ο π είναι άρρητος.

7.3.22. [23] [α] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^bf(x)\cos(\lambda x)\,dx=0,\qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^bf(x)\sin(\lambda x)\,dx=0.$$

[β] Αποδείξτε ότι τα όρια στο [α] ισχύουν για κάθε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ τμηματικά σταθερή στο $[a,b]$.
[γ] Δείτε την άσκηση 6.4.25 και αποδείξτε με δυο τρόπους ότι τα όρια στο [α] ισχύουν για κάθε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

7.3.23. [α] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ ώστε η f' να είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M\geq0$ ώστε

$$\Big|\int_a^bf(x)\cos(\lambda x)\,dx\Big|\leq M\min\{1,1/|\lambda|\},\qquad \Big|\int_a^bf(x)\sin(\lambda x)\,dx\Big|\leq M\min\{1,1/|\lambda|\}.$$

Αυτές οι εκτιμήσεις ισχύουν ακόμη και αν η f' είναι απλώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.[24]
Αν, επιπλέον, είναι και $f(a)=f(b)=0$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda\int_a^bf(x)\cos(\lambda x)\,dx=0,\qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda\int_a^bf(x)\sin(\lambda x)\,dx=0.$$

Και πάλι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f' είναι απλώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
[β] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι m φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ ώστε η $f^{(m)}$ να είναι συνεχής ή και απλώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M\geq0$ ώστε

$$\Big|\int_a^bf(x)\cos(\lambda x)\,dx\Big|\leq M\min\{1,1/|\lambda|^m\},\qquad \Big|\int_a^bf(x)\sin(\lambda x)\,dx\Big|\leq M\min\{1,1/|\lambda|^m\}.$$

[21] Σε λίγο θα υπολογίσουμε ακριβώς αυτό το όριο.

[22] Με την ορολογία και τα σύμβολα της ενότητας 5.8, ο τύπος του Stirling λέει ότι το $n!$ είναι ασυμπτωτικά ίσο με την παράσταση $\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+(1/2)}$ στο $+\infty$ ή, ισοδύναμα, $n!\sim\sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{n+(1/2)}$ στο $+\infty$.

[23] Τα όρια που αποδεικνύονται σ' αυτήν την άσκηση συγκροτούν το **λήμμα των Riemann - Lebesgue**. Βάσει των γνωστών τύπων $e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t$ και $\cos t=\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}e^{-it}$ και $\sin t=\frac{1}{2i}e^{it}-\frac{1}{2i}e^{-it}$ του Euler, εύκολα φαίνεται ότι τα όρια στο [α] είναι ισοδύναμα με τα όρια $\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^bf(x)e^{i\lambda x}\,dx=0$.

[24] Δείτε την άσκηση 7.3.25.

Αν, επιπλέον, ισχύει $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, m-1$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \lambda^m \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty} \lambda^m \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0.$$

7.3.24. [α] Έστω $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[-a, a]$ και συνεχής στον 0 και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\phi(x) \geq 0$ για κάθε x, η ϕ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και ώστε $\lim_{\mu\to+\infty} \int_{-\mu}^{\mu} \phi(x)\,dx = 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} \int_{-a}^{a} \phi(\tfrac{x}{\lambda}) f(x)\,dx = f(0).$$

[β][25] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και συνεχής στον $\xi \in (a, b)$ και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\phi(x) \geq 0$ για κάθε x, η ϕ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και ώστε $\lim_{\mu\to+\infty} \int_{-\mu}^{\mu} \phi(x)\,dx = 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} \int_a^b \phi(\tfrac{x-\xi}{\lambda}) f(x)\,dx = f(\xi).$$

[γ] Εφαρμόστε το [β], με τις ίδιες υποθέσεις όσον αφορά στη συνάρτηση f, και αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\lambda}{(x-\xi)^2+\lambda^2} f(x)\,dx = f(\xi) \qquad \lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{2\lambda} \int_a^b e^{-|x-\xi|/\lambda} f(x)\,dx = f(\xi)$$
$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\lambda} \int_a^b e^{-(x-\xi)^2/\lambda^2} f(x)\,dx = f(\xi)$$

Για το τελευταίο όριο θα χρειαστείτε το όριο $\lim_{\mu\to+\infty} \int_{-\mu}^{\mu} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, το οποίο θα αποδειχθεί στο παράδειγμα 12.4.1.

[δ][26] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω ότι για κάποιον $\xi \in (a, b)$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(\xi+) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $f(\xi-) = \lim_{x\to\xi-} f(x)$. Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\phi(x) \geq 0$ για κάθε x, η ϕ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και ώστε $\lim_{\mu\to+\infty} \int_0^{\mu} \phi(x)\,dx = a_+$ και $\lim_{\mu\to+\infty} \int_{-\mu}^{0} \phi(x)\,dx = a_-$, όπου $a_- + a_+ = 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} \int_a^b \phi(\tfrac{x-\xi}{\lambda}) f(x)\,dx = a_- f(\xi-) + a_+ f(\xi+).$$

7.3.25. [27] Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο I ώστε οι $f', g' : I \to \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad \text{για κάθε } a, b \in I.$$

7.3.26. [28] Έστω διάστημα I και $v, w : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ δυο αόριστα ολοκληρώματα των v, w, αντιστοίχως, στο I. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b (v(x)g(x) + f(x)w(x))\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad \text{για κάθε } a, b \in I.$$

7.3.27. [α][29] Έστω $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ με $b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$. Αν $s_k = a_1 + \cdots + a_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, αποδείξτε ότι

$$b_1 \min\{s_k \mid 1 \leq k \leq n\} \leq b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n \leq b_1 \max\{s_k \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

[β][30] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$ και $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)\,dx.$$

[25] Επέκταση του [α].

[26] Επέκταση του [β].

[27] Ο τύπος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες στην πρόταση 7.8 με τις ασθενέστερες δυνατές υποθέσεις.

[28] Γενίκευση του τύπου ολοκλήρωσης κατά παράγοντες στην πρόταση 7.8 αλλά και στην άσκηση 7.3.25.

[29] Μια χρήσιμη διπλή ανισότητα για “αθροίσματα με όρους οι οποίοι ταλαντώνονται και των οποίων το πλάτος φθίνει”. Μια ίδιου τύπου ανισότητα θα δούμε αργότερα στα σημαντικά κριτήρια Diriclet και Abel για σειρές και για γενικευμένα ολοκληρώματα.

[30] Το δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού στην άσκηση 7.3.16 με τις ασθενέστερες δυνατές υποθέσεις.

7.3.28. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις g που εμφανίζονται στις ασκήσεις 4.5.9, 4.5.10 και 4.5.11 είναι αλγεβρικές.

7.3.29. Αποδείξτε ότι η e^x, η $\log x$, η x^a με άρρητο a και οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι υπερβατικές συναρτήσεις σε κάθε ανοικτό διάστημα.

7.3.30. Δείτε την άσκηση 6.5.6 για τους τύπους υπολογισμού μήκους καμπύλης.
Υπολογίστε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της παραβολής $y = ax^2$.
Υπολογίστε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της κατενοειδούς $y = \cosh x$.
Υπολογίστε το μήκος οποιουδήποτε τόξου του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.
Γράψτε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ως ελλειπτικό ολοκλήρωμα.
Γράψτε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της υπερβολής $y = \frac{a}{x}$ ως ελλειπτικό ολοκλήρωμα.

7.4 Ο τύπος του Taylor, II.

Τώρα θα δούμε μια ακόμη παραλλαγή του τύπου του Taylor. Η άλλη παραλλαγή περιγράφτηκε στο θεώρημα 5.1. Τώρα θα δούμε τον τύπο του Taylor με *ολοκληρωτικό υπόλοιπο*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1. *Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $f : [\xi, c] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c]$ ώστε η $f^{(n+1)}$ να είναι συνεχής στο $[\xi, c]$. Τότε, για κάθε $x \in (\xi, c]$ είναι*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \frac{1}{n!}\int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt.$$

Η ίδια ισότητα ισχύει και όταν $c < \xi$, αρκεί όλες οι υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c, \xi]$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την $g : [\xi, x] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(x-t)^k$$

για κάθε $t \in [\xi, x]$. Ισχύει

$$g'(t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

για κάθε $t \in [\xi, x]$, οπότε η g' είναι συνεχής στο $[\xi, x]$. Τότε

$$\frac{1}{n!}\int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt = \int_{\xi}^{x} g'(t)\, dt = g(x) - g(\xi) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)(x-\xi)^k .$$

Άρα $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \frac{1}{n!}\int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η ισότητα στο θεώρημα 7.1 ονομάζεται* **τύπος του Taylor** *για την f στον ξ* **με ολοκληρωτικό υπόλοιπο** *και γράφεται*

$$f(x) = P_{n,\xi}(x) + R_{n,\xi}(x),$$

όπου $P_{n,\xi}$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στον ξ και το

$$R_{n,\xi}(x) = \frac{1}{n!}\int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt$$

ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** *τάξης n.*

Παράδειγμα 7.4.1. Αν P είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$, τότε ισχύει $P^{(n+1)}(t) = 0$ για κάθε t, οπότε καταλήγουμε στον γνωστό τύπο $P(x) = P_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$ για κάθε ξ, x.

Ασκήσεις.

7.4.1. Αποδείξτε ότι, αν η $f^{(n+1)}$ είναι συνεχής στο $[\xi, c]$, το αποτέλεσμα του θεωρήματος 7.1 συνεπάγεται τα αποτελέσματα του θεωρήματος 5.1.

Κεφάλαιο 8

Σειρές αριθμών.

8.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία* (x_n). *Το σύμβολο*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots .$$

ονομάζεται **σειρά** *και η τιμή του, αν αυτή υπάρχει, ονομάζεται* **άθροισμα** *της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *και (αυτή η τιμή) καθορίζεται με την παρακάτω διαδικασία.*
Σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_3 = x_1 + x_2 + x_3$ *και, γενικότερα,*

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \qquad \text{για κάθε } n.$$

Ο s_n *ονομάζεται* n*-οστό* **μερικό άθροισμα** *της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *και η ακολουθία* (s_n) *ονομάζεται* **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** *της σειράς.*
Αν η ακολουθία (s_n) *έχει όριο, δηλαδή αν* $s_n \to s \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **έχει άθροισμα** *και ως άθροισμα της σειράς θεωρούμε το όριο* s *και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = s.$$

Ειδικότερα, αν $s \in \mathbb{R}$, *λέμε ότι η σειρά* **συγκλίνει** *στον* s *και, αν* $s = +\infty$ *ή* $s = -\infty$, *λέμε ότι η σειρά* **αποκλίνει** *στο* $+\infty$ *ή* $-\infty$, *αντιστοίχως.*
Αν η ακολουθία (s_n) *δεν έχει όριο, τότε λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **αποκλίνει** *και ότι* **δεν έχει άθροισμα**.
Ο x_n *ονομάζεται* n*-οστός* **όρος** *ή* **προσθετέος** *της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Επισημαίνουμε ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε η σειρά έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ή $\pm\infty$, αντιστοίχως. Αν η σειρά αποκλίνει, αλλά όχι στα $\pm\infty$, τότε η σειρά δεν έχει άθροισμα. Προσέξτε: το σύμβολο $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ της σειράς των x_n έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός, είναι ένα σκέτο σύμβολο, ανεξάρτητα από το αν η σειρά έχει άθροισμα ή όχι. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που η σειρά έχει άθροισμα, συμβολίζει και το άθροισμα της σειράς.

Το σύμβολο του δείκτη δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο: με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ συμβολίζουμε την ίδια σειρά.

Παράδειγμα 8.1.1. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ ή $1+1+1+\cdots+1+\cdots$. Τα μερικά αθροίσματά της είναι οι $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ και, γενικότερα, $s_n = 1 + \cdots + 1 = n$ για κάθε n. Επειδή $s_n = n \to +\infty$, η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Παράδειγμα 8.1.2. Η απλούστερη σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ ή $0+0+0+\cdots+0+\cdots$. Η σειρά αυτή ονομάζεται **μηδενική σειρά**. Τα μερικά αθροίσματά της είναι οι $s_1 = 0$, $s_2 = 0+0 = 0$, $s_3 = 0+0+0 = 0$ και, γενικότερα, $s_n = 0+\cdots+0 = 0$ για κάθε n. Επειδή $s_n = 0 \to 0$, η μηδενική σειρά συγκλίνει στον 0 και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Παράδειγμα 8.1.3. Η **γεωμετρική σειρά** με λόγο a είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$ ή $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots$. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1+a$, $s_3 = 1+a+a^2$ και, γενικότερα, $s_n = 1+a+\cdots+a^{n-1}$ για κάθε n.

Παρατηρήστε ότι ο πρώτος προσθετέος της γεωμετρικής σειράς είναι ο a^0 και ότι τον θεωρήσαμε ίσο με 1. Αυτό είναι προφανώς σωστό αν $a \neq 0$, αλλά όχι αν $a = 0$, διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0. Υπάρχει, όμως, μια παραδοσιακή σύμβαση να θεωρείται ότι $a^0 = 1$ για κάθε a, ακόμη και για $a = 0$, στην περίπτωση που εμφανίζεται το σύμβολο a^0 ως όρος στο σύμβολο $\sum$, το οποίο χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε πεπερασμένο άθροισμα ή σειρά. Για παράδειγμα, ένα πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$ μπορούμε να το συμβολίσουμε $\sum_{n=0}^{N} a_nx^n$, υπονοώντας ότι $x^0 = 1$ για κάθε x, ακόμη και για $x = 0$.

Από το παράδειγμα 2.3.20 γνωρίζουμε πότε υπάρχει το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς, δηλαδή το όριο της ακολουθίας $(1+a+\cdots+a^{n-1})$, και, αν υπάρχει, την τιμή του. Επομένως, για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ = 1/(1-a), & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν υπάρχει,} & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση είναι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$ ή $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$. Η σειρά αυτή δεν έχει άθροισμα.

Παράδειγμα 8.1.4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ή $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ με μερικά αθροίσματα $s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ για κάθε n.

Στην περίπτωση $p = 1$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία ονομάζεται **αρμονική σειρά**. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n και είδαμε στο παράδειγμα 2.4.4[1] ότι $s_n \to +\infty$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Επίσης, στην περίπτωση $p = 2$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ με μερικά αθροίσματα $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ για κάθε n. Στα παραδείγματα 2.4.5 και 2.6.1 είδαμε ότι η ακολουθία (s_n) συγκλίνει, οπότε η σειρά αυτή συγκλίνει και έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός. Δηλαδή,

$$\text{Η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει.}$$

Λίγο αργότερα θα μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ στη γενική περίπτωση.[2]

Παράδειγμα 8.1.5. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ έχει μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ για κάθε n. Γνωρίζουμε από τα παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3 ότι $s_n \to e - 1$, οπότε η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $e - 1$ και, επομένως,

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Παράδειγμα 8.1.6. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ έχει μερικά αθροίσματα $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n. Είδαμε στο παράδειγμα 2.5.7[3] ότι η ακολουθία (s_n) συγκλίνει. Άρα η σειρά αυτή συγκλίνει και έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός. Δηλαδή,

$$\text{Η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ συγκλίνει.}$$

[1]και στις ασκήσεις 2.5.4 και 2.6.2. Δείτε και τις υποσημειώσεις αυτών των ασκήσεων.

[2]Πάντως, η σειρά αυτή έχει μελετηθεί και στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

[3]και στην άσκηση 2.6.3. Μάλιστα, στην άσκηση 6.4.11 βρήκαμε και την τιμή του αθροίσματος της σειράς αυτής. Θα την ξαναβρούμε σε ένα από τα παραδείγματα της ενότητας 10.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.1. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε $x_n \to 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \mathbb{R}$, τότε $s_n \to s$. Επειδή ισχύει $x_n = s_n - s_{n-1}$ για κάθε n με $n \geq 2$, συνεπάγεται $x_n \to s - s = 0$. □

Παράδειγμα 8.1.7. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει διότι $\frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$.

Παράδειγμα 8.1.8. Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει. Όμως, $\frac{1}{n} \to 0$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι *δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 8.1*.

Πάντως, όταν θέλουμε να δούμε αν συγκλίνει μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ το πρώτο πράγμα που κάνουμε είναι να ελέγξουμε αν $x_n \to 0$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η σειρά δεν συγκλίνει. Αν αυτό ισχύει, τότε συνεχίζουμε την προσπάθειά μας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.2. *Έστω ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν k_0, m_0 ώστε να ισχύει $x_{k_0+l} = y_{m_0+l}$ για κάθε l.
Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$.
Για κάθε l ισχύει

$$s_{k_0+l} - s_{k_0} = x_{k_0+1} + \cdots + x_{k_0+l} = y_{m_0+1} + \cdots + y_{m_0+l} = t_{m_0+l} - t_{m_0}.$$

Άρα οι ακολουθίες $(s_n - s_{k_0})$ και $(t_n - t_{m_0})$ ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα.
Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Τότε $s_n \to s$, οπότε $s_n - s_{k_0} \to s - s_{k_0}$. Άρα $t_n - t_{m_0} \to s - s_{k_0}$ και, επομένως, $t_n \to s - s_{k_0} + t_{m_0}$.
Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = s - s_{k_0} + t_{m_0}.$$

Αν

$$s \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad s = +\infty \quad \text{ή} \quad s = -\infty,$$

τότε, αντιστοίχως,

$$s - s_{k_0} + t_{m_0} \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad s - s_{k_0} + t_{m_0} = +\infty \quad \text{ή} \quad s - s_{k_0} + t_{m_0} = -\infty.$$

□

Παράδειγμα 8.1.9. Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Με τα σύμβολα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{m+n-1} + \cdots$$

δηλώνουμε τη σειρά με μερικά αθροίσματα: $t_1 = x_m$, $t_2 = x_m + x_{m+1}$ και, γενικότερα,

$$t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Είναι φανερό ότι η πρόταση 8.2 εφαρμόζεται στις σειρές $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, οπότε η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$. Μάλιστα, μπορούμε να βρούμε και τη σχέση ανάμεσα στα αθροίσματα των δυο σειρών.
Στην περίπτωση $m \geq 2$, αν

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n,$$

τότε ισχύει

$$t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} = (x_1 + \cdots + x_{m+n-1}) - (x_1 + \cdots + x_{m-1}) = s_{m+n-1} - (x_1 + \cdots + x_{m-1})$$

για κάθε n. Αν

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}},$$

τότε $s_n \to s$, οπότε $t_n \to s - (x_1 + \cdots + x_{m-1})$ και, επομένως,

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = s - (x_1 + \cdots + x_{m-1}).$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x_1 + \cdots + x_{m-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m \geq 2. \tag{8.1}$$

Στην περίπτωση $m \leq 0$, ισχύει

$$t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} = (x_m + \cdots + x_0) + (x_1 + \cdots + x_{m+n-1}) = (x_m + \cdots + x_0) + s_{m+n-1}$$

για κάθε $n \geq 2 - m$. Αν

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}},$$

τότε $s_n \to s$, οπότε $t_n \to x_m + \cdots + x_0 + s$ και, επομένως,

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_0 + s.$$

Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m \leq 0. \tag{8.2}$$

Συνδυάζοντας τους τύπους (8.1) και (8.2), εύκολα βλέπουμε ότι, αν $m, k \in \mathbb{Z}$ και $m < k$, τότε

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_{k-1} + \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m < k. \tag{8.3}$$

Στον χειρισμό των σειρών εμφανίζεται μερικές φορές μια απλή *αλλαγή μεταβλητής*. Για παράδειγμα, έστω η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$. Εισάγουμε τη νέα μεταβλητή $k = n - m + 1$ και βλέπουμε ότι, όταν ο n διατρέχει τους $m, m+1, m+2, \ldots$, τότε ο k διατρέχει τους $1, 2, 3, \ldots$. Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+m-1}.$$

Πράγματι, και οι δυο σειρές είναι η $x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.3. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και έστω $r_n = \sum_{m=n}^{+\infty} x_m$ για κάθε n. Τότε $r_n \to 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \mathbb{R}$, τότε $s_n \to s$. Επειδή από την (8.1), ή και την γενικότερη (8.3), έχουμε ότι ισχύει

$$s = s_{n-1} + r_n$$

για κάθε n, συνεπάγεται $r_n = s - s_{n-1} \to s - s = 0$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4. *Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα και το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t \in \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$.
Τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ είναι τα

$$u_n = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = s_n + t_n.$$

Επομένως,

$$u_n = s_n + t_n \to s + t.$$

Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = s + t = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.5. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Απόδειξη. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$.
Τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ είναι τα

$$w_n = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) = \lambda s_n.$$

Άρα

$$w_n = \lambda s_n \to \lambda s$$

και, επομένως, $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda s = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. □

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δυο τελευταία αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Εύκολα βλέπουμε με επαγωγή ότι αυτό ισχύει για οποιεσδήποτε πεπερασμένου πλήθους σειρές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.6. *Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n.*
[α] *Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.*
Αν, επιπλέον, υπάρχει n_0 ώστε $x_{n_0} < y_{n_0}$ και αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ και το κοινό άθροισμα είναι αριθμός, τότε $x_n = y_n$ για κάθε n.
[β] *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.*
[γ] *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = -\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t \in \overline{\mathbb{R}}$.
Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$. Επειδή $s_n \to s$ και $t_n \to t$ και επειδή ισχύει

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n = t_n$$

για κάθε n, συνεπάγεται $s \leq t$.
Έστω, επιπλέον, $x_{n_0} < y_{n_0}$ και $s, t \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$t_n - s_n = (y_n - x_n) + \cdots + (y_1 - x_1) \geq y_{n_0} - x_{n_0},$$

επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι μη-αρνητικές και ο $y_{n_0} - x_{n_0}$ είναι ένας από τους όρους του αθροίσματος. Άρα $t - s \geq y_{n_0} - x_{n_0} > 0$.
[β] Όπως πριν, ισχύει $s_n \leq t_n$ για κάθε n. Άρα, αν $s_n \to +\infty$, τότε $t_n \to +\infty$.
[γ] Όπως στο [β]. □

Ασκήσεις.

8.1.1. Βρείτε τα μερικά αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2$ και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

8.1.2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n}{n+1})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n\log(1+\frac{1}{n})$.

8.1.3. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^{n+2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{3})^{n-3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-4}$, $\sum_{n=3}^{+\infty}(-\frac{2}{3})^n$, $\sum_{n=4}^{+\infty}(-3)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n+1}-6^{n/2}}{6^n}$ και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

8.1.4. Για ποιές τιμές του x συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$;

8.1.5. [4] Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$ και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός. Αποδείξτε την εξής σχέση ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty} b_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1}) = b_1-\lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Βρείτε τα αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\log\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

8.1.6. Βρείτε, αν υπάρχει, το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, όπου $x_{2k-1}=\frac{1}{k}$ και $x_{2k}=-\frac{1}{k}$ για κάθε k.

8.1.7. Έστω $x\neq y$. Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{2k}+xa_{2k-1})$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{2k}+ya_{2k-1})$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει.

8.1.8. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \begin{cases} x/(1-x), & \text{αν } |x|<1 \\ 1/(1-x), & \text{αν } |x|>1 \end{cases}$

Αν $x>1$ αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{x^{2^{n-1}}+1}=\frac{1}{x-1}$.

8.1.9. Έστω $k\in\mathbb{N}$ και $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2-k^2}, & \text{αν } n\neq k \\ 0, & \text{αν } n=k\end{cases}$ Βρείτε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

8.1.10. Μια επίπεδη νιφάδα χιονιού υφίσταται διαδοχικές αλλαγές με τον εξής τρόπο: Το αρχικό σχήμα της είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους s. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 12 ισομήκεις πλευρές. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς (της νέας νιφάδας) ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 48 ισομήκεις πλευρές. Αν αυτή η διαδικασία συνεχιστεί επ' άπειρον, φανταστείτε το οριακό σχήμα της νιφάδας και υπολογίστε το μήκος της περιφέρειας και το εμβαδό της "οριακής νιφάδας".

8.1.11. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και σε ευθύ δρόμο κατευθύνεται προς την πόλη Β με σταθερή ταχύτητα v. Όλοι γνωρίζουμε ότι, αν η απόσταση των δυο πόλεων είναι d, τότε το αυτοκίνητο θα ολοκληρώσει τη διαδρομή σε χρόνο $\frac{d}{v}$. Απαντήστε, όμως, σε κάποιον που ισχυρίζεται ότι *το αυτοκίνητο δεν θα φτάσει ποτέ στην πόλη Β* και το δικαιολογεί ως εξής:
"*Ας υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή απόσταση και, μάλιστα, στον προβλεπόμενο γι αυτή χρόνο. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι κατόπιν το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή από την εναπομένουσα απόσταση στον προβλεπόμενο γι αυτή χρόνο. Και ούτω καθ' εξής. Το αυτοκίνητο έχει,*

[4] Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται **τηλεσκοπική σειρά**.

όμως, πάντοτε μπροστά του κάποια εναπομένουσα (έστω και πολύ μικρή) απόσταση μέχρι την πόλη B, οπότε δεν θα φτάσει ποτέ εκεί".

Η απάντησή σας για να είναι πειστική πρέπει οπωσδήποτε να ακολουθήσει τα λογικά βήματα του παραπάνω ισχυρισμού.

8.1.12. Σε κάθε σειρά αντιστοιχεί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Αποδείξτε ότι, αντιστρόφως, σε κάθε ακολουθία αντιστοιχεί μια σειρά έτσι ώστε η ακολουθία αυτή να ταυτίζεται με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς.

8.2 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους.

Το θεώρημα 8.1 έχει για τις σειρές τον ίδιο ρόλο που έχει για τις ακολουθίες το θεώρημα 2.1. Όπως το θεώρημα 2.1 εξασφαλίζει ότι οι μονότονες ακολουθίες έχουν οπωσδήποτε όριο (ενώ η τυχούσα ακολουθία μπορεί να μην έχει όριο), έτσι και το θεώρημα 8.1 εξασφαλίζει ότι οι σειρές με μη-αρνητικούς όρους έχουν οπωσδήποτε άθροισμα (ενώ η τυχούσα σειρά μπορεί να μην έχει άθροισμα). Μάλιστα, όπως θα φανεί αμέσως, η απόδειξη του θεωρήματος 8.1 χρησιμοποιεί το θεώρημα 2.1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1. *Αν ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq +\infty$.*
Πιο συγκεκριμένα, έστω $s_n = x_1+\cdots+x_n$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς. Τότε η σειρά συγκλίνει, αν η ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Ισχύει
$$s_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n$$
για κάθε n. Άρα η (s_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$.
Έστω $s_n \to s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$.
Επειδή ισχύει
$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \geq 0$$
για κάθε n, συνεπάγεται $s \geq 0$.
Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, συνεπάγεται $s \in \mathbb{R}$, ενώ, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, συνεπάγεται $s = +\infty$. □

Άρα κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με μη-αρνητικούς όρους έχει άθροισμα και το άθροισμα αυτό είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Επίσης, το ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με μη-αρνητικούς όρους συγκλίνει ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και το ότι αποκλίνει ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.7. [α] *Έστω ότι ισχύει $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε n. Τότε $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Αν, επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ και $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ συγκλίνει ή, γενικότερα, είναι φραγμένη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Σύμφωνα με το θεώρημα 8.1, οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, οπότε από την πρόταση 8.6 συνεπάγεται
$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n. \tag{8.4}$$
Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$. Από την (8.4) έχουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
[β] Αν η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ είναι φραγμένη, υπάρχει u ώστε να ισχύει $\frac{x_n}{y_n} \leq u$ και, επομένως,
$$x_n \leq u y_n \tag{8.5}$$
για κάθε n. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} u y_n$ συγκλίνει. Άρα, σύμφωνα με την (8.5) και το [α], η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. □

Το αποτέλεσμα της πρότασης 8.7[β] διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής: *αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *αποκλίνει στο* $+\infty$, *τότε και η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *αποκλίνει στο* $+\infty$.

Αρκετές φορές εφαρμόζουμε την πρόταση 8.7[β] με τον εξής τρόπο. Αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to \rho$, όπου ο ρ είναι ένας *θετικός αριθμός*, δηλαδή $0 < \rho < +\infty$, τότε το συμπέρασμα για τις δυο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ είναι το εξής: *είτε και οι δυο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δυο αποκλίνουν στο* $+\infty$. Πράγματι, από το $\frac{x_n}{y_n} \to \rho$ και το ότι ο ρ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Αλλά και από το $\frac{y_n}{x_n} \to \frac{1}{\rho}$ και το ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει.
Αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to 0$, συμπεραίνουμε, σύμφωνα πάντα με την πρόταση 8.7[β], ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο, όμως, δεν ισχύει γενικά.

Παράδειγμα 8.2.1. Ισχύει $\frac{1/n^2}{1/n} \to 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Βέβαια, αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to +\infty$, συμπεραίνουμε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει. Και πάλι αυτό προκύπτει από το $\frac{y_n}{x_n} \to 0$ και την πρόταση 8.7[β].

Μια τελευταία παρατήρηση έχει να κάνει με τον τρόπο που εφαρμόζεται πολλές φορές η "σύγκριση" σειρών στο πλαίσιο της πρότασης 8.7. Αν έχουμε μια σειρά με περίπλοκους προσθετέους, προσπαθούμε να τη συγκρίνουμε με μια σειρά με απλούστερους προσθετέους ώστε να είναι πιο εύκολο να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση αυτής της απλούστερης σειράς. Η μετάβαση από τους περίπλοκους στους απλούστερους προσθετέους γίνεται πολλές φορές με την αναγνώριση "κύριων όρων" όπως θα φανεί στα επόμενα παραδείγματα. Μεγάλη βοήθεια στην αναγνώριση κύριων όρων παρέχει η καλή κατανόηση της ιεράρχησης τάξεων μεγέθους καθώς και η κατανόηση διαφόρων οριακών συμπεριφορών.

Παράδειγμα 8.2.2. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$.
Οι κύριοι όροι στον αριθμητή και τον παρονομαστή του $\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ είναι προφανώς οι 2^n και 3^{n-1}, αντιστοίχως. Οπότε γράφουμε

$$\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n} = \frac{2^n}{3^{n-1}} \frac{1+3\cdot 2^{-n}}{1+n3^{-n+1}}$$

για κάθε n, κατόπιν βλέπουμε ότι $\frac{1+3\cdot 2^{-n}}{1+n3^{-n+1}} \to 1$ και, επομένως,

$$\left(\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}\right)/\left(\frac{2^n}{3^{n-1}}\right) \to 1.$$

Τώρα συγκρίνουμε την αρχική σειρά με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^{n-1}$. Επειδή αυτή η τελευταία σειρά συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η αρχική σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 8.2.3. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7}$.
Τώρα, οι κύριοι όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7}$ είναι οι $2n^3$ και n^4, αντιστοίχως. Τότε γράφουμε

$$\frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7} = \frac{2n^3}{n^4} \frac{1+(3/2)n^{-2}+(5/2)n^{-3}}{1+5n^{-2}+n^{-3}+7n^{-4}},$$

κατόπιν βλέπουμε ότι $\frac{1+(3/2)n^{-2}+(5/2)n^{-3}}{1+5n^{-2}+n^{-3}+7n^{-4}} \to 1$ και, επομένως,

$$\left(\frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7}\right)/\left(\frac{2n^3}{n^4}\right) \to 1.$$

Επειδή $1 > 0$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3}{n^4} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7} = +\infty$.

Παράδειγμα 8.2.4. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$.
Γνωρίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Άρα θα συγκρίνουμε τη σειρά που έχουμε με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Επειδή

$$\frac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1,$$

επειδή $1 > 0$ και επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n} = +\infty$.

Παράδειγμα 8.2.5. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}$.
Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a με $1 < a < 2$. Τότε η τάξη μεγέθους της (a^n) είναι ανάμεσα στην τάξη μεγέθους της (n^3) και στην τάξη μεγέθους της 2^n, διότι $\frac{n^3}{a^n} \to 0$ και $\frac{a^n}{2^n} = (\frac{a}{2})^n \to 0$. Και έχουμε

$$\left(\frac{n^3}{2^n}\right) \Big/ \left(\frac{a^n}{2^n}\right) = \frac{n^3}{a^n} \to 0.$$

Τώρα, επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{a}{2})^n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 8.2.6. Αν ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_1 + \cdots + x_m \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ για κάθε m.
Πρώτη απόδειξη: Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς, τότε $s_n \to s$. Επειδή η ακολουθία (s_n) είναι αύξουσα, ισχύει $s_m \leq s$ για κάθε m.
Δεύτερη απόδειξη: Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, όπου ορίζουμε

$$a_n = \begin{cases} x_n, & \text{αν } 1 \leq n \leq m \\ 0, & \text{αν } n \geq m+1 \end{cases}$$

Τότε ισχύει $0 \leq a_n \leq x_n$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = x_1 + \cdots + x_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} 0 = x_1 + \cdots + x_m.$$

Αξίζει να αποδείξουμε το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.8. *Ο e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \tag{8.6}$$

από το παράδειγμα 8.1.5.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $e \in \mathbb{Q}$ και, συγκεκριμένα, έστω $e = \frac{l}{k}$, όπου $l, k \in \mathbb{N}$. Από την (8.6) έχουμε

$$(k-1)!\, l = k!\, e = k! + \frac{k!}{1!} + \cdots + \frac{k!}{k!} + k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Καθένας από τους $(k-1)!\, l$, $k!$, $\frac{k!}{1!}$, ... , $\frac{k!}{k!}$ είναι ακέραιος, οπότε και ο αριθμός

$$A = k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k!}{n!}$$

πρέπει να είναι ακέραιος. Όμως,

$$0 < A = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)\cdots n} < \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{n-k}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^n} = \frac{1}{k+1} \frac{1}{1-(1/(k+1))} = \frac{1}{k} \leq 1$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. □

Σειρές με φθίνοντες μη-αρνητικούς όρους.

Στις επόμενες δυο προτάσεις θα δούμε δυο κριτήρια σύγκλισης για σειρές με *φθίνοντες* μη-αρνητικούς όρους.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ. [5] *Έστω φθίνουσα ακολουθία* (x_n) *ώστε να ισχύει* $x_n \geq 0$ *για κάθε* n. *Έστω ότι υπάρχει* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *φθίνουσα στο* $[1, +\infty)$ *ώστε να ισχύει* $f(n) = x_n$ *για κάθε* n. *Τότε υπάρχει το* $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du$, *η τιμή του είναι αριθμός* ≥ 0 *ή* $+\infty$ *και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ *αν και μόνο αν* $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ *αν και μόνο αν* $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du = +\infty$.
Επίσης, ισχύει

$$\int_1^{n+1} f(u)\,du \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\,du \qquad \textit{για κάθε } \ n$$

και

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du.$$

Απόδειξη. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα, το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s,$$

οπότε

$$0 \leq s \leq +\infty.$$

Αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς, τότε

$$s_n \to s. \tag{8.7}$$

Επειδή η f είναι μονότονη, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[1, +\infty)$, οπότε ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα

$$F(t) = \int_1^t f(u)\,du \qquad \text{για } \ t \in [1, +\infty).$$

Έστω $t \geq 1$ και $n \geq t$. Επειδή η f είναι φθίνουσα, είναι $f(t) \geq f(n) = x_n \geq 0$. Άρα ισχύει

$$f(t) \geq 0 \qquad \text{για κάθε } \ t \geq 1. \tag{8.8}$$

Άρα, αν $1 \leq t' < t''$, τότε, λόγω της (8.8), είναι $\int_{t'}^{t''} f(u)\,du \geq 0$ και, επομένως,

$$F(t'') = \int_1^{t''} f(u)\,du = \int_1^{t'} f(u)\,du + \int_{t'}^{t''} f(u)\,du \geq \int_1^{t'} f(u)\,du = F(t').$$

Άρα η F είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, οπότε υπάρχει το όριο

$$l = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du \tag{8.9}$$

και η τιμή του είναι αριθμός ή $+\infty$. Πάλι λόγω της (8.8) ισχύει $F(t) = \int_1^t f(u)\,du \geq 0$ για κάθε $t \geq 1$, οπότε είναι $l \geq 0$. Δηλαδή

$$0 \leq l \leq +\infty.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(k+1) \leq f(u) \leq f(k) \qquad \text{για } \ k \leq u \leq k+1,$$

οπότε

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,du \leq \int_k^{k+1} f(u)\,du \leq \int_k^{k+1} f(k)\,du = f(k)$$

[5]Σχετικά με το κριτήριο ολοκληρώματος, οι τεχνικές έχουν ήδη αναπτυχθεί στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

και, επειδή $f(k) = x_k$ και $f(k+1) = x_{k+1}$, είναι

$$x_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(u)\, du \leq x_k. \tag{8.10}$$

Προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες (8.10) για $k = 1, \ldots, n-1$ και τις δεξιές ανισότητες (8.10) για $k = 1, \ldots, n$ και βρίσκουμε

$$x_2 + \cdots + x_n \leq \int_1^n f(u)\, du \qquad \text{και} \qquad \int_1^{n+1} f(u)\, du \leq x_1 + \cdots + x_n,$$

αντιστοίχως. Επειδή $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, συνεπάγεται

$$\int_1^{n+1} f(u)\, du \leq s_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\, du.$$

Άρα, από τα όρια (8.7) και (8.9) συνεπάγεται

$$l \leq s \leq x_1 + l.$$

Τα (i), (ii) είναι άμεσες συνέπειες της τελευταίας ανισότητας. □

Παράδειγμα 8.2.7. Θα μελετήσουμε τις *πολύ σημαντικές* σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Οι σειρές αυτές είναι σημαντικές *και* διότι χρησιμεύουν ως "πρότυπα σύγκρισης" για πολλές άλλες σειρές.[6]
Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$.
Αν $p \leq 0$, τότε ισχύει $\frac{1}{n^p} \geq 1$ για κάθε n, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.
Έστω $p > 0$. Τότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\frac{1}{u^p}$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και, προφανώς, οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους αντίστοιχους όρους της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
Τώρα, είναι

$$\int_1^t \frac{1}{u^p}\, du = \frac{t^{1-p}-1}{1-p} \quad \text{αν } p \neq 1 \qquad \text{και} \qquad \int_1^t \frac{1}{u}\, du = \log t.$$

Επομένως,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{u^p}\, du = \begin{cases} 1/(p-1) < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Άρα, συμπεριλαμβάνοντας και την περίπτωση $p \leq 0$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ = +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Ειδικώτερα, όπως έχουμε ήδη δει, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.
Επιπλέον, έχουμε και τις χρήσιμες εκτιμήσεις

$$\frac{1}{p-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{1}{p-1} \qquad \text{αν } \ p > 1,$$

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n \qquad \text{για κάθε } \ n,$$

$$\frac{(n+1)^{1-p}-1}{1-p} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{n^{1-p}-1}{1-p} \qquad \text{για κάθε } \ n \ \text{ αν } \ 0 \leq p < 1.$$

Παρατηρήστε, σε σχέση με την πρόταση 8.1, ότι για κάθε p με $0 < p \leq 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ είναι παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία δεν συγκλίνει αλλά για την οποία ισχύει $x_n \to 0$.

[6] Η μελέτη αυτών των σειρών μέσω ολοκληρωμάτων έχει ήδη γίνει στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

Παράδειγμα 8.2.8. Για να μελετήσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$, γράφουμε

$$\tfrac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3} = \tfrac{1}{n^{3/2}}\, \tfrac{1+n^{-1/2}}{2+3n^{-2}},$$

οπότε

$$\big(\tfrac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}\big)\big/\big(\tfrac{1}{n^{3/2}}\big) \to \tfrac{1}{2}.$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 8.2.9. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$.
Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει στο $+\infty$, οπότε, λόγω του ορίου

$$\tfrac{\log(1+(1/\sqrt{n}))}{1/\sqrt{n}} \to 1,$$

το οποίο προκύπτει από το $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ αποκλίνει στο $+\infty$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ ΤΟΥ CAUCHY. *Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Τότε*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = +\infty$.

Απόδειξη. Οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ έχουν άθροισμα, αφού είναι σειρές με μη-αρνητικούς όρους. Έστω

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = t.$$

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_k = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k-1}x_{2^{k-1}}$ των δυο σειρών. Τότε

$$s_n \to s, \qquad t_k \to t \tag{8.11}$$

και, επίσης, ισχύει

$$s_n \leq s, \qquad t_k \leq t \tag{8.12}$$

για κάθε n και κάθε k.
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k_0 \geq 0$ ώστε $2^{k_0} \leq n < 2^{k_0+1}$. Επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα και λόγω της δεύτερης ανισότητας (8.12), είναι

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + \cdots + x_n \\ &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots \\ &\quad + (x_{2^{k_0-1}} + \cdots + x_{2^{k_0}-1}) + (x_{2^{k_0}} + \cdots + x_n) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k_0-1}x_{2^{k_0-1}} + 2^{k_0}x_{2^{k_0}} = t_{k_0+1} \leq t. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε n ισχύει $s_n \leq t$, οπότε λόγω του πρώτου ορίου (8.11), είναι $s \leq t$.
Επίσης, πάλι επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα και λόγω της πρώτης ανισότητας (8.12), είναι

$$\begin{aligned} t_k &= x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k-1}x_{2^{k-1}} \\ &\leq 2x_1 + 2x_2 + 2(x_3 + x_4) + \cdots + 2(x_{2^{k-2}+1} + \cdots + x_{2^{k-1}}) \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{k-1}}) = 2s_{2^{k-1}} \leq 2s. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $t_k \leq 2s$, οπότε λόγω του δεύτερου ορίου (8.11), είναι $t \leq 2s$.
Άρα $s \leq t \leq 2s$, οπότε τα s και t είναι είτε και τα δυο αριθμοί είτε και τα δυο $+\infty$. □

Παράδειγμα 8.2.10. Θα ξαναδούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
Κατ' αρχάς, αν $p \leq 0$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.
Έστω $p > 0$, οπότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα με μη-αρνητικούς όρους.
Εξετάζουμε τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\tfrac{1}{2^{p-1}})^k.$$

Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$, οπότε συγκλίνει, αν $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

p-αδικά αναπτύγματα.

Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Στην ενότητα 2.4 αποδείξαμε ότι σε κάθε $x \in [0, 1)$ αντιστοιχεί η ακολουθία (x_n) των p-αδικών ψηφίων του x με τις εξής ιδιότητες. Κάθε x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots p-1$ και η ακολουθία (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$ και, αν σχηματίσουμε τα αθροίσματα

$$s_n = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}, \qquad t_n = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n}$$

για κάθε n, τότε ισχύει

$$s_n \leq x < t_n \quad \text{για κάθε } n, \qquad s_n \to x, \qquad t_n \to x.$$

Τώρα κάνουμε την απλή παρατήρηση ότι τα αθροίσματα s_n είναι ακριβώς τα μερικά αθροίσματα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}.$$

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η σχέση $s_n \to x$ γράφεται, ισοδύναμα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Γενικά, χωρίς αναφορά σε κάποιον x, μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **ακολουθία p-αδικών ψηφίων** *αν κάθε x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots p-1$ και η ακολουθία (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.9. *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.*
[α] *Έστω ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n). Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι αριθμός στο διάστημα $[0, 1)$.*
[β] *Για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$.*

Απόδειξη. [α] Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα. Έστω

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}.$$

Επειδή ισχύει $0 \leq x_n \leq p-1$ για κάθε n και, επιπλέον, επειδή ισχύει η γνήσια ανισότητα $x_n < p-1$ για τουλάχιστον έναν n, από την πρόταση 8.6[α] συνεπάγεται

$$0 \leq x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Για την τελευταία ισότητα, χρησιμοποιούμε τον τύπο για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} (\tfrac{1}{p})^{n-1} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1-(1/p)} = 1.$$

[β] Έστω $0 \leq x < 1$. Έχουμε ήδη αποδείξει, στην ενότητα 2.4, ότι υπάρχει ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι μοναδική.

Κατ' αρχάς θυμόμαστε από την ενότητα 2.4 ότι η ακολουθία (x_n) έχει πρώτο όρο $x_1 = [px]$ και οι επόμενοι όροι της ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = [p^{n+1}x - p^n x_1 - \cdots - px_n] \qquad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, έστω *οποιαδήποτε* ακολουθία p-αδικών ψηφίων (y_n) ώστε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n} = x. \tag{8.13}$$

Από την (8.13) συνεπάγεται

$$px = y_1 + \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-1}}. \tag{8.14}$$

Επειδή ισχύει $0 \leq y_n \leq p-1$ για κάθε $n \geq 2$ και, επιπλέον, επειδή ισχύει η γνήσια ανισότητα $y_n < p-1$ για τουλάχιστον έναν $n \geq 2$, από την πρόταση 8.6[α] συνεπάγεται

$$0 \leq \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-1}} < \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{n-1}} = 1. \tag{8.15}$$

Από τις (8.14) και (8.15) συνεπάγεται

$$y_1 \leq px < y_1 + 1$$

και, επειδή ο y_1 είναι ακέραιος, έχουμε $y_1 = [px]$.
Κατόπιν, έστω $m \in \mathbb{N}$. Από την (8.13) συνεπάγεται

$$x = \textstyle\sum_{n=1}^{m+1} \frac{y_n}{p^n} + \sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n}$$

και, πολλαπλασιάζοντας με τον p^{m+1},

$$p^{m+1}x = p^m y_1 + \cdots + py_m + y_{m+1} + \textstyle\sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-m-1}}$$

ή, ισοδύναμα,

$$p^{m+1}x - p^m y_1 - \cdots - py_m = y_{m+1} + \textstyle\sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-m-1}}. \tag{8.16}$$

Και πάλι, επειδή ισχύει $0 \leq y_n \leq p-1$ για κάθε $n \geq m+2$ και επειδή ισχύει η γνήσια ανισότητα $y_n < p-1$ για τουλάχιστον έναν $n \geq m+2$, από την πρόταση 8.6[α] συνεπάγεται

$$0 \leq \textstyle\sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-m-1}} < \sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{n-m-1}} = 1. \tag{8.17}$$

Από τις (8.16) και (8.17) συνεπάγεται

$$y_{m+1} \leq p^{m+1}x - p^m y_1 - \cdots - py_m < y_{m+1} + 1$$

και, επειδή ο y_{m+1} είναι ακέραιος, έχουμε

$$y_{m+1} = [p^{m+1}x - p^m y_1 - \cdots - py_m].$$

Αλλάζοντας, απλώς, το σύμβολο του δείκτη από m σε n, διατυπώνουμε το αποτέλεσμά μας ως εξής: *οποιαδήποτε ακολουθία p-αδικών ψηφίων (y_n) με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n} = x$ έχει πρώτο όρο $y_1 = [px]$ και οι επόμενοι όροι της ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο*

$$y_{n+1} = [p^{n+1}x - p^n y_1 - \cdots - py_n] \qquad \text{για κάθε } n.$$

Παρατηρήστε ότι αυτός ο αναδρομικός τύπος είναι ο ίδιος με τον αναδρομικό τύπο που ικανοποιούν οι όροι της αρχικής (x_n).
Συγκρίνοντας, τώρα, την αρχική ακολουθία (x_n) και την οποιαδήποτε άλλη (y_n), βλέπουμε αμέσως ότι ταυτίζονται: είναι σαφές ότι έχουν τους ίδιους πρώτους όρους $y_1 = x_1 = [px]$ και, βάσει του (κοινού) αναδρομικού τύπου, έχουν τους ίδιους δεύτερους όρους και κατόπιν έχουν τους ίδιους τρίτους όρους και, επαγωγικά, έχουν τους ίδιους n-οστούς όρους για κάθε n.
Άρα η ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) που γνωρίζουμε από την ενότητα 2.4 είναι η μοναδική ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν η (x_n) είναι η ακολουθία των p-αδικών ψηφίων του $x \in [0,1)$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ ονομάζεται p-**αδικό ανάπτυγμα** του x και συνήθως αντικαθιστούμε αυτήν τη σειρά με το σύμβολο $\langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_p$, οπότε γράφουμε*

$$x = \langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_p.$$

Στην περίπτωση $p = 10$ χρησιμοποιούμε, παραδοσιακά, το απλούστερο σύμβολο $x = 0, x_1x_2x_3\,\ldots$ αντί του $x = \langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_{10}$.

Παρατηρήστε ότι η πρόταση 8.9 λέει ότι *υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς στο $[0,1)$ και στις ακολουθίες p-αδικών ψηφίων ή, ισοδύναμα, ανάμεσα στους αριθμούς στο $[0,1)$ και στα p-αδικά αναπτύγματα $\langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_p$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το p-αδικό ανάπτυγμα $\langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_p$ χαρακτηρίζεται* ***περιοδικό*** *αν υπάρχουν m_0, k_0 ώστε να ισχύει $x_{n+k_0} = x_n$ για κάθε $n \geq m_0$. Αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά από το τμήμα $x_{m_0}x_{m_0+1}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}$ του p-αδικού αναπτύγματος ακολουθεί το ίδιο τμήμα και αμέσως μετά από αυτό ακολουθεί το ίδιο τμήμα και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή, το p-αδικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή*

$$\langle 0, x_1\ldots x_{m_0-1}\; x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}\; x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}\; x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}\,\ldots\rangle_p.$$

Χρησιμοποιούμε και τη συντομογραφία $\langle 0, x_1\ldots x_{m_0-1}\,\overline{x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}}\,\rangle_p$.

Η πρόταση 8.10 στην περίπτωση $p = 10$, δηλαδή για τα δεκαδικά αναπτύγματα, είναι γνωστή από το δημοτικό σχολείο - χωρίς απόδειξη, φυσικά!

Επισημαίνουμε ότι, εκτός από τους αριθμούς στο $[0,1)$, *και οι φυσικοί αριθμοί έχουν p-αδικά αναπτύγματα.* Αυτό το ζήτημα εντάσσεται στο πλαίσιο της στοιχειώδους αριθμητικής.[7]

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.10. *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0,1)$. Τότε ο x είναι ρητός αν και μόνο αν το p-αδικό του ανάπτυγμα είναι περιοδικό.*

Απόδειξη. Έστω $x = \langle 0, x_1\ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}}\,\rangle_p$.
Τότε

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\big(1 + \tfrac{1}{p^{k_0}} + \tfrac{1}{p^{2k_0}} + \cdots\big) \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\tfrac{1}{1-(1/p^{k_0})} \\ &= \tfrac{x_1p^{m_0-2}+\cdots+x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \tfrac{x_{m_0}p^{k_0-1}+\cdots+x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)}, \end{aligned}$$

οπότε είναι φανερό ότι ο x είναι ρητός.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο $x \in [0,1)$ είναι ρητός, δηλαδή $x = \frac{a}{b}$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < b$.
Γράφουμε $p = {p_1}^{n_1}\cdots{p_r}^{n_r}$, όπου $p_1, \ldots, p_r$ είναι οι πρώτοι παράγοντες του p και $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$. Ομοίως, γράφουμε $b = {p_1}^{l_1}\cdots{p_r}^{l_r}b'$, όπου $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{Z}$, $l_1, \ldots, l_r \geq 0$ (αν κάποιος p_j δεν είναι πρώτος παράγων του b, τότε ο αντίστοιχος l_j είναι 0) και ο $b' \in \mathbb{N}$ είναι σχετικά πρώτος με τον p.
Θεωρούμε οποιονδήποτε $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $(m_0-1)n_j \geq l_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, r$.
Ορίζουμε $v_j = (m_0-1)n_j - l_j$, οπότε $v_j \in \mathbb{Z}$, $v_j \geq 0$. Τότε

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a}{{p_1}^{l_1}\cdots{p_r}^{l_r}b'} = \frac{a{p_1}^{v_1}\cdots{p_r}^{v_r}}{({p_1}^{n_1}\cdots{p_r}^{n_r})^{m_0-1}b'} = \frac{a'}{p^{m_0-1}b'},$$

όπου $a' \in \mathbb{Z}$, $a' \geq 0$.
Τώρα, διαιρούμε τους $p, p^2, p^3, \ldots$ με τον b'. Τα πιθανά υπόλοιπα αυτών των διαιρέσεων, δηλαδή οι $0, \ldots, b'-1$, είναι πεπερασμένα αλλά οι αριθμοί είναι άπειροι, οπότε τουλάχιστον δυο από αυτούς θα δώσουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον b'. Δηλαδή, υπάρχουν $t, s \in \mathbb{N}$, $t < s$

[7] Δείτε την άσκηση 8.2.30.

ώστε $p^t = q_t b' + z$ και $p^s = q_s b' + z$, όπου $q_t, q_s \in \mathbb{Z}$ και $z \in \{0, \ldots, b'-1\}$. Συνεπάγεται $p^t(p^{s-t}-1) = p^s - p^t = (q_s - q_t)b'$, οπότε ο b' διαιρεί τον $p^t(p^{s-t}-1)$. Επειδή οι b', p είναι σχετικά πρώτοι, ο b' διαιρεί τον $p^{s-t}-1$, οπότε υπάρχει $b'' \in \mathbb{N}$ ώστε $b'b'' = p^{s-t}-1$. Ορίζουμε τον $k_0 = s - t \in \mathbb{N}$ και έχουμε ότι $b'b'' = p^{k_0}-1$ και, επομένως,

$$x = \tfrac{a'b''}{p^{m_0-1}b'b''} = \tfrac{a''}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)},$$

όπου $a'' = a'b'' \in \mathbb{Z}$ και $0 \le a'' < p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)$. Το τελευταίο ισχύει διότι $0 \le x < 1$.
Κατόπιν, εκτελούμε τη διαίρεση του a'' με τον $p^{k_0}-1$, οπότε

$$a'' = w(p^{k_0}-1) + u,$$

όπου $w \in \mathbb{Z}$, $0 \le w < p^{m_0-1}$ και $u \in \{0, \ldots, p^{k_0}-2\}$.
Τέλος, γράφουμε τα p-αδικά αναπτύγματα (δείτε την άσκηση 8.2.30) των w, u στη μορφή

$$w = x_1 p^{m_0-2} + \cdots + x_{m_0-1}, \qquad u = x_{m_0} p^{k_0-1} + \cdots + x_{m_0+k_0-1}$$

και παρατηρούμε ότι οι $x_{m_0}, \ldots, x_{m_0+k_0-1}$ δεν είναι όλοι ίσοι με $p-1$, διότι αλλιώς θα ήταν $u = (p-1)p^{k_0-1} + \cdots + (p-1)p + (p-1) = p^{k_0}-1$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{w(p^{k_0}-1)+u}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \tfrac{w}{p^{m_0-1}} + \tfrac{u}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \tfrac{x_1p^{m_0-2}+\cdots+x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \tfrac{x_{m_0}p^{k_0-1}+\cdots+x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\tfrac{1}{1-\frac{1}{p^{k_0}}} \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\big(1 + \tfrac{1}{p^{k_0}} + \tfrac{1}{p^{2k_0}} + \cdots\big) \\ &= \langle x_1 \ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0} \ldots x_{m_0+k_0-1}}\,\rangle_p. \end{aligned}$$

Άρα ο x έχει περιοδικό p-αδικό ανάπτυγμα. $\square$

Ασκήσεις.

8.2.1. Θεωρήστε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ από την άσκηση 8.1.5 και αποδείξτε ότι το άθροισμά της είναι 1. Βάσει αυτού, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

8.2.2. Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^4-n^2+4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{n^2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{1+n^2}-n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{1/n}-1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-\cos\frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1 - n\log\frac{2n+1}{2n-1}\big)$.

8.2.3. Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες καθεμιά από τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a\big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ συγκλίνει.
Βρείτε τις τιμές των a, b με $a > b > 0$, για τις οποίες καθεμιά από τις σειρές $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a-n^b}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n-b^n}$ συγκλίνει.
Βρείτε τις τιμές των $a, b, c > 0$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{b^n+c^n}$ συγκλίνει.

8.2.4. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$ συγκλίνει.

8.2.5. Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n}+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n\log(\log n)}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n(\log(\log n))^2}$. Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Για όσες σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$ βρείτε εκτιμήσεις για τα μερικά αθροίσματά τους. Κατόπιν, εφαρμόστε και το κριτήριο συμπύκνωσης στις παραπάνω σειρές.

8.2.6. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$, $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\log n(\log(\log n))^p}$ συγκλίνουν, αν $p>1$, και αποκλίνουν στο $+\infty$, αν $p\leq 1$.

8.2.7. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^a(\log n)^b}$ συγκλίνει αν $a=1$, $b>1$ και αν $a>1$ και ότι αποκλίνει στο $+\infty$ σε κάθε άλλη περίπτωση.
Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^n n^b}$ συγκλίνει αν $a=1$, $b>1$ και αν $a>1$ και ότι αποκλίνει στο $+\infty$ σε κάθε άλλη περίπτωση.
Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{a^n(\log n)^b}$ συγκλίνει αν $a>1$ και ότι αποκλίνει στο $+\infty$ σε κάθε άλλη περίπτωση.

8.2.8. Διατυπώστε και αποδείξτε μια παραλλαγή του κριτηρίου συμπύκνωσης, θεωρώντας τις δυνάμεις p^k του οποιουδήποτε φυσικού $p\geq 3$, αντί των δυνάμεων 2^k του 2.

8.2.9. Έστω $p>1$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(p-1)k^{p-1}}\leq\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\leq\frac{1}{k^p}+\frac{1}{(p-1)k^{p-1}}$ για κάθε k.
Αποδείξτε ότι $k^{p-1}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\to\frac{1}{p-1}$ (όταν $k\to+\infty$).
Αποδείξτε ότι ισχύει $\lim_{p\to1+}(p-1)\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=1$ για κάθε k.

8.2.10. Έστω $x>0$. Αποδείξτε ότι $\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}\leq\frac{x}{1+x^2}+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}=\frac{\pi}{2}$.
Άρα τί απαντάμε αν κάποιος ισχυριστεί ότι γενικά ισχύει η εναλλαγή $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)$ των συμβόλων του ορίου και της σειράς;

8.2.11. Έστω ότι ισχύει $x_n>0$ για κάθε n και $a\geq 1$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}^a$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{{x_n}^a}{1+{x_n}^a}$ συγκλίνουν.

8.2.12. Έστω ότι ισχύει $x_n\geq 0$ για κάθε n.
Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n}$ συγκλίνει.
Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{x_nx_{n+1}}$ συγκλίνει. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε αποδείξτε και το αντίστροφο.
Βρείτε παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{x_nx_{n+1}}$ να συγκλίνει.

8.2.13. [8] [α] Έστω ότι ισχύει $x_n,y_n>0$ για κάθε n και έστω ότι ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{y_{n+1}}{y_n}$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}y_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει.
[β] Έστω ότι ισχύει $x_n>0$ για κάθε n.
Αν $0<a<1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει.
Αν $a>1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ αποκλίνει.
[γ] Έστω ότι ισχύει $x_n>0$ για κάθε n.
Αν $a>1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq(1-\frac{1}{n+1})^a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει.
Αν $a\leq 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq(1-\frac{1}{n+1})^a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ αποκλίνει.

8.2.14. [α] Έστω (x_n) φθίνουσα ώστε να ισχύει $x_n\geq 0$ για κάθε n. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n<+\infty$, αποδείξτε ότι $nx_n\to 0$.
Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=+\infty$ αν $0\leq p\leq 1$.
[β] Δείτε την άσκηση 2.4.13. Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_{n+1}\leq\frac{x_n+x_{n+2}}{2}$ για κάθε n και $x_n\to 0$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}n(x_n-2x_{n+1}+x_{n+2})=x_1$.

8.2.15. Έστω ότι ισχύει $x_n\geq 0$ για κάθε n. Αν η (x_{n_k}) είναι οποιαδήποτε υποακολουθία της (x_n), αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty}x_{n_k}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$.

[8] Η συνέχεια στην άσκηση 8.3.28.

8.2.16. Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n \leq z_n$ για κάθε n. Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει.

8.2.17. Έστω $m_1, m_2, m_3, \ldots$ κατά γνησίως αύξουσα διάταξη οι φυσικοί οι οποίοι δεν περιέχουν το δεκαδικό ψηφίο 3 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m_n}$ συγκλίνει.

8.2.18. Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ για κάθε n.
Αν $p \geq 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_{m+1}}{{r_{m+1}}^p} + \cdots + \frac{x_n}{{r_n}^p} \geq \frac{1}{{r_{m+1}}^{p-1}} - \frac{r_{n+1}}{{r_{m+1}}^p}$ για κάθε m, n με $m < n$ και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{r_n}^p}$ αποκλίνει.
Αν $0 < p < 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_n}{{r_n}^p} \leq \frac{1}{1-p}({r_n}^{1-p} - {r_{n+1}}^{1-p})$ για κάθε n και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{r_n}^p}$ συγκλίνει.
Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{r_n}^p}$ συγκλίνει και στην περίπτωση $p \leq 0$.

8.2.19. Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ αποκλίνει.
Αν $p \leq 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_{m+1}}{{s_{m+1}}^p} + \cdots + \frac{x_n}{{s_n}^p} \geq \frac{1}{{s_n}^{p-1}} - \frac{s_m}{{s_n}^p}$ για κάθε m, n με $m < n$ και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{s_n}^p}$ αποκλίνει.
Αν $p > 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_n}{{s_n}^p} \leq \frac{1}{p-1}\big(\frac{1}{{s_{n-1}}^{p-1}} - \frac{1}{{s_n}^{p-1}}\big)$ για κάθε $n \geq 2$ και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{s_n}^p}$ συγκλίνει.

8.2.20. [α] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) ώστε $y_n \to +\infty$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να συγκλίνει.
[β] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) ώστε $y_n \to 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να αποκλίνει.
[γ] Έστω ότι η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα και $y_n \to +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει (x_n) ώστε να ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ να συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να αποκλίνει.
[δ] Έστω ότι η (y_n) είναι γνησίως φθίνουσα και $y_n \to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει (x_n) ώστε να ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ να αποκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να συγκλίνει.

8.2.21. [9] Έστω $a_n, b_n \geq 0$ για κάθε n και $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^q < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder** για σειρές,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p\big)^{1/p} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^q\big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s{a_n}^p = t{b_n}^q$ για κάθε n.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2 < +\infty$, επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η πολύ σημαντική **ανισότητα του Cauchy**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2\big)^{1/2} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2\big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^p < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για σειρές,

$$\big(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^p\big)^{1/p} \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^p\big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s a_n = t b_n$ για κάθε n.

[9] Οι ανισότητες της άσκησης 5.4.22 για σειρές. Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 8.3.23.

8.2.22. Βρείτε συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχή στο $[1, +\infty)$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = +\infty$ και το $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\, du$ να είναι αριθμός.

Βρείτε συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχή στο $[1, +\infty)$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) < +\infty$ και $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\, du = +\infty$.

8.2.23. Στο θεώρημα 8.1 είδαμε ότι για κάθε σειρά μη-αρνητικών όρων η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών. Σε συνδυασμό με την άσκηση 8.1.12, αποδείξτε ότι, αντιστρόφως, σε κάθε αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών αντιστοιχεί μια σειρά μη-αρνητικών όρων έτσι ώστε η ακολουθία αυτή να ταυτίζεται με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς.

8.2.24. Βρείτε το δυαδικό, το τετραδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα των $\frac{7}{16}$, $\frac{31}{32}$. Βρείτε την έκτη δεκαδική και την έκτη δυαδική προσέγγιση του $\sqrt{2} - 1$.

8.2.25. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0, 1)$. Αν για κάποιον n οι n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις των x, y είναι ίδιες, αποδείξτε ότι $|x - y| < \frac{1}{p^n}$.

8.2.26. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0, 1)$. Αν s_n είναι η n-οστή p-αδική προσέγγιση του x, ποιά είναι τα p-αδικά αναπτύγματα των $x - s_n$, $p^n(x - s_n)$;

8.2.27. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0, 1)$.

Αν $x + y < 1$, αποδείξτε ότι το σφάλμα στον υπολογισμό του $x + y$ με την αντικατάσταση των x, y από τις n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις τους είναι $< \frac{2}{p^n}$.

Αποδείξτε ότι το αντίστοιχο σφάλμα στον υπολογισμό του xy είναι $< \frac{2}{p^n} - \frac{1}{p^{2n}}$.

8.2.28. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και οποιοδήποτε συγκεκριμένο p-αδικό ψηφίο k (δηλαδή $0 \leq k \leq p-1$). Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών στο $[0, 1)$ των οποίων το n-οστό p-αδικό ψηφίο είναι ίσο με k είναι η ένωση p^{n-1} διαστημάτων τύπου $[a, b)$. Ποιά ακριβώς είναι αυτά τα διαστήματα και τί μήκος έχει καθένα από αυτά; Ποιό είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;

8.2.29. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0, 1)$. Αποδείξτε ότι τα p-αδικά ψηφία του x είναι τελικά 0 αν και μόνο αν $x = \frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < n$, $\gcd(m, n) = 1$ και οι πρώτοι παράγοντες του n είναι πρώτοι παράγοντες και του p.

8.2.30. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{N}$ υπάρχουν μοναδικοί $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \geq 0$ και $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \leq p - 1$ ώστε $x = x_{n_0}p^{n_0} + \cdots + x_1 p + x_0$.[10]
Εφαρμόστε στους αριθμούς 2, 16, 354, 10385 με $p = 10, 2, 3, 16$.

8.2.31. Υπολογίστε τους αριθμούς $\langle 0, 34239239239239\ldots\rangle_{10}$, $\langle 0, 101101101101101\ldots\rangle_2$ και $\langle 0, 01201120112011201\ldots\rangle_3$. Παρατηρήστε ότι και οι τρεις αριθμοί είναι ρητοί.

Υπολογίστε το δυαδικό, το τριαδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του $\frac{13}{150}$. Παρατηρήστε ότι και τα τρία αναπτύγματα είναι περιοδικά.

8.2.32. [11] Έστω ακολουθία (p_n) στο $\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $p_n \geq 2$ για κάθε n.

Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει $0 \leq a_n \leq p_n - 1$ για κάθε n και ώστε να μην ισχύει τελικά $a_n = p_n - 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_1\cdots p_n}$ συγκλίνει και ότι το άθροισμά της ανήκει στο $[0, 1)$.

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει $0 \leq a_n \leq p_n - 1$ για κάθε n, ώστε να μην ισχύει τελικά $a_n = p_n - 1$ και ώστε $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_1\cdots p_n}$.
Βρείτε αναδρομικό τύπο για την ακολουθία (a_n).

[10] Το άθροισμα $x_{n_0}p^{n_0} + \cdots + x_1 p + x_0$ ονομάζεται p-**αδικό ανάπτυγμα** του x και συμβολίζεται $\langle x_{n_0}\ldots x_1 x_0\rangle_p$. Οι $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0}$ ονομάζονται p-**αδικά ψηφία** του x.

[11] Γενίκευση των p-αδικών αναπτυγμάτων.

8.3 Κριτήρια σύγκλισης σειρών.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* n_0 *ώστε να ισχύει* $\big|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\big| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| < \epsilon$ *για κάθε* m, n *με* $n > m \geq n_0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$.
Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Το ότι η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|s_n - s_m| < \epsilon$$

για κάθε n, m με $n > m \geq n_0$. Η απόδειξη τελειώνει διότι παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|x_{m+1} + \cdots + x_n| = |(x_1 + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_m)| = |s_n - s_m|$$

για κάθε n, m με $n > m$. □

Μερικές φορές διατυπώνουμε το κριτήριο του Cauchy ως εξής: η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\lim_{m,n\to+\infty} \sum_{k=m+1}^{n} x_k = 0.$$

Παράδειγμα 8.3.1. [12] Θα ξαναδούμε την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.
Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει. Τότε (με $\epsilon = \frac{1}{2}$) υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right| < \tfrac{1}{2}$$

για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$. Άρα, με $n = 2m$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m}\right| < \tfrac{1}{2}$$

για κάθε $m \geq n_0$. Όμως,

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m}\right| = \tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m} \geq \tfrac{1}{2m} + \cdots + \tfrac{1}{2m} = \tfrac{2m-m}{2m} = \tfrac{1}{2}$$

και από τις δυο τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, οπότε, ως σειρά μη-αρνητικών όρων, αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόλυτη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει απολύτως** *αν η σειρά (με μη-αρνητικούς όρους)* $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ *συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν* $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε* x *ορίζουμε* $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ *και* $x^- = \frac{|x|-x}{2}$. *Ο* x^+ *ονομάζεται* **μη-αρνητικό μέρος** *του* x *και ο* x^- *ονομάζεται* **μη-θετικό μέρος** *του* x.

Για παράδειγμα, είναι $3^+ = 3$ και $3^- = 0$, είναι $(-3)^+ = 0$ και $(-3)^- = 3$ και είναι $0^+ = 0$ και $0^- = 0$.

Παρατηρήστε τις απλές σχέσεις:

$$x^+ + x^- = |x|, \quad x^+ - x^- = x, \quad 0 \leq x^+ \leq |x|, \quad 0 \leq x^- \leq |x|. \tag{8.18}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

[12] Προσέξτε την ομοιότητα αυτής της απόδειξης της απόκλισης της αρμονικής σειράς με την απόδειξη στο παράδειγμα 2.4.4, με τη λύση της άσκησης 2.5.4 και κυρίως με τη λύση της άσκησης 2.6.2.

Πρώτη απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει και έστω $\epsilon > 0$.
Σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_{m+1}| + \cdots + |x_n| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|x_{m+1} + \cdots + x_n| \leq |x_{m+1}| + \cdots + |x_n| < \epsilon$$

για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$.
Άρα, και πάλι σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
Τώρα, επειδή ισχύει $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$$

και, επομένως, $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
Από την πρόταση 8.7[α] και από τις ανισότητες (8.18) για τους x_n συνεπάγεται ότι και οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-$ συγκλίνουν.
Επειδή ισχύει $x_n = {x_n}^+ - {x_n}^-$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty}({x_n}^+ - {x_n}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| &= \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-\big| \leq \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+\big| + \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-\big| \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^- = \sum_{n=1}^{+\infty}({x_n}^+ + {x_n}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι ισχύει $|x_n| = {x_n}^+ + {x_n}^-$ για κάθε n. □

Αν δούμε την ανισότητα $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ ως γενίκευση των $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, $|x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$ κλπ, τότε δικαιολογείται ο όρος **τριγωνική ανισότητα** για την ανισότητα αυτή.

Παράδειγμα 8.3.2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ συγκλίνει διότι συγκλίνει απολύτως.
Πράγματι, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 8.3.3. Δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης.
Για παράδειγμα, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, αφού $\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.11. [α] *Αν ισχύει $|x_n| \leq y_n$ για κάθε n και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης, είναι $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η ακολουθία $\big(\frac{|x_n|}{y_n}\big)$ συγκλίνει ή, γενικότερα, είναι φραγμένη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.
[β] Άμεση συνέπεια της πρότασης 8.7 και του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης. □

Διάφορα σχόλια που είχαν γίνει μετά από την πρόταση 8.7 έχουν θέση και εδώ, μόνο που εφαρμόζονται στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ αντί της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Δηλαδή, τα ίδια σχόλια διατυπώνονται σε σχέση με την *απόλυτη σύγκλιση* της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Παράδειγμα 8.3.4. Για να μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ γράφουμε

$$\Big|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}\Big| = \frac{2^n}{3^n+2^n} = \big(\tfrac{2}{3}\big)^n \frac{1}{1+(2/3)^n},$$

οπότε

$$\left|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}\right|/\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 1.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως.

Θα παρατηρήσετε ότι τα επόμενα δύο κριτήρια που θα μελετήσουμε εφαρμόζονται, ουσιαστικά, σε σειρές με μη-αρνητικούς όρους: όταν, βάσει αυτών των κριτηρίων, προκύπτει θετικό συμπέρασμα, αυτό είναι η *απόλυτη σύγκλιση* μιας σειράς. Με άλλα λόγια, αν αντιμετωπίζουμε μια σειρά η οποία *συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως* (και δεν το γνωρίζουμε), τότε τα κριτήρια αυτά δεν θα δώσουν θετικό συμπέρασμα. Έτσι θα καταλάβουμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, οπότε απομένει να εξετάσουμε με τα κριτήρια που ακολουθούν[13] αν η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ ΤΟΥ D' ALEMBERT. *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε n.*
(i) Αν $\overline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) Αν $\underline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.
(iii) Αν $\underline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \leq \overline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a ώστε $\overline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < a < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq a$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0+1$ ισχύει

$$|x_n| = \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|\left|\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}\right||x_{n_0}| \leq aa\cdots a|x_{n_0}| = a^{n-n_0}|x_{n_0}| = \frac{|x_{n_0}|}{a^{n_0}}\,a^n = ca^n,$$

όπου $c = \frac{|x_{n_0}|}{a^{n_0}}$. Επειδή $0 \leq a < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|x_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|$ συγκλίνει.
(ii) Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, ισχύει

$$|x_n| \geq |x_{n-1}| \geq \cdots \geq |x_{n_0}| > 0$$

για κάθε $n \geq n_0+1$. Άρα δεν ισχύει $x_n \to 0$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν συγκλίνει.
(iii) Για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ είναι $\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| \to 1$ και $\left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| \to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει και η δεύτερη συγκλίνει. $\square$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΡΙΖΑΣ ΤΟΥ CAUCHY. *(i) Αν $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.*
(ii) Αν $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.
(iii) Αν $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} = 1$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a ώστε $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} < a < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$ και, επομένως,

$$|x_n| \leq a^n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 \leq a < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty}|x_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|$ συγκλίνει.
(ii) Ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ και, επομένως,

$$|x_n| \geq 1$$

για άπειρους n. Άρα δεν ισχύει $x_n \to 0$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν συγκλίνει.
(iii) Για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ είναι $\sqrt[n]{|1/n|} \to 1$ και $\sqrt[n]{|1/n^2|} \to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. $\square$

[13] δηλαδή, τα κριτήρια του Dirichlet, του Abel και των εναλλασσόμενων προσήμων.

Στην εφαρμογή των κριτηρίων λόγου και ρίζας σε συγκεκριμένες σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τις περισσότερες φορές υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}.$$

Τότε, όπως γνωρίζουμε (και το χρησιμοποιήσαμε στις αποδείξεις των μερών (iii) των δυο κριτηρίων) είναι $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim$.

Παράδειγμα 8.3.5. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\frac{a^{n+1}/(n+1)}{a^n/n}\right| = |a|\frac{n}{n+1} \to |a|.$$

Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι

$$\sqrt[n]{|a^n/n|} = |a|/\sqrt[n]{n} \to |a|.$$

Επομένως, αν $|a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|a| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δεν δίνει συμπέρασμα, οπότε εξετάζουμε τις περιπτώσεις $a = \pm 1$ ανεξάρτητα από τα δυο κριτήρια.
Αν $a = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.
Αν $a = -1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει (αλλά όχι απολύτως).
Συνολικά, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leq a < 1$ και συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $-1 < a < 1$.

Παράδειγμα 8.3.6. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\frac{a^{n+1}/(n+1)^2}{a^n/n^2}\right| = |a|\frac{n^2}{(n+1)^2} \to |a|.$$

Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$ η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι

$$\sqrt[n]{|a^n/n^2|} = |a|/(\sqrt[n]{n})^2 \to |a|.$$

Επομένως, αν $|a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|a| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δεν δίνει συμπέρασμα.
Αν $a = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, η οποία συγκλίνει απολύτως.
Αν $a = -1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, η οποία, επίσης, συγκλίνει απολύτως.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως αν $|a| \leq 1$ και αποκλίνει αν $|a| > 1$.

Παράδειγμα 8.3.7. Στη σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου.
Αν $a = 0$, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!}\right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε a.
Η εφαρμογή του κριτηρίου ρίζας είναι πιο δύσκολη. Είναι

$$\sqrt[n]{|a^n/n!|} = |a|/\sqrt[n]{n!}$$

και χρειαζόμαστε το όριο[14]

$$\sqrt[n]{n!} \to +\infty.$$

[14]Μια απόδειξη για το όριο αυτό είναι στην άσκηση 2.4.4. Εδώ έχουμε μια απλούστερη απόδειξη.

Αν ο n είναι άρτιος,

$$n! = 1 \cdots \tfrac{n}{2}(\tfrac{n}{2}+1)\cdots n \geq (\tfrac{n}{2}+1)\cdots n \geq (\tfrac{n}{2}+1)^{n/2} \geq (\tfrac{n+1}{2})^{n/2}.$$

Αν ο n είναι περιττός,

$$n! = 1 \cdots \tfrac{n-1}{2}\tfrac{n+1}{2}\cdots n \geq \tfrac{n+1}{2}\cdots n \geq (\tfrac{n+1}{2})^{(n+1)/2} \geq (\tfrac{n+1}{2})^{n/2}.$$

Άρα ισχύει $\sqrt[n]{n!} \geq (\frac{n+1}{2})^{1/2}$ για κάθε n, οπότε $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$. Επομένως,

$$\sqrt[n]{|a^n/n!|} \to 0 < 1,$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει απολύτως.
Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ είναι ιδιαιτέρως σημαντική και θα την ξαναδούμε στο παράδειγμα 8.5.2 και, κυρίως, στο κεφάλαιο 10. Στην περίπτωση $a = 1$ γνωρίζουμε ότι το άθροισμα της σειράς είναι ο αριθμός e.

Ίσως αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα κριτήρια λόγου και ρίζας στην περίπτωση που μπορούν να εφαρμοσθούν και τα δυο ταυτοχρόνως, δηλαδή, αν έχουμε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ για την οποία ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n. Η απάντηση είναι ότι *το κριτήριο ρίζας είναι ισχυρότερο από το κριτήριο λόγου*. Δηλαδή, αν το κριτήριο λόγου δίνει κάποιο αποτέλεσμα για τη σύγκλιση της σειράς, τότε και το κριτήριο ρίζας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα[15] ενώ υπάρχουν παραδείγματα σειρών για τα οποία το κριτήριο λόγου δεν δίνει αποτέλεσμα ενώ το κριτήριο ρίζας δίνει. Όμως, μερικές φορές, όπως στο τελευταίο παράδειγμα, είναι πιο εύκολο να εφαρμοσθεί το κριτήριο λόγου από το κριτήριο ρίζας.

Υπό συνθήκη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$* **συγκλίνει υπό συνθήκη** *αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Παράδειγμα 8.3.8. Λίγο πριν, στο παράδειγμα 8.3.3, αναφέραμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Δηλαδή, η σειρά αυτή συγκλίνει υπό συνθήκη.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε κάποια σχόλια για την έννοια της σύγκλισης μιας σειράς.
Έστω κατ' αρχάς μια σειρά με *μη-αρνητικούς* όρους. Το να συγκλίνει η σειρά είναι ισοδύναμο με το να είναι φραγμένα τα μερικά αθροίσματά της. Αυτά τα μερικά αθροίσματα δημιουργούνται με διαδοχική άθροιση των όρων της σειράς, οπότε είναι φανερό ότι για να είναι τα μερικά αθροίσματα φραγμένα πρέπει το μέγεθος των όρων (προσθετέων) να είναι αρκετά μικρό: "όταν προσθέτουμε μεγάλους αριθμούς βρίσκουμε μεγάλα αθροίσματα ενώ όταν προσθέτουμε μικρούς αριθμούς βρίσκουμε μικρά αθροίσματα". Αυτό φαίνεται και από την πρόταση 8.1 η οποία λέει ότι, αν μια σειρά συγκλίνει, τότε οι όροι της τείνουν στον 0. Όμως, η απλή σύγκλιση των όρων στον 0 δεν αρκεί από μόνη της να κάνει τη σειρά να συγκλίνει. Για παράδειγμα, και στις δυο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ οι όροι τείνουν στον 0, αλλά η πρώτη συγκλίνει ενώ η δεύτερη δεν συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι οι όροι της πρώτης σειράς είναι *πολύ μικρότεροι* από τους αντίστοιχους όρους της δεύτερης σειράς. Πράγματι: $\frac{1/n^2}{1/n} \to 0$. Δηλαδή, το μέγεθος των όρων της πρώτης σειράς είναι τόσο μικρό ώστε η σειρά συγκλίνει ενώ το μέγεθος των όρων της δεύτερης σειράς δεν είναι τόσο μικρό όσο θα έπρεπε για να συγκλίνει και αυτή. Αυτό το "παιχνίδι" με το μέγεθος των όρων φαίνεται καθαρά και στην πρόταση 8.7. Το βασικό της συμπέρασμα είναι ότι, αν μια σειρά με μεγαλύτερους όρους συγκλίνει, τότε και η σειρά με τους μικρότερους όρους συγκλίνει.
Όλα τα προηγούμενα έχουν ως βασική προϋπόθεση ότι αναφερόμαστε σε σειρές με μη-αρνητικούς όρους: *ένας μη-αρνητικός αριθμός ταυτίζεται με το μέγεθός του.*

[15] Δείτε την άσκηση 8.3.25.

Η κατάσταση αλλάζει κάπως όταν εργαζόμαστε με σειρές των οποίων οι όροι έχουν μεταβαλλόμενο πρόσημο. Και πάλι, για να συγκλίνει μια σειρά, πρέπει οι όροι της να τείνουν στον 0 και, επομένως, το μέγεθός τους συνεχίζει να παίζει ρόλο. Όμως, το μέγεθος των όρων δεν παίζει πια τον καθοριστικό ρόλο. Δείτε, για παράδειγμα τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Οι όροι τους έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος. Όμως, ενώ το μέγεθος αυτό δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η δεύτερη σειρά, είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η πρώτη σειρά. Ο λόγος είναι ότι από τα διαφορετικά πρόσημα προκαλείται αλληλοαναίρεση των όρων κατά την άθροισή τους και έτσι τα μερικά αθροίσματα παραμένουν "υπό έλεγχο". Αυτό ακριβώς το φαινόμενο παρατηρείται σε οποιαδήποτε σειρά που συγκλίνει υπό συνθήκη. Το μέγεθος των όρων της δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η σειρά απολύτως (δηλαδή να συγκλίνει η σειρά των μεγεθών των όρων) αλλά είναι αρκετά μικρό ώστε, *μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων*, η σειρά να συγκλίνει. Έτσι, το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης φαίνεται λογικό: αν το μέγεθος των όρων μιας σειράς είναι αρκετά μικρό ώστε η σειρά των μεγεθών αυτών να συγκλίνει, τότε είναι αρκετά μικρό ώστε, μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων, η σειρά των ίδιων των όρων να συγκλίνει.
Λόγω αυτής της διαφοράς ανάμεσα στη φύση της σύγκλισης των σειρών με μη-αρνητικούς όρους και στη φύση της σύγκλισης των σειρών με γενικούς όρους, υπάρχει και αντίστοιχη διαφορά ανάμεσα στις χρησιμοποιούμενες μεθόδους μελέτης της σύγκλισής τους. Για παράδειγμα, η "σύγκριση" αντίστοιχων όρων όπως αυτή εκφράζεται στα δυο μέρη της πρότασης 8.7 και στα αντίστοιχα μέρη της πρότασης 8.10 δεν εφαρμόζεται σε σειρές που συγκλίνουν υπό συνθήκη, ακριβώς επειδή πρόκειται για σύγκριση των *μεγεθών* των αντίστοιχων όρων. Η μέθοδος της "σύγκρισης" εφαρμόζεται μόνο για τη μελέτη της σύγκλισης σειρών μη-αρνητικών όρων ή της απόλυτης σύγκλισης σειρών (δηλαδή, και πάλι, της σύγκλισης σειρών μη-αρνητικών όρων). Οι μέθοδοι μελέτης της σύγκλισης σειρών, οι οποίες δεν συγκλίνουν απολύτως, είναι αυτές που θα δούμε τώρα: *τα κριτήρια του Dirichlet και του Abel και, ως πόρισμα, το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.*

ΤΥΠΟΣ ΑΘΡΟΙΣΗΣ ΤΟΥ ABEL. *Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και $s_n = a_1+\cdots+a_n$ τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Για κάθε n, m με $n > m$ ισχύει*

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m+1}^{n}(s_k - s_{k-1})b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}.\end{aligned}$$

□

Στον τύπο άθροισης του Abel παρατηρήστε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η "μετάβαση" από το άθροισμα $\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k$ στο $\sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}$. Τη θέση των a_k παίρνουν τα διαδοχικά μερικά αθροίσματά τους s_k και τη θέση των b_k παίρνουν οι διαδοχικές διαφορές τους $b_k - b_{k+1}$. Εμφανίζονται και οι "ακραίοι" όροι $s_n b_{n+1}$ και $s_m b_{m+1}$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ DIRICHLET. *Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Αν η (b_n) είναι φθίνουσα, αν $b_n \to 0$ και αν η (s_n) είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Επίσης, επειδή η (b_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, ισχύει $b_n \geq 0$ για κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $b_n \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $n \geq n_0$. Βάσει του τύπου

άθροισης του Abel, για κάθε n,m με $n>m\geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m+1}^{n}a_kb_k\right| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n}s_k(b_k-b_{k+1})+s_nb_{n+1}-s_mb_{m+1}\right|\\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n}|s_k|(b_k-b_{k+1})+|s_n|b_{n+1}+|s_m|b_{m+1}\\ &\leq M\sum_{k=m+1}^{n}(b_k-b_{k+1})+Mb_{n+1}+Mb_{m+1}\\ &= M(b_{m+1}-b_{n+1})+Mb_{n+1}+Mb_{m+1}=2Mb_{m+1}\leq \tfrac{2M\epsilon}{2M+1}<\epsilon.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Cauchy συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ συγκλίνει. □

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ ABEL. *Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και $s_n=a_1+\cdots+a_n$ τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Αν η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Η (b_n) συγκλίνει, οπότε έστω $b_n\to b$.
Βάσει του κριτηρίου του Dirichlet, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(b_n-b)$ συγκλίνει.
Τώρα, ισχύει $a_nb_n=a_n(b_n-b)+a_nb$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(b_n-b)+\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(b_n-b)+b\sum_{n=1}^{+\infty}a_n,$$

οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ συγκλίνει. □

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ ΠΡΟΣΗΜΩΝ. *Αν η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $b_n\to 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n=b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Είναι $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}=\begin{cases}0, & \text{αν } n \text{ άρτιος}\\ 1, & \text{αν } n \text{ περιττός}\end{cases}$ Άρα, βάσει του κριτηρίου του Dirichlet, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 8.3.9. Τυπικά παραδείγματα είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, όταν $0<p\leq 1$. Οι σειρές αυτές συγκλίνουν υπο συνθήκη.
Οι απλούστερες από αυτές είναι οι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac12+\frac13-\frac14+\cdots$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt n}=1-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt4}+\cdots$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει.

Ασκήσεις.

8.3.1. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου όπου είναι δυνατό: $\sum_{n=1}^{+\infty}n^3$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^nn!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n(n+1)!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10^nn!(3n)!}{(4n)!}$.

8.3.2. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας όπου είναι δυνατό: $\sum_{n=1}^{+\infty}n^3$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}n^32^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}e^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}$.

8.3.3. Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών $\frac12+\frac13+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ και $\frac12+1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^6}+\cdots$, εφαρμόζοντας τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

8.3.4. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac1n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\frac1n)$.

8.3.5. Εξετάστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+(-1)^nn}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+6(-1)^nn}$ ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

8.3.6. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(e-(1+\frac1n)^n\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[n]{n}}$ συγκλίνουν υπό συνθήκη.

8.3.7. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|x| > 1$.

8.3.8. [α] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνουν απολύτως.
[β] Αν $0 \leq r < 1$, αποδείξτε ότι

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}, \qquad 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx) = \frac{2r\sin x}{1-2r\cos x + r^2}.$$

[γ] Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to 0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ συγκλίνει αν $x \neq m2\pi$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνει για κάθε x.
Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n\log n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \frac{\sin(nx)}{n}$ συγκλίνουν για κάθε x.

8.3.9. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{2x}\, dx = \log\sqrt{n+1}$ για κάθε n. Κατόπιν, βάσει της $1 + x \leq e^x$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ συγκλίνει.[16]
Αποδείξτε ότι $1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{2x-1}\, dx = 1 + \log\sqrt{2n-1}$ για κάθε n. Κατόπιν, βάσει της $1 + x \leq e^x$, αποδείξτε ότι $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \geq \frac{1}{e\sqrt{2n-1}}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ δεν συγκλίνει απολύτως.
Τί έχετε να πείτε για τις $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \big(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\big)^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \big(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\big)^3$ ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση;

8.3.10. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και η ακολουθία (b_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει απολύτως.

8.3.11. Έστω (b_n) φθίνουσα ώστε $b_n \to 0$. Έστω $s = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$ και τα μερικά αθροίσματα $s_n = b_1 - b_2 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n$. Αποδείξτε ότι $0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq b_{n+1}$ για κάθε n.

8.3.12. [17] [α] Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{p'}}$ συγκλίνει, αν $p' > p$, και συγκλίνει απολύτως, αν $p' > p + 1$.
[β] Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{p_0}}$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αποδείξτε ότι υπάρχουν p_1, p_2 ώστε $p_1 \leq p_0 \leq p_2$ και $p_2 - p_1 \leq 1$ και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ να αποκλίνει, αν $p < p_1$, να συγκλίνει υπό συνθήκη, αν $p_1 < p < p_2$, και να συγκλίνει απολύτως, αν $p > p_2$.

8.3.13. Έστω $u_n \to u > 0$ και $|x| < 1$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{u_1 + \cdots + u_n}$ συγκλίνει απολύτως.

8.3.14. [18] Έστω ότι η ακολουθία (b_n) είναι μονότονη και $b_n \to l$. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_k$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, s_n - \underline{\lim}\, s_n = |l|$.

8.3.15. Έστω $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 2$. Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και $\overline{\lim} \left| \frac{x_{n+m}}{x_n} \right| < 1$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.[19]

8.3.16. Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ αποκλίνει. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n} \leq 0 \leq \overline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n}$.

---

[16] Αργότερα, στην ενότητα 10.2, θα δούμε, ως ειδική περίπτωση του γενικού διωνυμικού τύπου του Newton, ότι το άθροισμα της σειράς αυτής είναι ο αριθμός $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

[17] Μια σημαντική άσκηση. Περιγράφεται μια "διάταξη" των σειρών $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ σε σχέση με τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλισή τους ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου p. Οι σειρές αυτές ονομάζονται **σειρές Dirichlet** και εμφανίζονται στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών. Δείτε την άσκηση 10.1.25. Επίσης, την άσκηση 10.1.26 και τη σχετική υποσημείωση για το σημαντικότερο παράδειγμα τέτοιας σειράς, την *ζ- συνάρτηση του Riemann*.

[18] Ένα συμπλήρωμα του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων.

[19] Η περίπτωση $m = 1$ είναι το κριτήριο λόγου.

8.3.17. Βρείτε ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $b_n > 0$ για κάθε n, ώστε $b_n \to 0$ και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ να αποκλίνει.

8.3.18. Βρείτε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ η οποία συγκλίνει και ακολουθία (b_n) ώστε $b_n \to 0$, ώστε να ισχύει $b_n \geq 0$ για κάθε n και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ να αποκλίνει.

8.3.19. Βρείτε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία συγκλίνει ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^2$ να αποκλίνει.

8.3.20. Έστω ότι η ακολουθία (a_n) είναι περιοδική. Δηλαδή, υπάρχει p ώστε να ισχύει $a_{n+p} = a_n$ για κάθε n. Έστω, επίσης, ότι η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $b_n \to 0$.
Αν $a_1 + \cdots + a_p = 0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
Αν $a_1 + \cdots + a_p \neq 0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει.
Αποδείξτε ότι η $\frac{p}{1} - \frac{q}{2} + \frac{p}{3} - \frac{q}{4} + \frac{p}{5} - \frac{q}{6} + \cdots$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p = q$.
Αποδείξτε ότι η $\frac{p}{1} - \frac{q}{2} + \frac{r}{3} + \frac{p}{4} - \frac{q}{5} + \frac{r}{6} + \cdots$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p + r = q$.

8.3.21. Έστω ακολουθία (x_n) και $y_n = n(x_n - x_{n+1})$ για κάθε n.
Αν $nx_n \to a$ και $a \neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ αποκλίνουν.
Αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι $nx_n \to 0$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.
Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

8.3.22. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}| < \epsilon$ για κάθε k και για κάθε (διαφορετικούς) $n_1, \ldots, n_k$ με $n_1, \ldots, n_k \geq n_0$.

8.3.23. [20] Έστω $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^q < +\infty$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει απολύτως και ότι ισχύει η **ανισότητα του Hölder** για σειρές,

$$\Big| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \Big| \leq \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^q \Big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s|a_n|^p = t|b_n|^q$ για κάθε n και είτε $a_n b_n \geq 0$ για κάθε n είτε $a_n b_n \leq 0$ για κάθε n.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$, επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η πολύ σημαντική **ανισότητα του Cauchy**,

$$\Big| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \Big| \leq \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 \Big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για σειρές,

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p \Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p \Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s|a_n| = t|b_n|$ για κάθε n και είτε $a_n b_n \geq 0$ για κάθε n είτε $a_n b_n \leq 0$ για κάθε n.

8.3.24. Έστω ότι ισχύει $w_n > 0$ για κάθε n και $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = 1$. Αν η $g : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα I και ισχύει $a_n \in I$ για κάθε n και η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w_n$ συγκλίνει, αποδείξτε την **ανισότητα του Jensen** για σειρές,

$$g\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w_n \Big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g(a_n) w_n.$$

Αν η g είναι κοίλη στο I, αποδείξτε ότι ισχύει η αντίστροφη ανισότητα.
Αν, επιπλέον, η g είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο I, αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν οι αριθμοί $a_1, a_2, a_3, \ldots$ είναι ίσοι μεταξύ τους.

[20] Η συνέχεια της άσκησης 8.2.21.

8.3.25. Χρησιμοποιώντας την άσκηση 2.7.13, αποδείξτε ότι, όταν το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση ή απόκλιση σειράς, το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο ρίζας.

8.3.26. [21] Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{N}$. Από κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δημιουργούμε μια νέα σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ως εξής: θέτουμε $y_1 = x_1 + \cdots + x_{f(1)}$ και $y_n = x_{f(n-1)+1} + \cdots + x_{f(n)}$ για κάθε $n \geq 2$.
Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.
Ως αντιπαράδειγμα για το αντίστροφο, θεωρήστε την $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f(k) = 2k$ και τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$.
Έστω ότι υπάρχει M ώστε να ισχύει $f(k+1) - f(k) \leq M$ για κάθε k και έστω $x_n \to 0$. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.
Ορίζουμε, επιπλέον, $y_1' = |x_1| + \cdots + |x_{f(1)}|$ και $y_n' = |x_{f(n-1)+1}| + \cdots + |x_{f(n)}|$ για κάθε $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι, αν $y_n' \to 0$ και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.

8.3.27. [22] [α] Αν η (b_n) είναι μονότονη και φραγμένη αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.
[β] Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και τα μερικά αθροίσματα $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ της πρώτης.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$, αν $b_n \to 0$ και αν η (s_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$ και αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
[γ] Αποδείξτε ότι η ακολουθία (b_n) είναι διαφορά δυο μονότονων φραγμένων ακολουθιών αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.

8.3.28. [23] [α] Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε n και έστω ότι ισχύει τελικά $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.
[β][24] Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και έστω ότι υπάρχει μ ώστε $n\big(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - 1 + \frac{\mu}{n}\big) \to 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, αν $\mu > 1$, και δεν συγκλίνει απολύτως, αν $\mu < 1$.
Έστω $\mu = 1$ και έστω ότι υπάρχει λ ώστε $n \log n\big(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n \log n}\big) \to 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, αν $\lambda > 1$, και δεν συγκλίνει απολύτως, αν $\lambda < 1$.
Βρείτε αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ συγκλίνει.

8.3.29. [25] Έστω ότι ισχύει $|x_{n,m}| \leq y_n$ για κάθε n, m και $\lim_{m\to+\infty} x_{n,m} = x_n$ για κάθε n. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, αποδείξτε ότι για κάθε m η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n,m}$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, επίσης, και, τέλος,

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} x_{n,m} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{m\to+\infty} x_{n,m}.$$

8.4 Διαδοχική άθροιση διπλών σειρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω συνάρτηση $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Δηλαδή, σε κάθε ζεύγος (m, n) φυσικών αντιστοιχίζεται μέσω της x ο αριθμός $x(m, n)$. Κάθε τέτοια συνάρτηση x χαρακτηρίζεται* **διπλή ακολουθία** *και, όπως με τις συνήθεις ακολουθίες, προτιμάμε το σύμβολο $x_{m,n}$ αντί του $x(m, n)$. Δηλαδή*

$$x_{m,n} = x(m, n).$$

[21] Η άσκηση αυτή περιγράφει τον μηχανισμό της **ομαδοποίησης** των όρων μιας σειράς. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ προκύπτει από τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με **εισαγωγή παρενθέσεων** και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ προκύπτει από τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ με **διαγραφή παρενθέσεων**.

[22] Λέμε ότι η ακολουθία (b_n) έχει **φραγμένη κύμανση** αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$. Στο [β] περιγράφονται πρώτα το **κριτήριο του Dedekind** και κατόπιν το **κριτήριο του DuBois-Reymond**. Παρατηρήστε ότι το κριτήριο του Dedekind είναι γενίκευση του κριτηρίου του Dirichlet και το κριτήριο του DuBois-Reymond είναι γενίκευση του κριτηρίου του Abel.

[23] Η συνέχεια της άσκησης 8.2.13.

[24] Το **κριτήριο του Gauss**. Ένα χρήσιμο κριτήριο σε περιπτώσεις που το κριτήριο λόγου του d' Alembert αποτυγχάνει.

[25] Η πιο χρήσιμη μέθοδος εναλλαγής των συμβόλων της σειράς και του ορίου ακολουθίας.

Για τη διπλή ακολουθία x χρησιμοποιούμε και τα σύμβολα

$$(x_{m,n}) \quad ή \quad (x_{m,n})_{m,n=1}^{+\infty}.$$

Σ' αυτήν την ενότητα θα μας απασχολήσει το θέμα της άθροισης διπλών ακολουθιών. Το αντίστοιχο θέμα για τις συνήθεις ακολουθίες είναι το θέμα αυτού του κεφαλαίου, δηλαδή οι σειρές. Άρα σ' αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις λεγόμενες **διπλές σειρές**. Και μάλιστα, δεν θα εξετάσουμε τη γενική θεωρία των διπλών σειρών και τους πολλούς διαφορετικούς τρόπους άθροισής τους. Θα εξετάσουμε μόνο ένα ειδικό αλλά αρκετά χρήσιμο θέμα, το θέμα της λεγόμενης **διαδοχικής άθροισης διπλών σειρών**, και θα δούμε μόνο δυο βασικά αποτελέσματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για μια διπλή σειρά είναι*

$$\textstyle\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n} \quad ή \quad \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{m,n}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο πρώτος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση* **πρώτα κατά γραμμές**. *Αυτό σημαίνει ότι, κατ' αρχάς, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, δηλαδή το*

$$\textstyle\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big).$$

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά γραμμές.

Ο δεύτερος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση **πρώτα κατά στήλες**. *Αυτό σημαίνει ότι, κατ' αρχάς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $t_n = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n$, δηλαδή το*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big).$$

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά στήλες.

Ο τρίτος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση **πρώτα κατά διαγωνίους**. *Αυτό σημαίνει ότι, κατ' αρχάς, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε το άθροισμα $u_k = \sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, δηλαδή το*

$$\textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big).$$

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους.

Οι όροι "στήλες", "γραμμές" και "διαγώνιοι" προέρχονται, προφανώς, από τη θεωρία των *πινάκων*. Φανταζόμαστε ότι οι αριθμοί $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \ldots$ διατάσσονται στην πρώτη σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αμέσως από κάτω διατάσσονται οι αριθμοί $x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \ldots$, αμέσως από κάτω από αυτούς διατάσσονται οι $x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, \ldots$ και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργείται ένας "άπειρος" πίνακας με το στοιχείο $x_{1,1}$ στην πάνω αριστερή γωνία του και ο οποίος εκτείνεται απεριόριστα προς τα δεξιά και προς τα κάτω. Το στοιχείο $x_{m,n}$ είναι στην τομή της m-οστής γραμμής και της n-οστής στήλης.

Όταν έχουμε πεπερασμένα αθροίσματα τα πράγματα είναι απλά. Για παράδειγμα, ισχύει:

$$\textstyle\sum_{m=1}^{M} \big(\sum_{n=1}^{N} x_{m,n} \big) = \sum_{n=1}^{N} \big(\sum_{m=1}^{M} x_{m,n} \big)$$

διότι η σειρά με την οποία γίνεται η πρόσθεση *πεπερασμένου* πλήθους αριθμών δεν επηρεάζει την τιμή του αθροίσματος. Δείτε, όμως, το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.4.1. Έστω $x_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{αν } m-n=1 \\ -1, & \text{αν } m-n=-1 \\ 0, & \text{αν } m-n \neq \pm 1 \end{cases}$

Εδώ ο άπειρος πίνακας έχει στοιχεία 1 στην διαγώνιο ακριβώς κάτω από την κύρια διαγώνιο και στοιχεία -1 στην διαγώνιο ακριβώς πάνω από την κύρια διαγώνιο. Κάθε αλλο στοιχείο είναι 0.
Τότε, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{1,n} = -1$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} = 0$ για κάθε $m \geq 2$, οπότε $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = -1$.
Επίσης, $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,1} = 1$ και $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} = 0$ για κάθε $n \geq 2$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = 1$.
Τέλος, είναι $\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} = 0$ για κάθε k, οπότε $\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big) = 0$.
Επομένως, οι τρεις τρόποι άθροισης της διπλής σειράς δίνουν τρία διαφορετικά αποτελέσματα.

Έστω διπλή σειρά η οποία έχει μη-αρνητικούς όρους, δηλαδή έστω ότι ισχύει $x_{m,n} \geq 0$ για κάθε m, n.
Τότε, για κάθε m, το άθροισμα $s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.
Τώρα, μια πρώτη περίπτωση είναι όταν ο s_m είναι αριθμός για κάθε m. Τότε, όπως γνωρίζουμε, το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Μια δεύτερη περίπτωση είναι όταν για τουλάχιστον έναν m_0 είναι $s_{m_0} = +\infty$. Παρατηρήστε τότε ότι όταν υπολογίζουμε ένα μερικό άθροισμα της $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, αυτό είναι ένα συνηθισμένο άθροισμα πεπερασμένου πλήθους στοιχείων στο οποίο δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, αφού όλα αυτά τα στοιχεία ανήκουν στο $[0, +\infty]$. Και, ειδικώτερα, για κάθε $k \geq m_0$ είναι $s_1 + \cdots + s_k = +\infty$ αφού κάθε τέτοιο άθροισμα περιέχει τον όρο s_{m_0}. Επομένως, τα μερικά αθροίσματα έχουν όριο το $+\infty$, οπότε το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$ υπάρχει και είναι $+\infty$. Συμπεραίνουμε ότι σε κάθε περίπτωση το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, δηλαδή το $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.
Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$, δηλαδή ότι είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.
Η κατάσταση με την άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους είναι λίγο πιο απλή. Για κάθε k το άθροισμα $\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}$ είναι, προφανώς, αριθμός ≥ 0, οπότε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big)$ είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.
Οπότε προκύπτει το ερώτημα αν τα τρία αθροίσματα σχετίζονται και, ειδικώτερα, αν είναι ίσα. Στο ερώτημα αυτό απαντά το θεώρημα 8.2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2. *Έστω ότι ισχύει $x_{m,n} \geq 0$ για κάθε m, n. Τότε*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \Big).$$

Δηλαδή, για σειρές με μη-αρνητικούς όρους οι τρεις τρόποι άθροισης δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.

Απόδειξη. Για κάθε m είναι

$$\begin{aligned} s_1 + \cdots + s_m &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_{1,n} + \cdots + \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_{1,n} + \cdots + x_{m,n}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big). \end{aligned}$$

Δηλαδή το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$ είναι άνω φράγμα των μερικών αθροισμάτων $s_1 + \cdots + s_m$ για κάθε m, οπότε

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big) = \sum_{m=1}^{+\infty} s_m \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big).$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τη συμμετρική σχέση

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big)$$

και καταλήγουμε στην ισότητα $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$.
Τώρα δημιουργούμε μια νέα διπλή σειρά, ορίζοντας

$$y_{m,n} = \begin{cases} x_{m,n-m+1}, & \text{αν } m \leq n \\ 0, & \text{αν } m > n \end{cases}$$

Επειδή ισχύει $y_{m,n} \geq 0$ για κάθε m, n, μπορούμε να εφαρμόσουμε το μέχρι τώρα αποτέλεσμα στη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n}$. Δηλαδή,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n} \big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} y_{m,n} \big). \tag{8.19}$$

Παρατηρούμε, όμως, ότι τα δυο μέλη της (8.19) είναι

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n} \big) = \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} y_{m,n} \big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big).$$

Άρα η (8.19) γίνεται $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η διπλή σειρά* $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ **συγκλίνει απολύτως** *αν*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} |x_{k-l+1,l}| \big) < +\infty.$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι όταν θέλουμε να δούμε αν μια διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ συγκλίνει απολύτως, τότε αρκεί να δούμε αν *ένα μόνο* από τα τρία αθροίσματα $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big)$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} |x_{k-l+1,l}| \big)$ είναι αριθμός (και όχι $+\infty$), διότι τα τρία αθροίσματα είναι, σύμφωνα με το θεώρημα 8.2, ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3. *Αν η διπλή σειρά* $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ *συγκλίνει απολύτως, τότε*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big)$$

και η κοινή τιμή των τριών αθροισμάτων είναι αριθμός.

Απόδειξη. Από το $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) < +\infty$ συνεπάγεται, προφανώς, ότι για κάθε m ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}| < +\infty$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ συγκλίνει και το άθροισμα $s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ είναι αριθμός. Ομοίως, για κάθε n η $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}$ συγκλίνει και το άθροισμα $t_n = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}$ είναι αριθμός.
Κατόπιν, για κάθε m ισχύει $|s_m| = \big| \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}|$ και, επομένως, $\sum_{m=1}^{+\infty} |s_m| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) < +\infty$. Άρα η $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$ συγκλίνει και το

$$s = \sum_{m=1}^{+\infty} s_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$$

είναι αριθμός.
Ομοίως, για κάθε n η $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n$ συγκλίνει και το

$$t = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$$

είναι αριθμός.
Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι $s = t$.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) < +\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν m_0, n_0 ώστε, αντιστοίχως,

$$\sum_{m=m_0+1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) < \tfrac{\epsilon}{4}, \qquad \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) < \tfrac{\epsilon}{4}. \tag{8.20}$$

Τώρα γράφουμε

$$\begin{aligned} s - \sum_{m=1}^{m_0} \big(\sum_{n=1}^{n_0} x_{m,n} \big) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) - \sum_{m=1}^{m_0} \big(\sum_{n=1}^{n_0} x_{m,n} \big) \\ &= \sum_{m=1}^{m_0} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) + \sum_{m=m_0+1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) \\ &\quad - \sum_{m=1}^{m_0} \big(\sum_{n=1}^{n_0} x_{m,n} \big) \\ &= \sum_{m=1}^{m_0} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} - \sum_{n=1}^{n_0} x_{m,n} \big) + \sum_{m=m_0+1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) \\ &= \sum_{m=1}^{m_0} \big(\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} x_{m,n} \big) + \sum_{m=m_0+1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) \\ &= \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{m_0} x_{m,n} \big) + \sum_{m=m_0+1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big), \end{aligned}$$

οπότε από τις (8.20) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Big|s-\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\Big)\Big| &\le \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{m_0}|x_{m,n}|\Big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\Big)\\ &\le \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\Big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\Big)\\ &< \tfrac{\epsilon}{4}+\tfrac{\epsilon}{4}=\tfrac{\epsilon}{2}\,.\end{aligned}\tag{8.21}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχτεί και η ανάλογη σχέση

$$\Big|t-\sum_{n=1}^{n_0}\Big(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\Big)\Big|<\tfrac{\epsilon}{2}.\tag{8.22}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\Big)=\sum_{n=1}^{n_0}\Big(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\Big).\tag{8.23}$$

Από τις (8.21), (8.22) και (8.23) έχουμε

$$|s-t|\le\Big|s-\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\Big)\Big|+\Big|t-\sum_{n=1}^{n_0}\Big(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\Big)\Big|<\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι ισχύει $|s-t|<\epsilon$ για κάθε $\epsilon>0$, οπότε $s=t$.

Τώρα, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 8.2, ορίζουμε $y_{m,n}=\begin{cases}x_{m,n-m+1}\,, & \text{αν } m\le n\\ 0, & \text{αν } m>n\end{cases}$

Έτσι προκύπτει μια νέα διπλή σειρά η οποία συγκλίνει απολύτως, διότι $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|y_{m,n}|\big)=\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<+\infty$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το μέχρι τώρα αποτέλεσμα στη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}y_{m,n}$. Δηλαδή,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}y_{m,n}\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}y_{m,n}\Big).$$

Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 8.2, είναι

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}y_{m,n}\Big)=\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}y_{m,n}\Big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{l=1}^{k}x_{k-l+1,l}\Big).$$

Άρα $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k}x_{k-l+1,l}\big)$. □

Ασκήσεις.

8.4.1. Έστω ότι ισχύει $0\le x_{m,n}\le y_{m,n}$ για κάθε m,n. Αν η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}y_{m,n}$ συγκλίνει ως προς οποιονδήποτε από (και, επομένως, ως προς όλους) τους τρεις τρόπους άθροισης, αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}x_{m,n}$. Αν s_x είναι η κοινή τιμή των διαδοχικών αθροισμάτων της $\sum_{m,n=1}^{+\infty}x_{m,n}$ και s_y είναι η κοινή τιμή των διαδοχικών αθροισμάτων της $\sum_{m,n=1}^{+\infty}y_{m,n}$, αποδείξτε ότι $s_x\le s_y$.

8.4.2. Βρείτε την τιμή των τριών διαδοχικών αθροισμάτων της διπλής σειράς $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)!}$.

8.4.3. Αποδείξτε ότι η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^pn^q}$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p,q>1$.

8.4.4. Αποδείξτε ότι η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)^p}$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p>2$.

8.4.5. Εξετάστε ως προς τους τρεις τρόπους διαδοχικής άθροισης τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}x_{m,n}$, όπου $x_{m,n}=\frac{1}{m+1}(\frac{m}{m+1})^n-\frac{1}{m+2}(\frac{m+1}{m+2})^n$ για κάθε m,n.

8.4.6. Γράψτε τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$ ως διπλή σειρά με τέτοιο τρόπο ώστε να αποδείξετε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{1-x^{2k-1}}$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

8.4.7. Αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)^2}$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

8.4.8. Έστω $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ και $g(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}b_mx^m$ για κάθε $x\in(-R,R)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty}a_ng(x^n)=\sum_{m=1}^{+\infty}b_mf(x^m)$ για κάθε $x\in(-R_1,R_1)$, όπου $R_1=\min\{R,1\}$.

8.5 Γινόμενο Cauchy σειρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω οι σειρές* $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *. Σχηματίζουμε τους όρους μιας νέας σειράς* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ *ως εξής:* $c_0 = a_0 b_0$ *,* $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$ *,* $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$ *και, γενικότερα,*

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k \qquad \textit{για κάθε } k \geq 0.$$

Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \Big)$$

ονομάζεται **γινόμενο Cauchy** *των* $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$*.*

Η ιδέα για αυτού του είδους πολλαπλασιασμό προέρχεται από τις *δυναμοσειρές*, δηλαδή σειρές της μορφής $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$. Αυτές τις σειρές θα τις μελετήσουμε στο κεφάλαιο 10. Αν πολλαπλασιάσουμε τις σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ όπως πολλαπλασιάζουμε δυο πολυώνυμα, δηλαδή ομαδοποιώντας ίδιες δυνάμεις του x, βλέπουμε ότι σχηματίζεται η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, της οποίας οι συντελεστές c_n δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.4. [26] *Αν οι σειρές* $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *συγκλίνουν απολύτως, τότε το γινόμενο Cauchy* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ *των δυο σειρών συγκλίνει απολύτως και*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=0}^{+\infty} x_{m,n}$, ορίζοντας $x_{m,n} = a_m b_n$ για κάθε $m, n \geq 0$. Η διπλή σειρά συγκλίνει απολύτως διότι

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \ \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα 8.3 και βρίσκουμε

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} x_{k-l,l} \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} \big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n} \big).$$

Συνεπάγεται

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το θεώρημα 8.2 στη σειρά $\sum_{m,n=0}^{+\infty} |x_{m,n}|$ για την τελευταία ισότητα παρακάτω, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| &= \sum_{k=0}^{+\infty} \big| \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \big| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} |a_{k-l}| |b_l| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \ \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

οπότε η $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ συγκλίνει απολύτως. □

Παράδειγμα 8.5.1. Γινόμενο Cauchy της σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ με τον εαυτό της.
Είναι $1 \cdot 1 = 1$ και

$$a^k 1 + a^{k-1} a + \cdots + a a^{k-1} + 1 a^k = (k+1) a^k$$

για κάθε k. Άρα το γινόμενο Cauchy της $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ με τον εαυτό της είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k$.
Αν $|a| < 1$, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, και η $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k$ συγκλίνει απολύτως και

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k = \sum_{m=0}^{+\infty} a^m \ \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{(1-a)^2} \qquad \text{αν } |a| < 1.$$

[26] Δείτε την άσκηση 8.5.4 για έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης, χωρίς χρήση διπλών σειρών, του τύπου $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ και, μάλιστα, με ασθενέστερες υποθέσεις: μόνο η μια από τις δυο σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ χρειάζεται να συγκλίνει απολύτως ενώ η άλλη πρέπει, απλώς, να συγκλίνει. Αν μια από τις δυο σειρές δεν συγκλίνει απολύτως, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε, εν γένει, ότι το γινόμενο Cauchy συγκλίνει απολύτως. Ένα ακόμη σχετικό αποτέλεσμα είναι στην άσκηση 10.2.21.

Παράδειγμα 8.5.2. Γνωρίζουμε ότι οι σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{a^m}{m!}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{n!}$ συγκλίνουν απολύτως για κάθε a,b.
Είναι $1\cdot 1=1$ και, βάσει του διωνυμικού τύπου του Newton, είναι

$$\frac{a^k}{k!}1+\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}\frac{b^1}{1!}+\cdots+\frac{a^1}{1!}\frac{b^{k-1}}{(k-1)!}+1\frac{b^k}{k!}=\frac{(a+b)^k}{k!}$$

για κάθε k. Άρα το γινόμενο Cauchy των $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{a^m}{m!}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{n!}$ είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a+b)^k}{k!}$, οπότε

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a+b)^k}{k!}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{a^m}{m!}\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{n!}.$$

Οι σειρές αυτές και ο τύπος στον οποίο καταλήξαμε σχετίζονται άμεσα με την εκθετική συνάρτηση. Δείτε την άσκηση 8.5.3. Το θέμα αυτό θα μελετηθεί διεξοδικά στο κεφάλαιο 10.

Ασκήσεις.

8.5.1. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}a^k=\frac{1}{(1-a)^3}$ για κάθε $a\in(-1,1)$.

8.5.2. Αποδείξτε ότι $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)}=e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ για κάθε $x\neq 0,-1,-2,\ldots$, χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα της άσκησης 5.2.14.

8.5.3. Για κάθε x ορίζουμε $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Στο παράδειγμα 8.5.2 αποδείξαμε ότι για κάθε a,b ισχύει $f(a+b)=f(a)f(b)$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $f(0)=1$ και $f(1)=e$.
Αποδείξτε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στον 0.
Βάσει της άσκησης 4.2.12[γ], αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)=e^x$ για κάθε x, δηλαδή ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ για κάθε x. Αυτό θα το ξανααποδείξουμε με δυο τρόπους στο κεφάλαιο 10.

8.5.4. Αποδείξτε το **θεώρημα του Mertens**: *αν η μια από τις σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty}a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ συγκλίνει απολύτως και η άλλη συγκλίνει, τότε το γινόμενο Cauchy $\sum_{k=0}^{+\infty}c_k$ των δυο σειρών συγκλίνει και $\sum_{k=0}^{+\infty}c_k=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m\ \sum_{n=0}^{+\infty}b_n$.*
Η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της αποκλίνει.
Γνωρίζουμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}z_k$, όπου $z_k=\frac{2}{k+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})$ για κάθε k, και ότι αυτή η σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.
Θεωρήστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{4^m}$ και αποδείξτε, χωρίς να εφαρμόσετε το θεώρημα του Mertens, ότι το γινόμενο Cauchy τους συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.

8.6 Αναδιατάξεις σειρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωρούμε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, $\sigma(3)$, $\ldots$ περιλαμβάνουν κάθε φυσικό αριθμό ακριβώς μια φορά ή, με άλλα λόγια, αποτελούν μια* **αναδιάταξη των φυσικών αριθμών***.*
Τώρα, έστω ακολουθία (x_n). Αν συμβολίσουμε $x_n'=x_{\sigma(n)}$ τότε η ακολουθία (x_n') ονομάζεται **αναδιάταξη** *της (x_n). Επίσης, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n'$ είναι μια* **αναδιάταξη** *της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$.*

Αν

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}x_k \quad \text{και} \quad s_n'=\sum_{k=1}^{n}x_k',$$

για κάθε n, είναι τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}'$, τότε δεν μπορούμε να περιμένουμε οι αριθμοί s_n και s_n' να είναι ίδιοι. Το άθροισμα s_n περιέχει τους $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ενώ το s_n' τους $x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}$. Επομένως, δεν είναι καθόλου βέβαιο (και, εν γένει, δεν ισχύει) ότι $\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}s_n'$ ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n'$. Μπορεί η μια σειρά να συγκλίνει ενώ η άλλη να αποκλίνει ή να συγκλίνουν και οι δυο αλλά να έχουν διαφορετικά αθροίσματα.

Παράδειγμα 8.6.1. Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ συγκλίνει. Τώρα, η σειρά $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$ είναι αναδιάταξη της προηγούμενης. Θα αποδείξουμε ότι και η δεύτερη σειρά συγκλίνει, αλλά ότι έχει διαφορετικό άθροισμα από την πρώτη.

Αν s_n είναι τα μερικά αθροίσματα της δεύτερης σειράς, τότε

$$s_{3n} = \big(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\big) + \big(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\big) + \cdots + \big(\tfrac{1}{4n-3} + \tfrac{1}{4n-1} - \tfrac{1}{2n}\big).$$

Άρα

$$s_{3(n+1)} - s_{3n} = \tfrac{1}{4n+1} + \tfrac{1}{4n+3} - \tfrac{1}{2n+2} > 0$$

και, επομένως, η ακολουθία (s_{3n}) είναι αύξουσα. Επίσης,

$$s_{3n} = 1 + \tfrac{1}{3} - \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7}\big) - \cdots - \big(\tfrac{1}{2n-2} - \tfrac{1}{4n-3} - \tfrac{1}{4n-1}\big) - \tfrac{1}{2n} < 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3},$$

επειδή κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η ακολουθία (s_{3n}) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον s. Τώρα,

$$s_{3n+1} = s_{3n} + \tfrac{1}{4n+1} \to s + 0 = s \quad \text{και} \quad s_{3n+2} = s_{3n} + \tfrac{1}{4n+1} + \tfrac{1}{4n+3} \to s + 0 + 0 = s.$$

Άρα $s_n \to s$ και, επομένως,

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots = s.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_{3n} \geq \big(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\big) + \big(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\big) = \tfrac{5}{6} + \tfrac{13}{140}$$

για κάθε $n \geq 2$, οπότε $s \geq \frac{5}{6} + \frac{13}{140}$.

Έστω, τώρα,

$$t = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

το άθροισμα της αρχικής σειράς. Αν t_n είναι τα μερικά αθροίσματά της, τότε

$$\begin{aligned} t_{2n-1} &= 1 - \tfrac{1}{2} + \cdots - \tfrac{1}{2n-2} + \tfrac{1}{2n-1} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \big(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\big) - \cdots - \big(\tfrac{1}{2n-2} - \tfrac{1}{2n-1}\big) \\ &\leq 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

για κάθε n. Άρα $t \leq \frac{5}{6}$ και, επομένως, $t < s$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως. Τότε οποιαδήποτε αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$ της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, επίσης, απολύτως και $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση η οποία ορίζει την αναδιάταξη. Δηλαδή, $x'_n = x_{\sigma(n)}$ για κάθε n.

Ορίζουμε

$$x_{m,n} = \begin{cases} x_n = x_{\sigma(m)} = x'_m, & \text{αν } n = \sigma(m) \\ 0, & \text{αν } n \neq \sigma(m) \end{cases}$$

για κάθε m, n. Προκύπτει η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$, η οποία συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}|\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty.$$

Από το θεώρημα 8.3 συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big),$$

οπότε $\sum_{m=1}^{+\infty} x'_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Δεύτερη απόδειξη: Θέτουμε $S = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$, οπότε $0 \leq S < +\infty$.

Η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, οπότε $s_n \to s$.
Παρατηρούμε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^{n} |x'_k| \leq S$ για κάθε n, αφού οι όροι $|x'_1|, \ldots, |x'_n|$, δηλαδή οι όροι $|x_{\sigma(1)}|, \ldots, |x_{\sigma(n)}|$, είναι κάποιοι από τους $|x_1|, |x_2|, \ldots$ (χωρίς επανάληψη). Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x'_n|$ συγκλίνει.
Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα $s'_n = \sum_{k=1}^{n} x'_k$ και θα αποδείξουμε ότι $s'_n \to s$, δηλαδή ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n = s$, οπότε η απόδειξη θα έχει τελειώσει.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει και επειδή $s_n \to s$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{και} \quad |s_n - s| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{8.24}$$

Επιλέγουμε n_1 αρκετά μεγάλο ώστε οι $\sigma(1), \ldots, \sigma(n_1)$ να περιλαμβάνουν τους $1, 2, \ldots, n_0$. Είναι προφανές ότι $n_1 \geq n_0$. Αν $n \geq n_1 (\geq n_0)$, τότε στο $s'_n - s_n$ δεν περιλαμβάνονται οι $x_1, \ldots, x_{n_0}$, αφού καθένας από αυτούς περιέχεται ακριβώς μια φορά στο s_n και στο s'_n. Επομένως, αν $n \geq n_1$, από την (8.24) συνεπάγεται

$$|s'_n - s_n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Από την τελευταία σχέση και πάλι από την (8.24) συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει

$$|s'_n - s| \leq |s'_n - s_n| + |s_n - s| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $s'_n \to s$. $\square$

Η ύπαρξη του προηγούμενου παραδείγματος 8.6.1 έχει ως βαθύτερη αιτία το ότι η αρχική σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Αυτό θα φανεί και από το θεώρημα του Riemann που ακολουθεί.

Σχόλιο. Η απόδειξη του θεωρήματος του Riemann συναγωνίζεται σε δυσκολία την απόδειξη του θεωρήματος 6.3!

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ RIEMANN. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Τότε για κάθε $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a \leq b$ υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$ της αρχικής σειράς ώστε, αν $s'_n = x'_1 + \cdots + x'_n$ είναι τα μερικά αθροίσματα της δεύτερης σειράς, να είναι*

$$\underline{\lim}\, s'_n = a, \qquad \overline{\lim}\, s'_n = b.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αλλά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = +\infty$. Έστω $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $S_n = |x_1| + \cdots + |x_n|$.
Από τους x_n ορίζουμε y_1 να είναι ο πρώτος ο οποίος είναι ≥ 0, y_2 ο δεύτερος ο οποίος είναι ≥ 0, y_3 ο τρίτος ο οποίος είναι ≥ 0 και ούτω καθ' εξής. Ομοίως, από τους x_n ορίζουμε z_1 να είναι ο πρώτος ο οποίος είναι < 0, z_2 ο δεύτερος ο οποίος είναι < 0, z_3 ο τρίτος ο οποίος είναι < 0 και ούτω καθ' εξής.
Θα αποδείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty.$$

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ και $u_n = z_1 + \cdots + z_n$.
Παρατηρούμε ότι ο $\frac{s_n + S_n}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + |x_k|}{2}$ είναι ίσος με το άθροισμα των μη-αρνητικών από τους $x_1, \ldots, x_n$ και, επομένως, $\frac{s_n + S_n}{2} \leq t_n$. Επειδή $\frac{s_n + S_n}{2} \to \frac{s + \infty}{2} = +\infty$, συνεπάγεται $t_n \to +\infty$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.
Ομοίως, ο $\frac{s_n - S_n}{2} = \sum_{k=1} \frac{x_k - |x_k|}{2}$ είναι ίσος με το άθροισμα των αρνητικών από τους $x_1, \ldots, x_n$, οπότε $\frac{s_n - S_n}{2} \geq u_n$. Επειδή $\frac{s_n - S_n}{2} \to \frac{s - \infty}{2} = -\infty$, έχουμε $u_n \to -\infty$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$.
Θεωρούμε δυο συγκεκριμένες ακολουθίες (a_n), (b_n) ώστε

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b$$

ως εξής. Ορίζουμε $a_n = a$, αν $a \in \mathbb{R}$, και $a_n = -n$, αν $a = -\infty$, και $a_n = n$, αν $a = +\infty$. Το ίδιο ακριβώς κάνουμε και με το b. Παρατηρήστε ότι ισχύει τελικά $a_n \leq b_n$.

Βήμα 1. Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$, υπάρχει n_1 ώστε $y_1 + \cdots + y_{n_1} > b_1$ και έστω ότι ο n_1 είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $y_1 + \cdots + y_{n_1-1} \leq b_1$. Επομένως,

$$b_1 < y_1 + \cdots + y_{n_1} \leq b_1 + y_{n_1}.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$, υπάρχει $n_1{}^*$ ώστε $z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} < a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1})$ και έστω ότι ο $n_1{}^*$ είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*-1} \geq a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1})$. Επομένως,

$$a_1 + z_{n_1{}^*} \leq y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} < a_1.$$

Βήμα 2. Επειδή $\sum_{n=n_1+1}^{+\infty} y_n = +\infty$, υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε $y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} > b_2 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*})$ και έστω ότι ο n_2 είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2-1} \leq b_2 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*})$. Επομένως,

$$b_2 < y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} \leq b_2 + y_{n_2}.$$

Επειδή $\sum_{n=n_1{}^*+1}^{+\infty} z_n = -\infty$, υπάρχει $n_2{}^* > n_1{}^*$ ώστε $z_{n_1{}^*+1} + \cdots + z_{n_2{}^*} < a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2})$ και έστω ότι ο $n_2{}^*$ είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $z_{n_1{}^*+1} + \cdots + z_{n_2{}^*-1} \geq a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2})$. Επομένως,

$$a_2 + z_{n_2{}^*} \leq y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} + z_{n_1{}^*+1} + \cdots + z_{n_2{}^*} < a_2.$$

Συνεχίζουμε επ' άπειρον, επιλέγοντας διαδοχικά τους $y_1, \ldots, y_{n_1}, z_1, \ldots, z_{n_1{}^*}, y_{n_1+1}, \ldots, y_{n_2}, z_{n_1{}^*+1}, \ldots, z_{n_2{}^*}, \ldots$ οι οποίοι, στη σειρά αυτή που εμφανίζονται, δεν είναι τίποτε άλλο από μια αναδιάταξη των x_n. Θεωρούμε, τώρα, τα μερικά αθροίσματα s'_n της συγκεκριμένης αναδιάταξης. Οι παραπάνω σχέσεις που ισχύουν σε κάθε βήμα, λένε ότι $b_1 < s'_{n_1} \leq b_1 + y_{n_1}$, $a_1 + z_{n_1{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*} < a_1$, $b_2 < s'_{n_1+n_1{}^*+n_2} \leq b_2 + y_{n_2}$, $a_2 + z_{n_2{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*+n_2+n_2{}^*} < a_2$ και, γενικότερα,

$$b_k < s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k} \leq b_k + y_{n_k}, \qquad a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} < a_k. \tag{8.25}$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, είναι $x_n \to 0$ και, επειδή, οι (y_n) και (z_n) είναι υποακολουθίες της (x_n), συνεπάγεται $y_{n_k} \to 0$ και $z_{n_k{}^*} \to 0$. Άρα από τις (8.25) συνεπάγεται

$$s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \to a, \qquad s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k} \to b$$

και, επομένως,

$$\underline{\lim}\, s'_n \leq a, \qquad b \leq \overline{\lim}\, s'_n. \tag{8.26}$$

Είναι σαφές ότι για κάθε $n \geq n_1$ υπάρχει μοναδικός k ώστε είτε $n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k \leq n < n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^*$ είτε $n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^* \leq n < n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^* + n_{k+1}$. Στην πρώτη περίπτωση, είναι

$$s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \leq s'_n \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k}$$

και στη δεύτερη περίπτωση είναι

$$s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \leq s'_n \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*+n_{k+1}},$$

οπότε από τις (8.25) συνεπάγεται, αντιστοίχως,

$$a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_n \leq b_k + y_{n_k} \qquad \text{ή} \qquad a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_n \leq b_{k+1} + y_{n_{k+1}}.$$

Συνεπάγεται

$$a = \lim_{k\to+\infty}(a_k + z_{n_k{}^*}) \leq \underline{\lim}\, s'_n, \qquad \overline{\lim}\, s'_n \leq \lim_{k\to+\infty}(b_k + y_{n_k}) = b. \tag{8.27}$$

Από τις (8.26) και (8.27) έχουμε $\underline{\lim}\, s'_n = a$ και $\overline{\lim}\, s'_n = b$. □

Ασκήσεις.

8.6.1. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots$.

8.6.2. Έστω η συγκλίνουσα σειρά $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$. Θεωρούμε την αναδιάταξη $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{10} + \cdots$. Αποδείξτε ότι η δεύτερη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

8.6.3. Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αποδείξτε ότι για *κάθε* s υπάρχει ακολουθία (ϵ_n) ώστε να ισχύει $\epsilon_n = \pm 1$ για κάθε n και ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n x_n = s$.

8.6.4. Έστω $0 < p < +\infty$. Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και την αναδιατάσσουμε βάσει των εξής δυο κανόνων:

(i) δεν αλλάζουμε τη διάταξη ανάμεσα στους θετικούς όρους ούτε τη διάταξη ανάμεσα στους αρνητικούς όρους,

(ii) αν από τους αρχικούς n όρους της προκύπτουσας σειράς οι k_n είναι θετικοί και οι l_n είναι αρνητικοί (οπότε $k_n + l_n = n$), τότε $\frac{k_n}{l_n} \to p$.

Αποδείξτε ότι η προκύπτουσα σειρά έχει άθροισμα $\frac{1}{2}\log(4p)$.

8.6.5. [27] Έστω συναρτήσεις $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ για κάθε k. Υποθέτουμε ότι για κάθε k η f_k είναι ένα-προς-ένα, ότι $f_k(\mathbb{N}) \cap f_{k'}(\mathbb{N}) = \emptyset$ για κάθε k, k' με $k \neq k'$ και ότι $\bigcup_{k=1}^{+\infty} f_k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Για κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία συγκλίνει απολύτως αποδείξτε ότι:

(i) για κάθε k η αντίστοιχη σειρά $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)}$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) αν ορίσουμε $s_k = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k$ συγκλίνει απολύτως.

(iii) αν $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k = s$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)} \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

[27] Εδώ περιγράφεται ο μηχανισμός της **ανάλυσης σειρών σε υποσειρές**.

Κεφάλαιο 9

Ακολουθίες συναρτήσεων.

9.1 Κατά σημείο σύγκλιση.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και συναρτήσεις $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n. Οι f_n σχηματίζουν μια **ακολουθία συναρτήσεων** (f_n).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η (f_n)* **συγκλίνει** *στην f* **κατά σημείο** *στο A και συμβολίζουμε*

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \quad \textit{στο } A \qquad \textit{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} f \quad \textit{στο } A$$

αν για κάθε $x \in A$ η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))$ συγκλίνει στον αριθμό $f(x)$, δηλαδή αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f_n(x) \to f(x)$. Με άλλα λόγια, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $x \in A$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Όταν, λοιπόν, έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) και μια συνάρτηση f, όπου όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στο ίδιο σύνολο A, και θέλουμε να δούμε αν η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A, τότε παίρνουμε τον τυχόντα $x \in A$ και βλέπουμε αν, με σταθερό x, ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ (καθώς $n \to +\infty$). Μερικές φορές δίνεται η ακολουθία (f_n) αλλά όχι η οριακή συνάρτηση f. Τότε αναζητούμε την f για την οποία θέλουμε να ισχύει ότι η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A. Αυτό γίνεται ως εξής. Πάλι παίρνουμε τον τυχόντα $x \in A$ και βλέπουμε αν, με σταθερό x, η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. Αν αυτό ισχύει, τότε θέτουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Αυτό το κάνουμε για κάθε $x \in A$ και έτσι σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί ένας αριθμός $f(x)$, οπότε ορίζεται μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Τώρα, από τον τρόπο που έχει οριστεί αυτή η f είναι προφανές ότι ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$ και, επομένως, ότι η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A.

Τα επόμενα παραδείγματα πρέπει να μελετηθούν προσεκτικά, διότι θα γίνεται συχνή αναφορά σε αυτά. Θα ήταν πολύ καλό να σχεδιαστούν τα γραφήματα των συναρτήσεων που εμφανίζονται σε κάθε παράδειγμα: τόσο των οριακών συναρτήσεων f όσο και των f_n για αρχικές τιμές του n αλλά και για τον γενικό n.

Παράδειγμα 9.1.1. Έστω $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in A$.
Τότε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A.

Παράδειγμα 9.1.2. Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ για κάθε $x \geq 0$.
Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $x > 0$, τότε $f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, \infty)$, όπου 0 είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

Παράδειγμα 9.1.3. Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1/(nx), & \text{αν } 1/n < x \leq 1 \\ nx, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$

Κατ' αρχάς, $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} < x$, οπότε ισχύει τελικά $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ και, επομένως, $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα 9.1.4. Έστω $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x \in (0,1]$.
Για κάθε $x \in (0,1]$ είναι $f_n(x) \to 0$. Επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.5. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{n}$ για κάθε x.
Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε x. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 9.1.6. Έστω $f_n : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ για κάθε $x > 1$.
Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.7. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$ για κάθε $x \geq 0$.
Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \geq 0$ και, επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.8. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = x^n$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Τότε $f_n(1) = 1 \to 1$ και, αν $0 \leq x < 1$, τότε $f_n(x) = x^n \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0,1]$, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

Παράδειγμα 9.1.9. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1/(nx^2), & \text{αν } 1/n < x \leq 1 \\ n^2x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$
Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Επίσης, αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} < x$, οπότε ισχύει τελικά $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$ και, επομένως, $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.10. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } 1/n < x \leq 1 \\ n^2x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$
Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} < x$, οπότε ισχύει τελικά $f_n(x) = \frac{1}{x}$ και, επομένως, $f_n(x) \to \frac{1}{x}$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0,1]$, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 9.1.11. Έστω $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$.
Για κάθε $x \in [0,2\pi]$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n, οπότε $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,2\pi]$.

Παράδειγμα 9.1.12. Έστω $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \cos(nx)$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$.
Είναι $f_n(\pi) = (-1)^n$, οπότε η ακολουθία αριθμών $(f_n(\pi))$ δεν συγκλίνει. Άρα η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,2\pi]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.1. *Έστω αριθμοί λ, μ και $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ και $g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ στο A. Τότε:*
[α] $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \lambda f + \mu g$ *στο* A.
[β] $f_n g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} fg$ *στο* A.
[γ] *Αν* $g(x), g_n(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in A$ *και κάθε* n, *τότε* $\frac{f_n}{g_n} \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \frac{f}{g}$ *στο* A.

Απόδειξη. [α] Για κάθε $x \in A$ είναι $f_n(x) \to f(x)$ και $g_n(x) \to g(x)$, οπότε $\lambda f_n(x) + \mu g_n(x) \to \lambda f(x) + \mu g(x)$. Άρα $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \lambda f + \mu g$ στο A.
[β], [γ] Ομοίως. □

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις είναι πολύ σημαντικές για την Ανάλυση.

Ερώτηση 1: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A και έστω ότι κάθε f_n είναι συνεχής στον $\xi \in A$. Είναι η f συνεχής στον ξ;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Στο παράδειγμα 9.1.8, κάθε f_n είναι συνεχής στον 1 αλλά η f δεν είναι συνεχής στον 1.

Ερώτηση 2: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$ και έστω κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Είναι η f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και, αν ναι, ισχύει $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Στο παράδειγμα 9.1.9 είναι $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \to \frac{3}{2}$. Όμως, $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0 = 0$.
Επίσης, στο παράδειγμα 9.1.10 κάθε f_n είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αλλά η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αφού δεν είναι καν φραγμένη στο $[0,1]$.

Ερώτηση 3: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A και έστω ότι για κάθε n η f_n είναι παραγωγίσιμη στο A. Είναι η f παραγωγίσιμη στο A και, αν ναι, ισχύει ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f'$ στο A;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Στο παράδειγμα 9.1.2, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$. Η σταθερή συνάρτηση 0 είναι παραγωγίσιμη. Αλλά ${f_n}'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, οπότε ${f_n}'(0) = 1 \to 1$ και, αν $x > 0$, τότε $f_n'(x) \to 0$.
Δηλαδή, ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ στο $[0,+\infty)$, όπου η $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ οπότε δεν ισχύει ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0' = 0$ στο $[0,+\infty)$.
Στο παράδειγμα 9.1.8, κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στον 1 αλλά δεν ισχύει το ίδιο για την f.
Στο παράδειγμα 9.1.11 είναι ${f_n}'(x) = \cos(nx)$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$ και, όπως φαίνεται στο παράδειγμα 9.1.12, η (f_n') δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,2\pi]$.

Στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε ένα δεύτερο είδος σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων, την *ομοιόμορφη σύγκλιση*. Τότε τα δυο πρώτα ερωτήματα έχουν καταφατική απάντηση ενώ μια παραλλαγή του τρίτου ερωτήματος έχει, επίσης, καταφατική απάντηση.

Ασκήσεις.

9.1.1. Έστω $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ και $g_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι οι (f_n), (g_n) συγκλίνουν σε κάποιες f, g κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε τις f, g.

9.1.2. Έστω $f_n(x) = \frac{x}{n}[\frac{n}{x}]$ για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Βρείτε την f.

9.1.3. Έστω $f_n(x) = \frac{n}{x}[\frac{x}{n}]$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0,+\infty)$.

9.1.4. Έστω $f_n(x) = \begin{cases} \min\{nx, 1\}, & \text{αν } x \geq 0 \\ \max\{nx, -1\}, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε την f.

9.1.5. Γνωρίζουμε[1] ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε οποιαδήποτε αρίθμηση $[a,b] \cap \mathbb{Q} = \{r_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ του $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ και για κάθε n την αντίστοιχη συνάρτηση $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0, & \text{αν } x \in [a,b] \setminus \{r_1, \dots, r_n\} \end{cases}$
Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Είναι κάθε f_n ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$;

9.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε την* **ομοιόμορφη απόσταση** *των f, g στο A, και τη συμβολίζουμε $\|f-g\|_A$, με τον τύπο*

$$\|f-g\|_A = \sup\{|f(x)-g(x)| \,|\, x \in A\}.$$

[1] Παράδειγμα 6.2.2.

Το σύνολο $\{|f(x)-g(x)|\,|\,x\in A\}$ είναι μη-κενό. Αν το σύνολο αυτό είναι άνω φραγμένο, τότε η $\|f-g\|_A$ είναι αριθμός, ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\|f-g\|_A=+\infty$. Επίσης, είναι $\|f-g\|_A\geq 0$ αφού ισχύει $|f(x)-g(x)|\geq 0$ για κάθε $x\in A$. Άρα

$$0\leq \|f-g\|_A\leq +\infty.$$

Παράδειγμα 9.2.1. Έστω $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=x$ και $g(x)=x^2$ για κάθε $x\in[0,1]$. Τότε ισχύει $|f(x)-g(x)|=|x-x^2|=x-x^2$ για κάθε $x\in[0,1]$ και βρίσκουμε εύκολα ότι η μέγιστη τιμή της $x-x^2$ στο $[0,1]$ είναι $\frac{1}{4}$. Άρα $\|f-g\|_{[0,1]}=\sup\{x-x^2\,|\,x\in[0,1]\}=\frac{1}{4}$.

Παράδειγμα 9.2.2. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ και $g(x)=0$ για κάθε x, οπότε ισχύει $|f(x)-g(x)|=\frac{x^2}{1+x^2}$ για κάθε x.
Τώρα, ισχύει $\frac{x^2}{1+x^2}<1$ για κάθε x, οπότε ο 1 είναι άνω φράγμα του $\{\frac{x^2}{1+x^2}\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$, συνεπάγεται ότι, για κάθε $u<1$, ισχύει $\frac{x^2}{1+x^2}>u$ κοντά στα $\pm\infty$. Άρα κανένας $u<1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{\frac{x^2}{1+x^2}\,|\,x\in\mathbb{R}\}$.
Άρα $\|f-g\|_{\mathbb{R}}=\sup\{\frac{x^2}{1+x^2}\,|\,x\in\mathbb{R}\}=1$.

Παράδειγμα 9.2.3. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=x$ και $g(x)=1$ για κάθε x οπότε ισχύει $|f(x)-g(x)|=|x-1|$ για κάθε x.
Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty}|x-1|=+\infty$, συνεπάγεται ότι, για κάθε u, ισχύει $|x-1|>u$ κοντά στα $\pm\infty$. Άρα κανένας u δεν είναι άνω φράγμα του $\{|x-1|\,|\,x\in\mathbb{R}\}$.
Άρα $\|f-g\|_{\mathbb{R}}=\sup\{|x-1|\,|\,x\in\mathbb{R}\}=+\infty$.

Πριν προχωρήσουμε θα κάνουμε δυο γενικές παρατηρήσεις που θα φανούν χρήσιμες σε πολλά σημεία παρακάτω.

Παρατήρηση 1: *Ο ορισμός του $x_n\to x$ μπορεί να διατυπωθεί, ισοδύναμα, αντικαθιστώντας την ανισότητα $|x_n-x|<\epsilon$ με την $|x_n-x|\leq\epsilon$.*

Πράγματι, έστω $x_n\to x$. Τότε, για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n-x|<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n-x|\leq\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Αντιστρόφως, έστω ότι για *κάθε* $\epsilon>0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n-x|\leq\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n-x|\leq\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n\geq n_0$. Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n-x|<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$ και, επομένως, $x_n\to x$.

Παρατήρηση 2: *$\sup B\leq u$ αν και μόνο αν ισχύει $b\leq u$ για κάθε $b\in B$.*[2]

Πράγματι, έστω $\sup B\leq u$. Τότε ο u είναι άνω φράγμα του συνόλου B, οπότε ισχύει $b\leq u$ για κάθε $b\in B$. Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $b\leq u$ για κάθε $b\in B$. Τότε ο u είναι άνω φράγμα του B και, επειδή το $\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B, συνεπάγεται $\sup B\leq u$.

Ειδική περίπτωση ομοιόμορφης απόστασης είναι η ομοιόμορφη απόσταση μιας $f:A\to\mathbb{R}$ από τη μηδενική συνάρτηση $0:A\to\mathbb{R}$, δηλαδή η

$$\|f\|_A=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in A\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.2. *Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε:*
[α] *$\|f\|_A=0$ αν και μόνο αν η f είναι η μηδενική συνάρτηση στο A.*
[β] *$\|f+g\|_A\leq\|f\|_A+\|g\|_A$.*
[γ] *$\|\lambda f\|_A=|\lambda|\|f\|_A$.*
[δ] *$\|fg\|_A\leq\|f\|_A\|g\|_A$.*

Απόδειξη. [α] Αν $f=0$ στο A, τότε ισχύει $|f(x)|=0$ για κάθε $x\in A$, οπότε $\|f\|_A=0$. Αντιστρόφως, έστω $\|f\|_A=0$. Τότε ισχύει $|f(x)|\leq 0$ και, επομένως, $f(x)=0$ για κάθε $x\in A$.

[2] Δείτε την άσκηση 1.2.11.

[β] Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_A + \|g\|_A.$$

Άρα $\|f + g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$.
[γ] Αν $\lambda = 0$, τότε, βάσει του [α], και οι δυο μεριές της $\|\lambda f\|_A = |\lambda|\|f\|_A$ είναι ίσες με 0. Έστω, λοιπόν, $\lambda \neq 0$.
Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|\|f\|_A.$$

Άρα $\|\lambda f\|_A \leq |\lambda|\|f\|_A$.
Ομοίως, για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)| = \tfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(x)| \leq \tfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_A.$$

Άρα $\|f\|_A \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_A$ και, επομένως, $|\lambda|\|f\|_A \leq \|\lambda f\|_A$.
Από τις $\|\lambda f\|_A \leq |\lambda|\|f\|_A$ και $|\lambda|\|f\|_A \leq \|\lambda f\|_A$ συνεπάγεται $\|\lambda f\|_A = |\lambda|\|f\|_A$.
[δ] Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_A\|g\|_A.$$

Άρα $\|fg\|_A \leq \|f\|_A\|g\|_A$. □

Απλή συνέπεια της πρότασης 9.2 είναι ότι ισχύει $\|f - g\|_A = 0$ αν και μόνο αν οι f, g ταυτίζονται στο A. Επίσης, ισχύει

$$\|f - g\|_A \leq \|f - h\|_A + \|h - g\|_A\,, \qquad \|\lambda f - \lambda g\|_A = |\lambda|\|f - g\|_A$$

για κάθε $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n και $f : A \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η (f_n)* **συγκλίνει** *στην f* **ομοιόμορφα** *στο A και συμβολίζουμε*

$$f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f \quad \textit{στο } A \qquad \textit{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} f \quad \textit{στο } A$$

αν $\|f_n - f\|_A \to 0$. Με άλλα λόγια, $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\sup\{|f_n(x) - f(x)|\,|\,x \in A\} = \|f_n - f\|_A \leq \epsilon$ *για κάθε $n \geq n_0$.*

Επειδή η ανισότητα $\sup\{|f_n(x) - f(x)|\,|\,x \in A\} \leq \epsilon$ ισοδυναμεί με το ότι ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$, ο παραπάνω ορισμός διατυπώνεται και ως εξής: $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \geq n_0$.

Προσέξτε *πάρα πολύ καλά* τη διαφορά του ορισμού της ομοιόμορφης σύγκλισης από τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης. (i) Το $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0, *ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ*, ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \geq n_0$. (ii) Το $f_n \stackrel{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $x \in A$ υπάρχει n_0, *ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ* ***και*** *από τον x*, ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του n_0 εξαρτάται από τον $\epsilon > 0$ αλλά είναι "ομοιόμορφη" ως προς τον $x \in A$: για τον ίδιο $\epsilon > 0$ υπάρχει *ένας, ο ίδιος*, n_0 για *κάθε* $x \in A$. Όμως, στην κατά σημείο σύγκλιση, για τον ίδιο $\epsilon > 0$, μπορεί διαφορετικοί $x \in A$ να καθορίζουν διαφορετικούς n_0.

Παράδειγμα 9.2.4. Ας δούμε πάλι το παράδειγμα 9.1.4, όπου $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και όπου $f_n \stackrel{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0, 1]$. Θα αποδείξουμε ότι *δεν* ισχύει $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $(0, 1]$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι ισχύει $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $(0, 1]$. Έστω $0 < \epsilon < 1$. Τότε υπάρχει

n_0 ώστε να ισχύει $\frac{1}{1+nx} = |\frac{1}{1+nx} - 0| \le \epsilon$ για κάθε $x \in (0,1]$ και κάθε $n \ge n_0$. Άρα ισχύει $\frac{1}{1+n_0 x} \le \epsilon$ για κάθε $x \in (0,1]$ και, επομένως, $1 = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+n_0 x} \le \epsilon$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Θα επαναλάβουμε, υπολογίζοντας την $\|f_n - 0\|_{(0,1]} = \|f_n\|_{(0,1]}$.
Για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει $|\frac{1}{1+nx}| = \frac{1}{1+nx} < 1$ και, επομένως, ο 1 είναι άνω φράγμα του $\{|\frac{1}{1+nx}| \,|\, x \in (0,1]\}$. Επειδή $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+nx} = 1$, συνεπάγεται ότι για κάθε $u < 1$ ισχύει $\frac{1}{1+nx} > u$ κοντά στον 0. Άρα κανένας $u < 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{|\frac{1}{1+nx}| \,|\, x \in (0,1]\}$.
Άρα $\|f_n\|_{(0,1]} = \sup\{|\frac{1}{1+nx}| \,|\, x \in (0,1]\} = 1$ και, επομένως, δεν ισχύει $\|f_n\|_{(0,1]} \to 0$.

Η ανισότητα $\|f - g\|_A \le \epsilon$ ισοδυναμεί με το ότι ισχύει $|f(x) - g(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in A$ κι αυτό με το ότι ισχύει $g(x) - \epsilon \le f(x) \le g(x) + \epsilon$ για κάθε $x \in A$ κι αυτό με το ότι το γράφημα της f βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $g - \epsilon$ και στο γράφημα της $g + \epsilon$, δηλαδή, μέσα στη ζώνη που δημιουργείται συμμετρικά γύρω από το γράφημα της g και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ϵ. Άρα το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ τα γραφήματα όλων των f_n από κάποιον n και πέρα βρίσκονται *ολόκληρα* μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ϵ συμμετρικά γύρω από το γράφημα της f.

Παράδειγμα 9.2.5. Ξαναγυρνάμε στο παράδειγμα 9.1.4, όπου $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0,1]$. Αν σχεδιάσετε τα γραφήματα των f_n, θα δείτε ότι, για μικρούς $\epsilon > 0$, και συγκεκριμένα για $0 < \epsilon < 1$, τα γραφήματα αυτά έχουν *όλα* κάποιο τμήμα τους *έξω* από τη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ϵ συμμετρικά γύρω από το γράφημα της 0. Άρα δεν ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $(0,1]$.

Ας επανεξετάσουμε τα δώδεκα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας.

Παράδειγμα 9.1.1. Εύκολα υπολογίζουμε $\|f_n - f\|_A = \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.

Παράδειγμα 9.1.2. $\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.3. $\|f_n\|_{[0,1]} = 1$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.4. $\|f_n\|_{(0,1]} = 1$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $(0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.5. $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = +\infty$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 9.1.6. $\|f_n\|_{(1,+\infty)} = 1$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.7. $\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.8. $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} f$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.9. $\|f_n\|_{[0,1]} = n$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.10. $\|f_n\|_{[0,1]} = n$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.11. $\|f_n\|_{[0,2\pi]} = \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,2\pi]$.

Παράδειγμα 9.1.12. Λόγω της πρότασης 9.3, η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.3. *Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, τότε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A. Δηλαδή, η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_A$ για κάθε n. Άρα για κάθε $x \in A$ ισχύει $f_n(x) \to f(x)$. □

Βάσει της πρότασης 9.3, μπορούμε να βρούμε πιο εύκολα τη συνάρτηση προς την οποία συγκλίνει, αν συγκλίνει, μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A. Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A. Αυτό είναι εύκολο, διότι για κάθε $x \in A$ έχουμε να κάνουμε με την ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$. Βρίσκουμε, λοιπόν, για κάθε $x \in A$ το όριο, αν αυτό υπάρχει και είναι αριθμός, της $(f_n(x))$, ονομάζουμε αυτό το όριο $f(x)$ και δημιουργούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Απομένει να εξετάσουμε αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, υπολογίζοντας την $\|f_n - f\|_A$ για κάθε n.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) χαρακτηρίζεται* **ομοιόμορφα φραγμένη** *στο A αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $\|f_n\|_A \leq M$ για κάθε n ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.4. *Έστω αριθμοί λ, μ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ και $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο A.*
[α] *Αν $B \subseteq A$, τότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο B.*
[β] *$\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{ομ}}{\to} \lambda f + \mu g$ στο A.*
[γ] *Αν οι (f_n), (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο A, τότε $f_n g_n \overset{\text{ομ}}{\to} fg$ στο A.*
[δ] *Αν οι (f_n), $\left(\frac{1}{g_n}\right)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο A, τότε $\frac{f_n}{g_n} \overset{\text{ομ}}{\to} \frac{f}{g}$ στο A.*

Απόδειξη. [α] Είναι

$$\|f_n - f\|_B = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in B\} \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in A\} = \|f_n - f\|_A$$

και, επομένως, $\|f_n - f\|_B \to 0$.
[β] Βάσει της πρότασης 9.2, για κάθε n ισχύει

$$\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_A \leq |\lambda|\|f_n - f\|_A + |\mu|\|g_n - g\|_A.$$

Άρα $\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_A \to 0$.
[γ] Υπάρχει M ώστε να ισχύει $\|f_n\|_A, \|g_n\|_A \leq M$ για κάθε n. Άρα ισχύει $|f_n(x)|, |g_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Από την πρόταση 9.3 συνεπάγεται $f_n(x) \to f(x)$ και $g_n(x) \to g(x)$ και, επομένως, ισχύει $|f(x)|, |g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Άρα $\|f\|_A, \|g\|_A \leq M$.
Τώρα, για κάθε n είναι $f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + f(g_n - g) + g(f_n - f)$ και, βάσει της πρότασης 9.2,

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_A &\leq \|f_n - f\|_A\|g_n - g\|_A + \|f\|_A\|g_n - g\|_A + \|g\|_A\|f_n - f\|_A \\ &\leq \|f_n - f\|_A\|g_n - g\|_A + M\|g_n - g\|_A + M\|f_n - f\|_A.\end{aligned}$$

Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι $\|f_n g_n - fg\|_A \to 0$.
[δ] Άμεση συνέπεια του [γ]. Μόνο μια επισήμανση. Υπάρχει M ώστε να ισχύει $\left|\frac{1}{g_n(x)}\right| \leq M$ για κάθε n και κάθε $x \in A$. Αυτό, ειδικώτερα, σημαίνει ότι $g_n(x) \neq 0$ για κάθε n και κάθε $x \in A$ και, επομένως, ορίζονται οι συναρτήσεις $\frac{f_n}{g_n} : A \to \mathbb{R}$. Επίσης, επειδή ισχύει $|g_n(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$ για κάθε n και κάθε $x \in A$ και επειδή $g_n(x) \to g(x)$ για κάθε $x \in A$, συνεπάγεται $|g(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$ για κάθε $x \in A$. Άρα ορίζεται και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$. □

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.*

Απόδειξη. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Επομένως, (με απλή αλλαγή συμβόλου) ισχύει

$$\|f_m - f\|_A \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } m \geq n_0.$$

Άρα, ισχύει

$$\|f_n - f_m\|_A \leq \|f_n - f\|_A + \|f_m - f\|_A \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.
Έστω $x \in A$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Άρα η ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό.
Ορίζουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε δημιουργείται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A.
Η υπόθεσή μας είναι ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in A \text{ και κάθε } n, m \geq n_0. \tag{9.1}$$

Θεωρώντας το όριο $\lim_{m\to+\infty}$ στην (9.1), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in A \text{ και κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. □

Τώρα θα δούμε ότι με την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε πιο ικανοποιητικές απαντήσεις στα τρία ερωτήματα που διατυπώθηκαν στο τέλος της ενότητας 9.1 απ' ότι με την κατά σημείο σύγκλιση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.1. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και $\xi \in A$. Αν κάθε f_n είναι συνεχής στον ξ, τότε η f είναι συνεχής στον ξ. Ειδικώτερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο A, τότε η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_0$ και, ειδικώτερα, $\|f_{n_0} - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$. Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Άρα για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + |f_{n_0}(\xi) - f(\xi)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + \|f_{n_0} - f\|_A < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 9.2.6. Στο παράδειγμα 9.1.8, χωρίς να υπολογίσουμε την $\|f_n - f\|_{[0,1]}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0, 1]$, αφού κάθε f_n είναι συνεχής στον 1 ενώ η f *δεν* είναι συνεχής στον 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.2. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, b]$. Αν κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$.
Ορίζουμε $\epsilon' = \frac{\epsilon}{1+2(b-a)} > 0$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon'$ για κάθε $n \geq n_0$ και, ειδικώτερα,

$$\|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon'. \tag{9.2}$$

Η f_{n_0} είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) < \epsilon'. \tag{9.3}$$

Έστω u_k και l_k το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και $u_k{}'$ και $l_k{}'$ οι αντίστοιχες ποσότητες για την f_{n_0}.
Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει, βάσει της (9.2),

$$f(x) \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \leq \|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} + u_k{}' \leq \epsilon' + u_k{}',$$

οπότε $u_k \leq \epsilon' + u_k{}'$. Ομοίως,

$$f(x) \geq -|f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \geq -\|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} + l_k{}' \geq -\epsilon' + l_k{}'$$

και, επομένως, $l_k \geq -\epsilon' + l_k{}'$. Άρα

$$u_k - l_k \leq u_k{}' - l_k{}' + 2\epsilon'. \tag{9.4}$$

Από τις (9.3) και (9.4) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} (u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} 2\epsilon'(x_k - x_{k-1}) \\
&= \overline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) + 2\epsilon'(b-a) \\
&< (1 + 2(b-a))\epsilon' = \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Άρα για κάθε n ισχύει

$$\begin{aligned}
\big| \textstyle\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \big| &= \big| \textstyle\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \big| \\
&\leq \textstyle\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \|f_n - f\|_{[a,b]}(b-a)
\end{aligned}$$

και, επομένως, $\big| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \big| \to 0$. □

Το ένα από τα δυο αποτελέσματα του θεωρήματος 9.2 γράφεται

$$\lim_{n\to+\infty} \textstyle\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Αυτή η σημαντική εναλλαγή των συμβόλων $\lim_{n\to+\infty}$ και $\int_a^b$ ισχύει *με την προϋπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης στο διάστημα* $[a,b]$.

Πολλές φορές, όταν πρόκειται να εφαρμόσουμε το θεώρημα 9.2, η f είναι εμφανώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Για παράδειγμα, μπορεί κάθε f_n να είναι συνεχής στο $[a,b]$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 9.1, η f είναι κι αυτή συνεχής στο $[a,b]$. Ή μπορεί να γνωρίζουμε τον τύπο της f και να διακρίνουμε ότι είναι τμηματικά συνεχής ή τμηματικά μονότονη στο $[a,b]$. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, το πρώτο και σαφώς πιο δύσκολο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος 9.2 (αυτό το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη του $\int_a^b f(x)\,dx$) είναι περιττό και χρειάζεται μόνο η σχετικά απλή απόδειξη του ορίου $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

Παράδειγμα 9.2.7. Στο παράδειγμα 9.1.9 είναι $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \frac{3}{2}$ και $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Άρα, χωρίς να υπολογίσουμε τις $\|f_n - f\|_{[0,1]}$, συμπεραίνουμε ότι δεν ισχύει $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0,1]$.

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα 9.1.11 και 9.1.12, δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογο θεώρημα για παραγώγους. Δηλαδή, το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A *δε* συνεπάγεται το ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} f'$ στο A. Υπάρχει, όμως, ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.3. *Έστω διάστημα I και $g : I \to \mathbb{R}$ και κάθε $f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο ${f_n}'$ συνεχή στο I. Αν ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και η $(f_n(\xi))$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω

$$f_n(\xi) \to l \in \mathbb{R}. \tag{9.5}$$

Επειδή κάθε ${f_n}'$ είναι συνεχής στο I και ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I, η g είναι κι αυτή συνεχής στο I. Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, οπότε ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα

$$f(x) = \int_\xi^x g(t)\,dt + l \qquad \text{για κάθε } \ x \in I. \tag{9.6}$$

Επίσης, ισχύει

$$f_n(x) = \int_\xi^x {f_n}'(t)\,dt + f_n(\xi) \qquad \text{για κάθε } \ x \in I \ \text{ και κάθε } \ n. \tag{9.7}$$

Επειδή ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και, επομένως, και στο $[\xi, x]$ ή $[x, \xi]$, συνεπάγεται

$$\int_\xi^x {f_n}'(t)\,dt \to \int_\xi^x g(t)\,dt \qquad \text{για κάθε } \ x \in I. \tag{9.8}$$

Από τις (9.5) έως (9.8) συνεπάγεται ότι ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I.
Από την (9.6) και από τη συνέχεια της g στο I, ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.
Τέλος, θα δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε $[a, b] \subseteq I$.
Είναι εύκολο να δούμε ότι από τις (9.6) και (9.7) συνεπάγεται ότι για κάθε n και κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))| + |f_n(a) - f(a)| \\ &= |\textstyle\int_a^x {f_n}'(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \textstyle\int_a^x |{f_n}'(t) - g(t)|\,dt + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|{f_n}' - g\|_{[a,x]}(x - a) + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|{f_n}' - g\|_I(b - a) + |f_n(a) - f(a)|. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε n ισχύει

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \|{f_n}' - g\|_I(b - a) + |f_n(a) - f(a)|.$$

Άρα $\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0$, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a, b]$. □

Ένα από τα αποτελέσματα του θεωρήματος 9.3 είναι η, υπό προϋποθέσεις, εναλλαγή των συμβόλων του ορίου και της παραγώγισης:

$$\lim_{n\to+\infty} {f_n}' = \big(\lim_{n\to+\infty} f_n\big)' \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} \tfrac{d}{dx} f_n(x) = \tfrac{d}{dx} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Τώρα θα δούμε το ίδιο, ουσιαστικά, θεώρημα αλλά με λιγότερες υποθέσεις. Το θεώρημα 9.4 είναι ισχυρότερο από το θεώρημα 9.3 διότι στο θεώρημα 9.4 δεν υποθέτουμε ότι οι ${f_n}'$ είναι συνεχείς στο I. Από την άλλη μεριά, το θεώρημα 9.3 είναι αρκετό για τις περισσότερες εφαρμογές διότι συνήθως συναντάμε καταστάσεις όπου είναι δεδομένο ότι οι ${f_n}'$ είναι συνεχείς στο I. Και επειδή η απόδειξη του θεωρήματος 9.4 είναι πιο δύσκολη, μπορεί να παραληφθεί η μελέτη της κατά την πρώτη ανάγνωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.4. *Έστω διάστημα I και $g : I \to \mathbb{R}$ και κάθε $f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο I. Αν ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και η $(f_n(\xi))$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in I$. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy (δυο φορές), υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|{f_n}' - {f_m}'\|_I \leq \tfrac{\epsilon}{2|x-\xi|+1}, \quad |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{9.9}$$

Τώρα, βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange, για κάθε $n, m \geq n_0$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(\xi) - f_m(\xi))| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \\ &= |{f_n}'(\zeta) - {f_m}'(\zeta)||x - \xi| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \\ &\leq \|{f_n}' - {f_m}'\|_I |x - \xi| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \leq \tfrac{\epsilon}{2|x-\xi|+1}|x - \xi| + \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε τις (9.9). Άρα η $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει.
Τώρα, για κάθε $x \in I$ ορίζουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ και σχηματίζουμε συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I.
Έστω $x \in I$. Θα αποδείξουμε ότι $f'(x) = g(x)$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|{f_n}' - g\|_I \leq \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{9.10}$$

Συνεπάγεται

$$\|{f_n}' - {f_{n_0}}'\|_I \leq \|{f_n}' - g\|_I + \|{f_{n_0}}' - g\|_I \leq \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{9.11}$$

Επίσης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{f_{n_0}(y)-f_{n_0}(x)}{y-x} - {f_{n_0}}'(x)\right| \leq \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } y \in I \text{ με } 0 < |y - x| < \delta. \tag{9.12}$$

Ακόμη, έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - g(x)\right| \leq{} & \left|\tfrac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\right| + \left|\tfrac{f_{n_0}(y)-f_{n_0}(x)}{y-x} - {f_{n_0}}'(x)\right| \\ & + |{f_{n_0}}'(x) - g(x)| \qquad \text{για κάθε } n \text{ και κάθε } y \in I,\ y \neq x. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Κατ' αρχάς, από την (9.10) συνεπάγεται

$$|{f_{n_0}}'(x) - g(x)| \leq \|{f_{n_0}}' - g\|_I \leq \tfrac{\epsilon}{4}. \tag{9.14}$$

Κατόπιν, βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange, για κάθε $y \in I$, $y \neq x$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, y ώστε

$$\left|\tfrac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\right| = |{f_n}'(\zeta) - {f_{n_0}}'(\zeta)| \leq \|{f_n}' - {f_{n_0}}'\|_I$$

και, επομένως, από την (9.11),

$$\left|\tfrac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\right| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ και κάθε } y \in I,\ y \neq x. \tag{9.15}$$

Η (9.13), μέσω των (9.12), (9.14) και (9.15), συνεπάγεται

$$\left|\tfrac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - g(x)\right| \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ και κάθε } y \in I \text{ με } 0 < |y - x| < \delta.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - g(x)\right| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ y \in I \ \text{ με } \ 0 < |y-x| < \delta_0.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = g(x)$ και, επομένως, $f'(x) = g(x)$.
Τέλος, θα δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε $[a,b] \subseteq I$.
Για κάθε n και κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, a ώστε

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\leq |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))| + |f_n(a) - f(a)| \\ &= |{f_n}'(\zeta) - f'(\zeta)||x-a| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|{f_n}' - g\|_I (b-a) + |f_n(a) - f(a)|.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε n ισχύει

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \|{f_n}' - g\|_I (b-a) + |f_n(a) - f(a)|.$$

Επομένως, $\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0$, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a,b]$. $\square$

Παρατηρήστε στα θεωρήματα 9.3 και 9.4 ότι *υποθέτουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της $({f_n}')$ και *συμπεραίνουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n). Επίσης, για την (f_n) *αρκεί* να υποθέσουμε την κατά σημείο σύγκλιση σε *ένα μόνο* σημείο ξ.

Ασκήσεις.

9.2.1. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = xe^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Ποιά είναι η f; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.2. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση 0 κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,1]$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.3. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,+\infty)$. Ποιά είναι η f; Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
Να επαναλάβετε με τις $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = e^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.
Ομοίως με τις $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = nxe^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.

9.2.4. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,+\infty)$. Ποιά είναι η f; Για κάθε $\delta \in (0,1]$ αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε καθένα από τα $[0,1-\delta]$, $[1+\delta,+\infty)$ αλλά όχι στο $[1-\delta,1+\delta]$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.5. Έστω $f_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση 0 κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η (f_n) συγκλίνει στην 0 ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.6. Έστω $f, g, f_n, g_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$, $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ και $f_n g_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} fg$ στο $(0,+\infty)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.7. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 1/(n+1) \text{ ή } 1/n < x \\ (\sin(\pi/x))^2, & \text{αν } 1/(n+1) \leq x \leq 1/n \end{cases}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι η f; Ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.8. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $[0,1]$. Για ποιούς p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιούς p ισχύει $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
Κάντε τα ίδια με τις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^p}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

9.2.9. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ${f_n}'(x) \to f'(x)$, αν $x \neq 0$, αλλά ${f_n}'(0) \not\to f'(0)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.10. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ και ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ σε καθένα από τα $(-\infty, -a]$, $[a, +\infty)$ αλλά όχι στο $[-a, a]$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.11. Έστω $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = |x|\sqrt[n]{|x|}$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Αποδείξτε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[-1,1]$. Ποιά είναι η f; Αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στον 0 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.12. Έστω $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ για κάθε $x \in [0,2]$. Αποδείξτε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0,2]$. Ποιά είναι η f; Αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στον 1 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον 1. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.13. Έστω $A = B \cup C$ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο B και στο C. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.

9.2.14. Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και η $g : A \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη στο A, αποδείξτε ότι $f_n g \overset{\text{ομ}}{\to} fg$ στο A. Είναι αυτό συνέπεια της πρότασης 9.4[γ];

9.2.15. Έστω $f_n : A \to [a,b]$ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Αποδείξτε ότι $f : A \to [a,b]$. Αν, επίσης, η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $g \circ f_n \overset{\text{ομ}}{\to} g \circ f$ στο A.

9.2.16. Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και κάθε f_n είναι φραγμένη στο A, αποδείξτε ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A.

9.2.17. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, αποδείξτε ότι και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

9.2.18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$.

9.2.19. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν ορίσουμε $g_n(x) = n\big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\big)$ για κάθε x, αποδείξτε ότι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} f'$ στο $\mathbb{R}$.

9.2.20. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, η ακολουθία (x_n) είναι στο A, $\xi \in A$ και $x_n \to \xi$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(\xi)$.

9.2.21. [3] [α] Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, ξ σημείο συσσώρευσης του A και έστω $y_n = \lim_{x\to\xi} f_n(x)$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (y_n) συγκλίνει και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to\xi} f_n(x).$$

[β] Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και κάθε $f_n : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $A \setminus \{\xi\}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(f_n(\xi))$ συγκλίνει και, αν ορίσουμε $f(\xi) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\xi)$, τότε η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.

[3] Ένα σημαντικό αποτέλεσμα. Επιτρέπει, υπό προϋποθέσεις, την εναλλαγή των ορίων $\lim_{n\to+\infty}$ και $\lim_{x\to\xi}$.

9.2.22. Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ και $f_n(x) = x^n g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $g(1) = 0$.

9.2.23. Έστω $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$. Αν κάθε P_n είναι πολυωνυμική συνάρτηση, αποδείξτε ότι και η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση. Πώς σχετίζεται κάθε P_n με το οριακό πολυώνυμο f;

Μήπως προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα αν υποθέσουμε ότι $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, όπου A είναι κάποιο *μη-φραγμένο* υποσύνολο του $\mathbb{R}$;

Να αντιπαραβάλετε με το θεώρημα του Weierstrass στην ενότητα 9.3, όπως αυτό διατυπώνεται στο τέλος της ενότητας 9.3.

9.2.24. Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$.

Αν κάθε f_n είναι αύξουσα στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι και η f είναι αύξουσα στο $[a,b]$.

Αν, επιπλέον, η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$.

9.2.25. Αποδείξτε το **θεώρημα του Dini**: *Έστω ότι κάθε $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αν $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$ και αν ισχύει $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n, τότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$.*

9.3 Το θεώρημα του Weierstrass.

ΛΗΜΜΑ 9.1. [α] $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
[β] $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
[γ] $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (n^2-n)x^2 + nx$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον διωνυμικό τύπο $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k s^{n-k} = (t+s)^n$.
[α] Θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$.

[β] Παραγωγίζουμε τον διωνυμικό τύπο ως προς t, πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που προκύπτει με t και θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$.

[γ] Παραγωγίζουμε τον διωνυμικό τύπο δυο φορές ως προς t, πολλαπλασιάζουμε με t και θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$. □

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε μόνο ένα θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ WEIERSTRASS. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$ ή, ισοδύναμα, $\|P - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon$.*

Απόδειξη. [4] Κατ' αρχάς θεωρούμε την περίπτωση του διαστήματος $[0,1]$.
Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Έστω $\epsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } \ x', x'' \in [0,1] \ \text{ με } \ |x' - x''| < \delta. \tag{9.16}$$

Επίσης, η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{για κάθε } \ x \in [0,1]. \tag{9.17}$$

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε

$$n \geq \max\{\tfrac{1}{\delta^4}, (\tfrac{M}{\epsilon})^2\} \tag{9.18}$$

[4] Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του θεωρήματος του Weierstrass. Η απόδειξη που θα δούμε είναι του S. Bernstein. Μια ακόμη απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 9.3.4.

και το πολυώνυμο
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\tfrac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}.$$
Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $|P(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Έστω $x \in [0,1]$. Σύμφωνα με το λήμμα 9.1, είναι
$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k},$$
οπότε
$$P(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big) x^k (1-x)^{n-k}. \tag{9.19}$$
Χωρίζουμε τους αριθμούς $0, 1, \ldots, n$ σε δυο κατηγορίες. Το σύνολο A αποτελείται από τους $k = 0, 1, \ldots, n$ με την ιδιότητα: $|x - \frac{k}{n}| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Το σύνολο B αποτελείται από τους υπόλοιπους $k = 0, 1, \ldots, n$, δηλαδή εκείνους με την ιδιότητα: $|x - \frac{k}{n}| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.
Αν $k \in A$, από την (9.18) συνεπάγεται $|x - \frac{k}{n}| < \delta$, οπότε από την (9.16), $\big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| < \frac{\epsilon}{2}$.
Επομένως, από το λήμμα 9.1 (για την ισότητα στο τέλος) έχουμε
$$\begin{aligned} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} &\leq \tfrac{\epsilon}{2} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{9.20}$$
Αν $k \in B$, από την (9.17) και από την ιδιότητα των $k \in B$ συνεπάγεται
$$\big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| \leq \big|f(\tfrac{k}{n})\big| + |f(x)| \leq 2M \leq 2M\sqrt{n}(\tfrac{k}{n} - x)^2,$$
οπότε, πάλι από το λήμμα 9.1 (για την τελευταια ισότητα) και από την (9.18) (για την τελευταία ανισότητα) έχουμε
$$\begin{aligned} \sum_{k \in B} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} &\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k \in B} (\tfrac{k}{n} - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} (\tfrac{k}{n} - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \tfrac{2Mx(1-x)}{\sqrt{n}} \leq \tfrac{M}{2\sqrt{n}} \leq \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{9.21}$$
Επομένως, η (9.19), με τις (9.20) και (9.21), συνεπάγεται
$$\begin{aligned} |P(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k \in A} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in B} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$
Άρα ισχύει $|P(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Θεωρούμε, τώρα, τη γενική περίπτωση διαστήματος $[a,b]$.
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε την $\phi : [0,1] \to [a,b]$ με τύπο $\phi(t) = (b-a)t+a$ και την αντίστροφή της $\psi : [a,b] \to [0,1]$ με τύπο $\psi(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Κατόπιν, θεωρούμε τη σύνθεση $g = f \circ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(t) = f((b-a)t+a)$. Η g, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $[0,1]$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης συνεπάγεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(t)$ ώστε να ισχύει $|Q(t) - g(t)| \leq \epsilon$ για κάθε $t \in [0,1]$.
Τώρα, θεωρούμε τη σύνθεση $P = Q \circ \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $P(x) = Q(\frac{x-a}{b-a})$. Επειδή το $Q(t)$ είναι πολυώνυμο, το $P(x)$ είναι κι αυτό πολυώνυμο και, μάλιστα, ίδιου βαθμού με το Q. Από την $g = f \circ \phi$ συνεπάγεται η $f = g \circ \psi$. Τέλος, ισχύει $|P(x) - f(x)| = |Q(\psi(x)) - g(\psi(x))| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$. $\square$

Παράδειγμα 9.3.1. Έστω η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$.
Ακολουθώντας τη διαδικασία της απόδειξης του θεωρήματος του Weierstrass, θα βρούμε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|\sqrt{x} - P(x)| \leq 10^{-4}$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύει
$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq \tfrac{1}{2} 10^{-4} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in [0,1] \text{ με } |x' - x''| \leq \tfrac{1}{4} 10^{-8}.$$

Αυτό είναι άμεσο από τη στοιχειώδη ανισότητα $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq \sqrt{|x' - x''|}$. Επίσης, προφανώς ισχύει

$$0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \qquad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

Άρα, βάσει της (9.18), χρειαζόμαστε

$$n \geq \max\{4^4 10^{32}, 10^8\} = 4^4 10^{32}.$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$P(x) = \sum_{k=0}^{4^4 10^{32}} \binom{4^4 10^{32}}{k} \sqrt{\tfrac{k}{4^4 10^{32}}}\, x^k (1-x)^{4^4 10^{32} - k}.$$

Το πολυώνυμο αυτό είναι βαθμού $4^4 10^{32}$ και, επομένως, τελείως ασύμφορο!

Από το θεώρημα του Weierstrass συνεπάγεται ότι για κάθε n υπάρχει πολυώνυμο $P_n(x)$ ώστε $\|P_n - f\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{n}$. Άρα υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (P_n) ώστε $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (P_n) ώστε $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$ ή, ισοδύναμα, $\|P_n - f\|_{[a,b]} \to 0$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n ώστε $\|P_n - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon$. Άρα μια ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος του Weierstrass είναι:

Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (P_n) ώστε $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$.

Ασκήσεις.

9.3.1. Βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $\big|P(x) - |x|\big| \leq \frac{1}{100}$ για κάθε $x \in [-100,100]$. Βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $P(0) = 0$ και ώστε να ισχύει $|P(x) - \sin x| \leq \frac{1}{100}$ για κάθε $x \in [-100,100]$.

9.3.2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ με την ιδιότητα: $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι $f = 0$.

9.3.3. [α] Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(\frac{1}{x}) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \geq 1$.

[β] Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(e^{-x}) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \geq 0$.

[γ] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έστω ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ είναι αριθμοί. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(\frac{1}{1+e^x}) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε x.

9.3.4. [5] Ορίζουμε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, συναρτήσεις $W_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ επαγωγικά ως εξής:

$$W_0(x) = 0, \qquad W_n(x) = W_{n-1}(x) + \tfrac{1}{2}\big(x^2 - (W_{n-1}(x))^2\big)$$

για κάθε x και κάθε n. Αποδείξτε ότι για κάθε n το $W_n(x)$ είναι άρτιο πολυώνυμο βαθμού 2^n και ότι $W_n(x) \overset{\text{ομ}}{\to} |x|$ στο $[-1,1]$.

Έστω $\xi \in [a,b]$ και η συνάρτηση $\phi_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } a \leq x \leq \xi \\ x - \xi, & \text{αν } \xi \leq x \leq b \end{cases}$ Αποδείξτε, βάσει του προηγουμένου, ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (T_n) ώστε $T_n \overset{\text{ομ}}{\to} \phi_\xi$ στο $[a,b]$.

Μια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **τμηματικά αφφινική** αν υπάρχουν $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και η g είναι αφφινική σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα

[5] Στο τέλος αυτής της άσκησης θα δούμε δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος του Weierstrass.

$(\xi_0, \xi_1), \ldots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$.

Έστω ότι η $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά αφφινική και συνεχής στο $[a, b]$ και έστω ότι ο τύπος της g σε κάθε $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ είναι $g(x) = \lambda_k(x - \xi_{k-1}) + g(\xi_{k-1})$. Τέλος, θεωρήστε $\mu_1 = \lambda_1$ και $\mu_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ για $k = 2, \ldots, m$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $g(x) = g(a) + \mu_1 \phi_{\xi_0}(x) + \cdots + \mu_m \phi_{\xi_{m-1}}(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (Q_n) ώστε $Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο $[a, b]$.

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $\epsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ τμηματικά αφφινική και συνεχής στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $|g(x) - f(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Αποδείξτε με δεύτερο τρόπο το θεώρημα του Weierstrass.

Κεφάλαιο 10

Σειρές συναρτήσεων.

10.1 Σειρές συναρτήσεων. Ορισμοί και ιδιότητες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n. Θεωρούμε τα διαδοχικά αθροίσματα, δηλαδή τις συναρτήσεις $s_1 = f_1 : A \to \mathbb{R}$, $s_2 = f_1 + f_2 : A \to \mathbb{R}$ και, γενικότερα, $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n. Δηλαδή, $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n.*
Αν υπάρχει συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει** *στη συνάρτηση s* **κατά σημείο** *στο A και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Αν $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει** *στη συνάρτηση s* **ομοιόμορφα** *στο A και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Η συνάρτηση s_n ονομάζεται n-οστό **μερικό άθροισμα** *της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Η συνάρτηση s ονομάζεται* **κατά σημείο άθροισμα** *ή* **ομοιόμορφο άθροισμα***, αντιστοίχως, της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο A.*

Όπως και για τις σειρές αριθμών, υπάρχουν εναλλακτικοί συμβολισμοί ή και παραλλαγές των προηγούμενων συμβολισμών: $s \overset{\text{κ.σ.}}{=} f_1 + f_2 + \cdots$ ή $s \overset{\text{κ.σ.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ ή $s \overset{\text{ομ}}{=} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n$ κλπ.

Η ισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $s_n(x) \to s(x)$ κι αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ έχει άθροισμα $s(x)$. Με άλλα λόγια,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x) \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.1. *Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των ορισμών και της πρότασης 9.3. □

Παράδειγμα 10.1.1. Θεωρούμε τη γνωστή μας γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στο $(-1, 1)$ στη συνάρτηση $s : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \overset{\text{κ.σ.}}{=} \frac{1}{1-x}$ στο $(-1, 1)$.
Ας δούμε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $(-1, 1)$.
Για κάθε $x \in (-1, 1)$ και κάθε n ισχύει $s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, οπότε $|s_n(x) - s(x)| = \frac{|x|^n}{1-x}$. Επειδή $\lim_{x \to 1-} \frac{|x|^n}{1-x} = +\infty$, έχουμε $\|s_n - s\|_{(-1,1)} = +\infty$.
Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ δεν συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ ομοιόμορφα στο $(-1, 1)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.2. *Έστω αριθμοί λ, μ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} s$ στο A και $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \stackrel{\text{ομ}}{=} t$ στο A. Τότε $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda f_n + \mu g_n) \stackrel{\text{ομ}}{=} \lambda s + \mu t$ στο A. Το ίδιο ισχύει και για την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και $t_n = g_1 + \cdots + g_n$ και εφαρμόζουμε τις προτάσεις 9.1 (για την κατά σημείο σύγκλιση) και 9.4 (για την ομοιόμορφη σύγκλιση). □

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n > m \geq n_0$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ το κριτήριο του Cauchy της ενότητας 9.2. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο κριτήριο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ WEIERSTRASS. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για έστω $\|f_n\|_A \leq M_n$ για κάθε n ή, ισοδύναμα, $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Αν η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon$ για κάθε $n > m \geq n_0$. Άρα

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq |f_{m+1}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \leq M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon$$

για κάθε $x \in A$ και κάθε $n > m \geq n_0$. Άρα, από το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω $x \in A$. Ισχύει $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε n, οπότε η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως σε κάποιον αριθμό.
Ορίζουμε $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Αυτό γίνεται για κάθε $x \in A$, οπότε έχουμε συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$ και τότε, προφανώς, ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \stackrel{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A.
Τώρα, θεωρούμε τις συναρτήσεις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και έχουμε

$$|s_n(x) - s(x)| = \big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\big| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

για κάθε $x \in A$. Άρα

$$\|s_n - s\|_A \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

για κάθε n. Από την πρόταση 8.3 συνεπάγεται $\|s_n - s\|_A \to 0$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} s$ στο A. □

Παράδειγμα 10.1.2. Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Επειδή ισχύει $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και κάθε n και επειδή η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 10.1.3. Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Επειδή ισχύει $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε x και κάθε n και επειδή η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Το μέρος [α] του θεωρήματος 10.1 είναι το ανάλογο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων του κριτηρίου του Dirichlet για σειρές αριθμών και το μέρος [β] είναι το ανάλογο του κριτηρίου του Abel. Θα παρατηρήσετε ότι στην απόδειξη, όπως και στις αποδείξεις των κριτηρίων αυτών, χρησιμοποιείται ο τύπος άθροισης του Abel.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.1. *Έστω $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ και τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.*

[α] *Έστω ότι η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in A$, ότι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ και ότι η (s_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

[β] *Έστω ότι η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in A$, ότι η (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

Απόδειξη. [α] Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Επίσης, επειδή για κάθε $x \in A$ η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, συνεπάγεται ότι ισχύει $g_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $g_n(x) \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \geq n_0$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο άθροισης του Abel στην ενότητα 8.3, έχουμε ότι για κάθε $x \in A$ και κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=m+1}^n f_k(x)g_k(x)\Big| &= \Big|\sum_{k=m+1}^n s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\qquad + s_n(x)g_{n+1}(x) - s_m(x)g_{m+1}(x)\Big| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n |s_k(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\qquad + |s_n(x)|g_{n+1}(x) + |s_m(x)|g_{m+1}(x) \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n M(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + Mg_{n+1}(x) + Mg_{m+1}(x) \\ &= 2Mg_{m+1}(x) \leq \frac{2M\epsilon}{2M+1} < \epsilon.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

[β] Υπάρχει $s : A \to \mathbb{R}$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A ή, ισοδύναμα, $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A.
Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|s_n(x) - s(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M+1}$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, για κάθε $x \in A$ και κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=m+1}^n f_k(x)g_k(x)\Big| &= \Big|\sum_{k=m+1}^n s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\qquad + s_n(x)g_{n+1}(x) - s_m(x)g_{m+1}(x)\Big| \\ &= \Big|\sum_{k=m+1}^n (s_k(x) - s(x))(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\qquad + (s_n(x) - s(x))g_{n+1}(x) - (s_m(x) - s(x))g_{m+1}(x)\Big| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n |s_k(x) - s(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\qquad + |s_n(x) - s(x)||g_{n+1}(x)| + |s_m(x) - s(x)||g_{m+1}(x)| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{\epsilon}{4M+1}(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\qquad + \frac{\epsilon}{4M+1}M + \frac{\epsilon}{4M+1}M \\ &= \frac{\epsilon}{4M+1}(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) + \frac{2\epsilon}{4M+1}M \leq \frac{4\epsilon}{4M+1}M < \epsilon.\end{aligned}$$

Πάλι σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. □

Παράδειγμα 10.1.4. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ στο $(0, +\infty)$.
Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_n(x) = (-1)^{n-1}$ και $g_n(x) = \frac{1}{n^x}$ για κάθε $x > 0$. Παρατηρήστε ότι οι f_n είναι σταθερές συναρτήσεις. Θεωρούμε, επίσης, τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.
Τότε για κάθε $x > 0$, η ακολουθία αριθμών $(s_n(x))$ είναι φραγμένη, διότι ισχύει $s_n(x) = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n-1} = 1$ ή 0 για κάθε n. Επίσης, η ακολουθία αριθμών $(g_n(x)) = \big(\frac{1}{n^x}\big)$ είναι φθίνουσα και $g_n(x) = \frac{1}{n^x} \to 0$. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Dirichlet για σειρές αριθμών, για κάθε $x > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ συγκλίνει. Με άλλα λόγια, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ συγκλίνει, ως σειρά συναρτήσεων, σε κάποια συνάρτηση, έστω s, κατά σημείο στο $(0, +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \overset{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } (0, +\infty).$$

Τώρα θα δούμε ότι για κάθε $a > 0$ η ίδια σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στη συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (s_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a, +\infty)$, διότι ισχύει $s_n(x) = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n-1} = 1$ ή 0 για κάθε $x \geq a$ και κάθε n. Επίσης, όπως είδαμε παραπάνω, για κάθε $x \in [a, +\infty)$ η ακολουθία $(g_n(x)) = \left(\frac{1}{n^x}\right)$ είναι φθίνουσα. Τέλος, $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[a, +\infty)$, διότι $\|g_n\|_{[a,+\infty)} = \sup\{|\frac{1}{n^x}| \,|\, x \in [a, +\infty)\} = \frac{1}{n^a} \to 0$.
Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Επειδή η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την κατά σημείο σύγκλιση, η τελευταία οριακή συνάρτηση ταυτίζεται με την s που βρήκαμε παραπάνω, διότι η σειρά συγκλίνει στην s κατά σημείο στο $(0, +\infty)$ και, επομένως, και στο $[a, +\infty)$. Άρα

$$\text{Για κάθε } a > 0: \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \overset{\text{ομ}}{=} s(x) \quad \text{στο } [a, +\infty).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.2. *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A και $\xi \in A$. Αν κάθε f_n είναι συνεχής στον ξ, τότε η s είναι συνεχής στον ξ. Ειδικώτερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο A, τότε η s είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.1 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.3. *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $[a, b]$. Αν κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η s είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b s(x)\, dx$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.2 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. □

Οι σχέσεις $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b s(x)\, dx$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ συνδυάζονται, παίρνοντας τη μορφή εναλλαγής των συμβόλων της άθροισης και της ολοκλήρωσης:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.4. *Έστω διάστημα I και $t : I \to \mathbb{R}$ και κάθε $f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f_n{}'$ συνεχή στο I. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}' \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο I και η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η s είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.3 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. □

Το ένα από τα αποτελέσματα του θεωρήματος 10.4 γράφεται και

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}' \qquad \text{ή} \qquad \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

παίρνοντας τη μορφή εναλλαγής των συμβόλων της άθροισης και της παραγώγισης.
Τέλος, έχουμε και το αντίστοιχο του θεωρήματος 9.4.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.5. *Έστω διάστημα I και $t : I \to \mathbb{R}$ και κάθε $f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο I. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}' \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο I και η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η s είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.4 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. □

Παράδειγμα 10.1.5. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$.
Είναι προφανές ότι, αν $x \leq 0$, είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει

για κανένα $x \le 0$. Αντιθέτως, για κάθε $x > 0$ η σειρά συγκλίνει διότι είναι γεωμετρική με λόγο e^{-x}. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \overset{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } (0,+\infty).$$

Αν $a > 0$, είναι $\sup\{|e^{-nx}| \,|\, x \in [a,+\infty)\} = e^{-na}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-na} < +\infty$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Weirstrass, η $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$:

$$\text{Για κάθε } a > 0: \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \overset{\text{ομ}}{=} s(x) \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Βάσει αυτού θα αποδείξουμε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Πράγματι, για κάθε n η e^{-nx} είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$, οπότε, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, και η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$. Αυτό, όμως, ισχύει για κάθε $a > 0$. Οπότε, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε $\xi \in (0,+\infty)$, βρίσκουμε έναν a ώστε $0 < a < \xi$ και, επειδή η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$, είναι συνεχής και στο εσωτερικό σημείο ξ.
Τώρα, θεωρούμε τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων $-\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$. Βλέπουμε εύκολα (με το κριτήριο λόγου ή ρίζας, για παράδειγμα) ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x > 0$, δηλαδή ότι συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $t(x)$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$:

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} \overset{\text{κ.σ.}}{=} t(x) \quad \text{στο } (0,+\infty).$$

Όπως πριν, αν $a > 0$, είναι $\sup\{|-ne^{-nx}| \,|\, x \in [a,+\infty)\} = ne^{-na}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-na} < +\infty$. Άρα, με το κριτήριο του Weierstrass, η $-\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ συγκλίνει στην $t(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$:

$$\text{Για κάθε } a > 0: \qquad -\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} \overset{\text{ομ}}{=} t(x) \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Από το θεώρημα 10.4 συνεπάγεται ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty)$ και η παράγωγός της στο $[a,+\infty)$ είναι η $t(x)$. Βάσει αυτού θα αποδείξουμε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε $\xi \in (0,+\infty)$, βρίσκουμε έναν a ώστε $0 < a < \xi$ και, επειδή η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty)$, είναι παραγωγίσιμη και στο εσωτερικό σημείο ξ και, μάλιστα, είναι $s'(\xi) = t(\xi)$. Άρα ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.
Τα προηγούμενα μπορούν να επαναληφθούν με τη σειρά των δεύτερων παραγώγων $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2e^{-nx}$. Με τα ίδια επιχειρήματα βλέπουμε ότι η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε η $s(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, αποδεικνύουμε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Όλα τα προηγούμενα μπορούμε εύκολα να τα επιβεβαιώσουμε, αφού παρατηρήσουμε ότι

$$s(x) = \frac{1}{e^x - 1} \qquad \text{για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Ασκήσεις.

10.1.1. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

10.1.2. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ δεν είναι συνεχής στον 0 και ότι $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$.

10.1.3. Έστω $p > 0$ και θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα σε καθένα από τα $(-\infty, -a]$ και $[a, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} s(x) = 0$.

Έστω $p > \frac{1}{2}$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ότι η $s(x)$ είναι συνεχής και στον 0.

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, αν $p > \frac{m+1}{2}$, τότε η $s(x)$ είναι m φορές παραγωγίσιμη και στον 0.

Αν $0 < p < \frac{1}{2}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} s(x) = +\infty$. Αν $p = \frac{1}{2}$, αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, αλλά ασυνεχής στον 0.

10.1.4. Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι τα σημεία μεγίστου ή ελαχίστου της $s(x)$;

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} s(x) = 0$.

10.1.5. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - \cos\frac{x}{n})$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a, a]$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

10.1.6. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Τί είδους συνάρτηση είναι η $s(x)$;

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a, a]$.

10.1.7. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \sin(1 + \frac{x}{n})$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a, a]$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

10.1.8. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^n}{2n}\right)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

10.1.9. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}$. Η σειρά, προφανώς, αποκλίνει για $x = 0$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $a > 0$, αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} s(x) = +\infty$, οπότε η $s(x)$ δεν είναι φραγμένη στο $(0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$.

Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$.

10.1.10. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^a}{1+n^2x^2}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ αν και μόνο αν $a > 1$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$ αν και μόνο αν $1 < a \leq 2$.

10.1.11. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι $s'(0) = +\infty$.

10.1.12. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του $x \in [0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} s(x) = \log 2$ και $\lim_{x\to +\infty} s(x) = 0$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$.

10.1.13. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \log(1 + \frac{x}{n})$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $t(x)$ κατά σημείο στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $t(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, a]$.
Αποδείξτε ότι η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.
Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση $t(x)$ και στη συνάρτηση $s(x)$ της άσκησης 10.1.12;

10.1.14. [1] [α] Έστω $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x \le 1/(2n+1) \text{ ή } 1/(2n-1) \le x \le 1 \\ (4n+2)x - 2, & \text{αν } 1/(2n+1) \le x \le 1/(2n) \\ 2 - (4n-2)x, & \text{αν } 1/(2n) \le x \le 1/(2n-1) \end{cases}$
για κάθε n. Υπολογίστε τον $M_n = \|f_n\|_{[0,1]}$ για κάθε n και αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ αποκλίνει.
[β] Έστω $f_n(x) = \frac{(1-x)x^n}{\log(n+1)}$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και κάθε n. Υπολογίστε τον $M_n = \|f_n\|_{[0,1]}$ για κάθε n και αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ αποκλίνει.

10.1.15. Έστω γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$ να συγκλίνει, οπότε $x_n \to +\infty$. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x-x_n}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο σύνολο $A = \mathbb{R} \setminus \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε a, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $A \cap (-\infty, a]$.
Αποδείξτε ότι για κάθε n είναι $\lim_{x\to x_n-} s(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to x_n+} s(x) = +\infty$. Επίσης, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to -\infty} s(x) = 0$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, x_1)$ και σε κάθε (x_n, x_{n+1}). Επίσης, ότι η $s(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα προηγούμενα διαστήματα.

10.1.16. Θεωρήστε τις σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$.
[α] Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$. Αποδείξτε ότι οι δυο σειρές συγκλίνουν σε δυο αντίστοιχες συναρτήσεις $c(x)$ και $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι οι $c(x)$ και $s(x)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και περιοδικές με περίοδο 2π.
Ως παραδείγματα θεωρήστε τις σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^p}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ με $p > 1$ καθώς και τις $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx)$ με $0 \le r < 1$.
[β] Έστω ότι η (x_n) είναι φθίνουσα, ότι $x_n \to 0$, οπότε $x_n \ge 0$ για κάθε n, και ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$.

[1] Δυο παραδείγματα όπου ισχύει η ομοιόμορφη σύγκλιση αλλά δεν εφαρμόζεται το κριτήριο του Weierstrass.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $c(x)$ κατά σημείο στο διάστημα $(m2\pi, (m+1)2\pi)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.[2]

Αποδείξτε ότι, για κάθε $\delta \in (0, \pi]$, οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνουν στις $c(x)$ και $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[m2\pi + \delta, (m+1)2\pi - \delta]$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι οι $c(x)$ και $s(x)$ είναι συνεχείς στο $(m2\pi, (m+1)2\pi)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $nx_n \to 0$.

Εξετάστε, σε σχέση με τα προηγούμενα στο [β], τις δυο σειρές συναρτήσεων στις περιπτώσεις των ακολουθιών $(\frac{1}{n})$ και $(\frac{1}{n \log n})$.

[γ] Έστω $0 \leq r < 1$. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx)$ συγκλίνουν σε κάποιες αντίστοιχες συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της άσκησης 8.3.8[β], αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - 2r\cos x + r^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx) = \arctan \frac{r \sin x}{1 - r\cos x}.$$

[δ] Θεωρώντας τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx)$ ως σειρές συναρτήσεων με μεταβλητή $r \in [0, 1]$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = -\log(\sin \tfrac{x}{2}), \quad \text{αν } x \in (m2\pi, (m+1)2\pi) \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) = \begin{cases} (\pi - x)/2, & \text{αν } x \in (m2\pi, (m+1)2\pi) \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } x = m2\pi \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών.

10.1.17. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(\pi x^n)$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $[0, 1]$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a \in [0, 1)$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1)$.

10.1.18. Θεωρήστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1} + \cos x}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)\sin(nx)}{n + x^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \arctan(nx^2)}{n + x^2}$. Αποδείξτε ότι και οι τρεις συγκλίνουν σε κάποιες αντίστοιχες συναρτήσεις ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

10.1.19. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \cos nx$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$.

10.1.20. Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Αποδείξτε ότι, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$, τότε η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

10.1.21. [3] [α] Έστω ξ σημείο συσσώρευσης του A, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A και $y_n = \lim_{x \to \xi} f_n(x)$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει και $\lim_{x \to \xi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \to \xi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to \xi} f_n(x).$$

[β] Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και κάθε $f_n : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $A \setminus \{\xi\}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει και, αν ορίσουμε $s(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$, τότε η $s : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.

[2] Αυτό είναι, ουσιαστικά, το περιεχόμενο της άσκησης 8.3.8[γ].

[3] Ένα σημαντικό αποτέλεσμα εναλλαγής, υπό προϋποθέσεις, των συμβόλων $\lim_{x \to \xi}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}$. Δείτε την άσκηση 9.2.21.

10.1.22. Έστω $\mathbb{Q} = \{r_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Έστω για κάθε n συνάρτηση $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = r_n \\ 1, & \text{αν } x \neq r_n \end{cases}$ και η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)}$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ότι δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κανένα διάστημα (a, b).

10.1.23. Έστω η $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \neq x_m$ για κάθε n, m με $n \neq m$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| < +\infty$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n I(x - x_n)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στον x, αν $x \neq x_n$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι, για κάθε n, η $s(x)$ είναι ασυνεχής στον x_n και έχει άλμα c_n στον x_n.

Σχεδιάστε το γράφημα της $s(x)$ στην περίπτωση που είναι $c_n = \frac{1}{2^n}$ για κάθε n και είτε (i) $x_n = n$ για κάθε n είτε (ii) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ για κάθε n.

10.1.24. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx - [nx]}{n^2}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 1.

Αποδείξτε ότι κάθε άρρητος είναι σημείο συνέχειας της $s(x)$.

Αποδείξτε ότι κάθε ρητός είναι σημείο ασυνέχειας της $s(x)$.

Αν ο x είναι ρητός και $x = \frac{k}{l}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ και $\gcd(k, l) = 1$, αποδείξτε ότι το άλμα της $s(x)$ στον x είναι $-\frac{a}{l^2}$, όπου $a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και $\int_0^1 s(x)\, dx = \frac{a}{2}$.

10.1.25. [4] Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ συγκλίνει. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[x_0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \to x_0+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}.$$

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(x_0, +\infty)$.

10.1.26. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Γνωρίζουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ για κάθε $x \leq 1$.

Συμβολίζουμε $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και ονομάζουμε ζ-**συνάρτηση του Riemann** τη συνάρτηση με τύπο:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

Η συνάρτηση αυτή συνδέεται με ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα των μαθηματικών.[5]

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 1$, η σειρά συγκλίνει στην $\zeta(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $\zeta(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και ότι

$$\zeta^{(m)}(x) = (-1)^m \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^m}{n^x} \qquad \text{για κάθε } x \in (1, +\infty) \text{ και κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to 0+} \zeta(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

Αποδείξτε ότι η $\zeta(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $(1, +\infty)$.

10.1.27. [6] Αποδείξτε το **θεώρημα του Dini**: *Έστω ότι κάθε $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι η $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο $[a, b]$ και αν ισχύει $f_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και κάθε n, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $[a, b]$.*

---

[4] Δείτε και την άσκηση 8.3.12.

[5] Η μελέτη της ζ-συνάρτησης θα συνεχισθεί στις ασκήσεις 12.3.7, 12.4.2 και 12.5.4.

[6] Δείτε την άσκηση 9.2.25.

10.1.28. [7] Έστω $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ και τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.

[α] Έστω ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1} |g_n - g_{n+1}|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A, ότι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο A και ότι η (s_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

[β] Έστω ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1} |g_n - g_{n+1}|$ είναι φραγμένη στο A, ότι η (g_1) είναι φραγμένη στο A και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

10.2 Δυναμοσειρές.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε σειρά συναρτήσεων με τη μορφή*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \cdots + a_n(x-\xi)^n + \cdots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** *με* **κέντρο** ξ *και* **συντελεστές** $a_0, a_1, a_2, \ldots$. *Αυτή είναι η σειρά των συναρτήσεων a_0 (σταθερή) και $a_n(x-\xi)^n$ για κάθε n.*

Παράδειγμα 10.2.1. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} 0(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 0 ονομάζεται **μηδενική δυναμοσειρά** και συγκλίνει για κάθε τιμή του x και έχει άθροισμα ίσο με 0. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty} 0(x-\xi)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$ για κάθε x.

Παράδειγμα 10.2.2. Η **γεωμετρική δυναμοσειρά** $\sum_{n=0}^{+\infty} 1(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 1 συγκλίνει μόνο όταν $-1 < x-\xi < 1$ ή, ισοδύναμα, $\xi - 1 < x < \xi + 1$ και το άθροισμά της είναι ίσο με $\frac{1}{1-(x-\xi)}$. Δηλαδή,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n = \frac{1}{1-(x-\xi)} \qquad \text{για κάθε } \ x \in (\xi - 1, \xi + 1).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$. Αν $\rho = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$, οπότε $0 \le \rho \le +\infty$, τότε το* $R = \begin{cases} 1/\rho, & \text{αν } 0 < \rho \le +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho = 0 \end{cases}$ *ονομάζεται* **ακτίνα σύγκλισης** *της δυναμοσειράς.*

Επομένως, κάθε δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης η οποία είναι στοιχείο του $[0, \infty]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.6. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και R η ακτίνα σύγκλισής της. Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [\xi - R, \xi + R]$. Τέλος, για τους $x = \xi \pm R$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα εκτός, βέβαια, από την περίπτωση $R = 0$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως για $x = \xi$.*

Απόδειξη. Έστω $0 < R \le +\infty$ ή, ισοδύναμα, $0 \le \rho < +\infty$. Αν $|x-\xi| < R$, τότε

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\, \rho < 1,$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει απολύτως.
Έστω $0 \le R < +\infty$ ή, ισοδύναμα, $0 < \rho \le +\infty$. Αν $|x-\xi| > R$, τότε

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\, \rho > 1,$$

οπότε η σειρά αποκλίνει.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ ισχύει $\sqrt[n]{|1|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ οι οποίες αποκλίνουν.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n^2}$ ισχύει $\sqrt[n]{|1/n^2|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ οι οποίες συγκλίνουν.

[7] Δείτε και τη σχετική άσκηση 8.4.27.

Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-\xi)^n}{n}$ ισχύει $\sqrt[n]{|1/n|}\to 1$, οπότε $\rho=1$ και $R=1$. Αν $x=\xi+1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει και, αν $x=\xi-1$, στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-\xi)^n}{n}$ ισχύει $\sqrt[n]{|(-1)^n/n|}\to 1$, οπότε $\rho=1$ και $R=1$. Αν $x=\xi+1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει και, αν $x=\xi-1$, στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει. $\square$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ αντιστοιχίζεται η ακτίνα σύγκλισής της $R\in[0,+\infty]$ και ότι υπάρχουν τα εξής απλά ενδεχόμενα: (i) αν $R=+\infty$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x\in(-\infty,+\infty)$, (ii) αν $R=0$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για $x=\xi$ και αποκλίνει για κάθε $x\neq\xi$ και (iii) αν $0<R<+\infty$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x\in(\xi-R,\xi+R)$ και αποκλίνει για κάθε $x\notin[\xi-R,\xi+R]$.

Στην περίπτωση (iii) μπορούμε να πούμε περισσότερα: η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x\in I$, όπου I είναι το διάστημα $(\xi-R,\xi+R)$ στο οποίο ενδέχεται να έχουν προστεθεί ένα ή και τα δυο άκρα $\xi\pm R$. Δηλαδή, $I=(\xi-R,\xi+R)$ ή $I=(\xi-R,\xi+R]$ ή $I=[\xi-R,\xi+R)$ ή $I=[\xi-R,\xi+R]$, ανάλογα με τη συγκεκριμένη σειρά. Γράφοντας $I=(-\infty,+\infty)$ στην περίπτωση (i) και $I=\{\xi\}$ στην περίπτωση (ii), βλέπουμε ότι σε κάθε περίπτωση η $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για κάθε $x\in I$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Άρα σε κάθε $x\in I$ αντιστοιχίζεται ο αριθμός*

$$s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$$

και, επομένως, ορίζεται συνάρτηση $s:I\to\mathbb{R}$. Λέμε ότι **η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση** *$s:I\to\mathbb{R}$ ή ότι* **η** *$s:I\to\mathbb{R}$* **ορίζεται από τη δυναμοσειρά** *και, προφανώς, η δυναμοσειρά συγκλίνει στη συνάρτηση s κατά σημείο στο διάστημα I. Το I ονομάζεται* **διάστημα σύγκλισης** *της δυναμοσειράς.*

Παράδειγμα 10.2.3. Το διάστημα σύγκλισης της γεωμετρικής δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ είναι το $I=(\xi-1,\xi+1)$. Η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση $s:(\xi-1,\xi+1)\to\mathbb{R}$ με τύπο $s(x)=\frac{1}{1-(x-\xi)}$.
Όπως φαίνεται στο παράδειγμα αυτό, η συνάρτηση s που ορίζεται από μια δυναμοσειρά ενδέχεται να επεκτείνεται και εκτός του διαστήματος σύγκλισης I της δυναμοσειράς. Μπορεί, δηλαδή, να υπάρχει συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, όπου $I\subseteq A$, $I\neq A$, ώστε να ισχύει $f(x)=s(x)$ για κάθε $x\in I$. Πράγματι, στο παράδειγμα η $f:\mathbb{R}\setminus\{\xi+1\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{1-(x-\xi)}$ είναι επέκταση της συνάρτησης s. Όμως, η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση s και όχι την f, διότι συγκλίνει μόνο στο διάστημα σύγκλισης $(\xi-1,\xi+1)$ και όχι σε ολόκληρο το μεγαλύτερο σύνολο $\mathbb{R}\setminus\{\xi+1\}$.

Παράδειγμα 10.2.4. Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-\xi)^n}{n^2}$ είναι το $I=[\xi-1,\xi+1]$.

Παράδειγμα 10.2.5. Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-\xi)^n}{n}$ είναι το $I=[\xi-1,\xi+1)$.

Παράδειγμα 10.2.6. Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-\xi)^n}{n}$ είναι το $I=(\xi-1,\xi+1]$.

Παράδειγμα 10.2.7. Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}n^n(x-\xi)^n$ έχουμε $\sqrt[n]{|n^n|}=n\to+\infty$, οπότε η ακτίνα σύγκλισής της είναι $R=\frac{1}{+\infty}=0$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $\{\xi\}$.

Παράδειγμα 10.2.8. Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}(x-\xi)^n$ έχουμε $\sqrt[n]{|1/n^n|}=\frac{1}{n}\to 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=+\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty,+\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ και $a_n\neq 0$ για κάθε n. Αν $\rho_1=\underline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ και $\rho_2=\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, οπότε $0\leq\rho_1\leq\rho_2\leq+\infty$, ορίζουμε $R_1=\begin{cases}1/\rho_1, & \text{αν } 0<\rho_1\leq+\infty\\ +\infty, & \text{αν } \rho_1=0\end{cases}$ και*

$$R_2=\begin{cases}1/\rho_2, & \text{αν } 0<\rho_2\leq+\infty\\ +\infty, & \text{αν } \rho_2=0\end{cases}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.3. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ ώστε $a_n \neq 0$ για κάθε n, έστω R η ακτίνα σύγκλισής της και έστω οι R_1, R_2 που μόλις ορίστηκαν. Τότε $R_2 \leq R \leq R_1$.*

Απόδειξη. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) $R < R_2$. Τότε $R_2 > 0$, οπότε $\rho_2 < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε x ώστε $R < |x-\xi| < R_2$. Τότε

$$\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi| \, \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-\xi| \, \rho_2 < 1,$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο λόγου, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει απολύτως. Άτοπο.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) $R_1 < R$. Τότε $R_1 < +\infty$, οπότε $0 < \rho_1$. Θεωρούμε οποιονδήποτε x ώστε $R_1 < |x-\xi| < R$. Τότε

$$\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi| \, \underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-\xi| \, \rho_1 > 1,$$

οπότε η σειρά αποκλίνει. Άτοπο. $\square$

Σε πολλές περιπτώσεις η πρόταση 10.3 μας δίνει έναν χρήσιμο εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς: παρατηρήστε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, τότε $R_1 = R_2$, οπότε $R = R_1 = R_2$.

Το θεώρημα 10.7 συμπληρώνει το θεώρημα 10.6.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.7. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της I. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.*

Απόδειξη. [8] Έστω $a, b \in I$, $a \leq b$.
Έστω, ως πρώτη περίπτωση, ότι $|a-\xi| \leq |b-\xi|$.
Τότε αμέσως βλέπουμε ότι ισχύει

$$|x-\xi| \leq |b-\xi| \qquad \text{για } x \in [a,b]. \tag{10.1}$$

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-\xi)^k$. Προφανώς, $s_n(x) \to s(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και, ειδικότερα, $s_n(b) \to s(b)$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|s_n(b) - s(b)| \leq \tfrac{\epsilon}{5} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{10.2}$$

Θέτουμε

$$g_n(x) = \left(\tfrac{x-\xi}{b-\xi}\right)^n, \tag{10.3}$$

οπότε από την (10.1) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|g_n(x)| \leq 1 \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b] \text{ και κάθε } n. \tag{10.4}$$

Συνδυάζοντας τον τύπο άθροισης του Abel στην ενότητα 8.3 με τα (10.2), (10.3) και (10.4) έχουμε

[8] Είναι φανερό ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στην απόδειξη που θα δούμε τώρα και στην απόδειξη του θεωρήματος 10.1[β], αφού και οι δυο αποδείξεις χρησιμοποιούν τον τύπο άθροισης του Abel. Μάλιστα, η παρούσα απόδειξη μπορεί να διατυπωθεί ως μια σχετικά απλή εφαρμογή του θεωρήματος 10.1[β]. Προτιμάμε, όμως, να δούμε την απόδειξη ανεξάρτητα από το θεώρημα 10.1, διότι είπαμε ότι το θεώρημα 10.1 μπορεί να παραληφθεί σε μια πρώτη ανάγνωση.

ότι για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\big| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-\xi)^k \big| &= \big| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} a_k(b-\xi)^k g_k(x) \big| \\
&= \big| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} s_k(b)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\
&\qquad + s_n(b)g_{n+1}(x) - s_m(b)g_{m+1}(x) \big| \\
&= \big| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} (s_k(b) - s(b))(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\
&\qquad + (s_n(b) - s(b))g_{n+1}(x) - (s_m(b) - s(b))g_{m+1}(x) \big| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} |s_k(b) - s(b)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\
&\qquad + |s_n(b) - s(b)||g_{n+1}(x)| + |s_m(b) - s(b)||g_{m+1}(x)| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\epsilon}{5}(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\
&\qquad + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} \\
&= \tfrac{\epsilon}{5}(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) + \tfrac{2\epsilon}{5} \leq \tfrac{4\epsilon}{5} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$.
Στη δεύτερη περίπτωση, δηλαδή όταν $|b-\xi| \leq |a-\xi|$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Το θεώρημα 10.7 λέει ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε *κλειστό και φραγμένο* υποδιάστημα του διαστήματος σύγκλισής της, I. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι η δυναμοσειρά εν γένει δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

Παράδειγμα 10.2.9. Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ κατά σημείο αλλά *όχι ομοιόμορφα* στο $(-1,1)$. Από την άλλη μεριά, η ίδια δυναμοσειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ με $-1 < a \leq b < 1$.

Παράδειγμα 10.2.10. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο διάστημα σύγκλισής της, το $[-1,1)$. Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ με $-1 \leq a \leq b < 1$.

Συνήθως, σε βιβλία παρόμοιου επιπέδου αποδεικνύεται μια ασθενέστερη παραλλαγή του θεωρήματος 10.7, όπου το συμπέρασμα είναι ότι *η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του εσωτερικού του I*. Το θεώρημα 10.7 και αυτή η παραλλαγή του δεν έχουν καμιά διαφορά όταν εφαρμοστούν στο προηγούμενο παράδειγμα 1, διότι το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1)$ και είναι το ίδιο με το εσωτερικό του. Όμως, έχουν διαφορά όταν εφαρμοστούν στο παράδειγμα 2. Το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1,1)$ και το θεώρημα 10.7 επιτρέπει να συμπεράνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της δυναμοσειράς *και* σε διαστήματα $[-1,b]$, $-1 \leq b < 1$ ενώ η ασθενέστερη παραλλαγή του επιτρέπει να συμπεράνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της δυναμοσειράς μόνο σε διαστήματα $[a,b]$, $-1 < a \leq b < 1$. Η απόδειξη της παραλλαγής είναι αρκετά πιο εύκολη και δεν χρησιμοποιεί το κάπως εξεζητημένο θεώρημα 10.1. Το ισχυρό θεώρημα 10.7 οφείλεται στον Abel και είναι αρκετά χρήσιμο όταν θέλουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης, που ορίζεται από την δυναμοσειρά, στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης (όταν αυτά περιέχονται στο διάστημα σύγκλισης).

Τώρα, χάριν πληρότητας, θα δούμε πώς αποδεικνύεται το ασθενέστερο αποτέλεσμα, δηλαδή η ασθενέστερη μορφή του θεωρήματος 10.7, που μόλις αναφέραμε:
Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της I. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του εσωτερικού του I.

Έστω, λοιπόν, διάστημα $[a,b]$ στο *εσωτερικό* του I. Τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι υπάρχει x_1 στο I ώστε να ισχύει $|a-\xi| < |x_1-\xi|$ και $|b-\xi| < |x_1-\xi|$. Οπότε, αν θέσουμε, $r = \max\{|a-\xi|, |b-\xi|\}$, τότε ισχύει

$$|x-\xi| \leq r < |x_1-\xi| \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{10.5}$$

Επειδή $x_1 \in I$, η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1-\xi)^n$ συγκλίνει, οπότε $a_n(x_1-\xi)^n \to 0$ και, επομένως, υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|a_n(x_1-\xi)^n| \le M \qquad \text{για κάθε } n. \tag{10.6}$$

Τώρα εφαρμόζουμε το κριτήριο του Weierstrass, παρατηρώντας ότι, βάσει των (10.5) και (10.6), ισχύει

$$|a_n(x-\xi)^n| = |a_n(x_1-\xi)^n|\left|\tfrac{x-\xi}{x_1-\xi}\right|^n \le M\left(\tfrac{r}{|x_1-\xi|}\right)^n$$

και ότι

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} M\left(\tfrac{r}{|x_1-\xi|}\right)^n = M\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac{r}{|x_1-\xi|}\right)^n < +\infty$$

διότι $0 \le \frac{r}{|x_1-\xi|} < 1$.
Άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και τελείωσε η απόδειξη.

Στις επόμενες προτάσεις θα εξετάσουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.8. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ με διάστημα σύγκλισης I. Η συνάρτηση s που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα I είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω η εσωτερικό σημείο του I. Θεωρούμε $a,b \in I$ ώστε $a<\eta<b$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και, επειδή, κάθε συνάρτηση $a_n(x-\xi)^n$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, η s είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επειδή ο η είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, η s είναι συνεχής στον η. Προσέξτε: αν ο η ήταν άκρο του $[a,b]$, θα συμπεραίναμε ότι η s είναι συνεχής στον η μόνο από τη μια πλευρά του.
Έστω ότι ο η είναι δεξιό άκρο του I και ανήκει στο I. Η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[\xi,\eta]$ και, επειδή κάθε συνάρτηση $a_n(x-\xi)^n$ είναι συνεχής στο $[\xi,\eta]$, η s είναι συνεχής στο $[\xi,\eta]$ και, επομένως, είναι συνεχής στον η. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν ο η είναι αριστερό άκρο του I και ανήκει στο I, τότε η s είναι συνεχής στον η.
Άρα η s είναι συνεχής στο I. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.9. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ με διάστημα σύγκλισης I. Αν s είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα I, τότε για κάθε $a,b\in I$ ισχύει*

$$\textstyle\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}\big((b-\xi)^{n+1}-(a-\xi)^{n+1}\big).$$

Απόδειξη. Αν $a,b\in I$, $a<b$, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 10.3.
Η περίπτωση $a=b$ είναι προφανής και η $b<a$ ανάγεται στην $a<b$. □

Το αποτέλεσμα του θεωρήματος 10.9 γράφεται και

$$\textstyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\int_a^b (x-\xi)^n\,dx.$$

και μπορεί να "διαβαστεί" ως εναλλαγή των συμβόλων της σειράς και του ολοκληρώματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.10. *Έστω οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$.*
[α] *Οι δυο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω R.*
[β] *Αν I, I' είναι, αντιστοίχως, τα διαστήματα σύγκλισης των δυο δυναμοσειρών, τότε $I'\subseteq I$.*
Συνδυασμένα τα [α], [β] μας λένε ότι τα δυο διαστήματα έχουν το ίδιο εσωτερικό και από το I' το πολύ να λείπουν κάποια από τα άκρα που μπορεί να περιέχει το I.
[γ] *Αν $R>0$, τότε η συνάρτηση s που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά στο I είναι παραγωγίσιμη στο I' και η παράγωγος συνάρτηση ταυτίζεται στο I' με τη συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά. Δηλαδή,*

$$\textstyle s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1} \qquad \text{για κάθε } x\in I'.$$

Απόδειξη. [α] Έστω $\rho = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$ και $\rho' = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|na_n|}$.
Αν $\rho = +\infty$, τότε, προφανώς, $\rho' \leq \rho$. Έστω $0 \leq \rho < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x > \rho$ και, κατόπιν, οποιονδήποτε y ώστε $\rho < y < x$. Τότε ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < y$ και, επειδή, $\sqrt[n]{n} \to 1$, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{n} < \frac{x}{y}$. Άρα ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < y$ και $\sqrt[n]{n} < \frac{x}{y}$ και, επομένως, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|na_n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{x}{y}y = x$. Άρα $\rho' \leq x$. Επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $x > \rho$, συνεπάγεται $\rho' \leq \rho$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\rho' \leq \rho$.
Αν $\rho' = +\infty$, τότε, προφανώς, $\rho \leq \rho'$. Έστω $0 \leq \rho' < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x > \rho'$. Τότε ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|na_n|} < x$ και, επειδή $\sqrt[n]{n} > 1$, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < x$. Άρα $\rho \leq x$. Επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $x > \rho'$, συνεπάγεται $\rho \leq \rho'$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\rho \leq \rho'$.
Από τις $\rho' \leq \rho$ και $\rho \leq \rho'$ συνεπάγεται $\rho' = \rho$, οπότε οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω R.
Αν πολλαπλασιάσουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ με $x-\xi$, τότε προκύπτει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^n$. Άρα οι δυο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τους ίδιους ακριβώς x, οπότε έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, δηλαδή το R.

[β,γ] Αν $R = 0$, τότε, προφανώς, $I' = I = \{\xi\}$. Για τα παρακάτω υποθέτουμε ότι $R > 0$. Επειδή οι δυο δυναμοσειρές έχουν το ίδιο κέντρο ξ και τις ίδιες ακτίνες σύγκλισης R, τα διαστήματα I, I' έχουν τα ίδια εσωτερικά σημεία και διαφέρουν *πιθανόν* ως προς τα άκρα τους.
Έστω η εσωτερικό σημείο του I' και, επομένως, και του I. Επιλέγουμε εσωτερικά σημεία a, b των I' και I ώστε $a < \eta < b$. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το θεώρημα 10.4, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με παράγωγο $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επειδή ο η είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, η s είναι παραγωγίσιμη στον η και $s'(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\eta-\xi)^{n-1}$. Προσέξτε: αν ο η ήταν άκρο του $[a,b]$, θα συμπεραίναμε ότι η s είναι παραγωγίσιμη στον η μόνο από τη μια πλευρά του.
Έστω η δεξιό άκρο του I' και έστω ότι ο η *ανήκει* στο I' . Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[\xi,\eta]$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για $x = \xi$. Σύμφωνα με το θεώρημα 10.4, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[\xi,\eta]$. Ειδικώτερα, η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $x = \eta$ και, επομένως, ο η *ανήκει* στο I. Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[\xi,\eta]$. Σύμφωνα, πάλι, με το θεώρημα 10.4, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi,\eta]$ με παράγωγο $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ για κάθε $x \in [\xi,\eta]$. Ειδικώτερα, η s είναι παραγωγίσιμη στον η και $s'(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\eta-\xi)^{n-1}$.
Η απόδειξη είναι ίδια αν ο η είναι αριστερό άκρο του I' . □

Τονίζουμε πάλι ότι τα διαστήματα I, I' στο θεώρημα 10.10 μπορούν να διαφέρουν *μόνο ως προς τα άκρα τους* με τον εξής τρόπο: αν το I περιέχει κάποιο από τα άκρα του, το I' μπορεί να το περιέχει αλλά μπορεί και να μην το περιέχει και, αν το I δεν περιέχει κάποιο από τα άκρα του, το I' δεν το περιέχει, επίσης.

Παρατηρήστε ότι η $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ γράφεται και

$$\tfrac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tfrac{d}{dx}(x-\xi)^n$$

και μπορεί να "διαβαστεί" ως εναλλαγή των συμβόλων της σειράς και της παραγώγου.

Τα βασικά παραδείγματα.

Θα δούμε, τώρα, μερικά σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.2.11. Η γεωμετρική δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Γνωρίζουμε ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-1,1)$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 10.8, η συνάρτηση $s(x)$ που ορίζεται από αυτήν στο $(-1,1)$ είναι συνεχής στο $(-1,1)$. Αυτό επιβεβαιώνεται, αφού γνωρίζουμε ότι $s(x) = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Η συνάρτηση αυτή

είναι και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και θα δούμε ότι αυτό επιβεβαιώνει το θεώρημα 10.10. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης, επίσης, $R=1$ και διάστημα σύγκλισης, επίσης, $(-1,1)$. Ακόμη, ισχύει

$$\tfrac{1}{(1-x)^2} = s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.[9] Επαναλαμβάνουμε την παραγώγιση όσες φορές θέλουμε, διατηρώντας το ίδιο κάθε φορά διάστημα σύγκλισης, και καταλήγουμε στο ότι

$$\tfrac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} \qquad \text{για κάθε } \ x\in(-1,1) \ \text{ και κάθε } \ m\in\mathbb{N}.$$

Ολοκληρώνοντας τη γεωμετρική σειρά βάσει του θεωρήματος 10.9, βρίσκουμε

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n}x^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(-1,1)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(0,2).$$

Παράδειγμα 10.2.12. Η **λογαριθμική δυναμοσειρά**: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.
Η δυναμοσειρά αυτή προέκυψε στο προηγούμενο παράδειγμα, μέσω της γεωμετρικής δυναμοσειράς, αλλά θα την μελετήσουμε και ανεξάρτητα από τη γεωμετρική δυναμοσειρά.
Είναι $\sqrt[n]{|(-1)^{n-1}/n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=\frac{1}{1}=1$ και το διάστημα σύγκλισης έχει άκρα $1-1=0$ και $1+1=2$. Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ και αποκλίνει. Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(0,2]$. Έστω

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(0,2]$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Τότε η $s(x)$ είναι συνεχής στο $(0,2]$.
Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}$$

και εφαρμόζουμε το θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και διάστημα σύγκλισης το $(0,2)$ ή το $(0,2]$. Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ και αποκλίνει, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(0,2)$. Άρα η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύει

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1} = \tfrac{1}{1-(1-x)} = \tfrac{1}{x} = \log' x$$

για κάθε $x\in(0,2)$, οπότε η συνάρτηση $s(x)-\log x$ είναι σταθερή στο διάστημα $(0,2)$. Άρα ισχύει $s(x)-\log x = s(1)-\log 1 = 0$ και, επομένως, $s(x)=\log x$ για κάθε $x\in(0,2)$. Επειδή η $s(x)$ είναι συνεχής στο $(0,2]$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n} = s(2) = \lim_{x\to 2-} s(x) = \lim_{x\to 2-}\log x = \log 2.$$

Επομένως,

$$\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(0,2]. \tag{10.7}$$

Ξαναβρίσκουμε, λοιπόν, την τελευταία σχέση του προηγούμενου παραδείγματος αλλά *και για τον* $x=2$. Παρατηρήστε την ενδιαφέρουσα σχέση

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\cdots\,,$$

[9] Έχουμε ήδη αποδείξει τον ίδιο τύπο στο παράδειγμα 8.5.1, χρησιμοποιώντας το γινόμενο Cauchy σειρών.

την οποία έχουμε αναφέρει ήδη αρκετές φορές.[10]
Η σχέση (10.7) εμφανίζεται πολλές φορές με δυο εναλλακτικές μορφές. Μετατρέποντας το x σε $x+1$, βρίσκουμε

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-1,1]$$

και, μετατρέποντας στην τελευταία σχέση το x σε $-x$, βρίσκουμε

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1)$$

Παράδειγμα 10.2.13. Η **εκθετική δυναμοσειρά**: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$.
Είναι $\sqrt[n]{1/n!} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty,+\infty)$. Έστω

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \text{για κάθε } x$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = s(x)$$

για κάθε x. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x}s(x)$ ισχύει

$$f'(x) = -e^{-x}s(x) + e^{-x}s'(x) = 0$$

για κάθε x. Άρα η $e^{-x}s(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει $e^{-x}s(x) = e^{-0}s(0) = 1$ και, επομένως, $s(x) = e^x$ για κάθε x. Δηλαδή,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \text{για κάθε } x.$$

Δείτε, επίσης, την άσκηση 8.5.3 αλλά και την επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα 10.2.14. Οι **δυναμοσειρές του συνημιτόνου**, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, και **του ημιτόνου**, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$.
Η ακολουθία των συντελεστών της πρώτης δυναμοσειράς έχει διπλό τύπο: $a_{2k-1} = 0$ και $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Άρα $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 0 \to 0$ και $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \to 0$ και, επομένως, $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $\mathbb{R}$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τη δεύτερη δυναμοσειρά. Έστω, τώρα,

$$c(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } x$$

οι συναρτήσεις που ορίζονται από τις δυναμοσειρές. Οι $c(x)$, $s(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$c'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2k\frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-1} = -s(x), \qquad s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1)\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-2} = c(x)$$

για κάθε x. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = (c(x) - \cos x)^2 + (s(x) - \sin x)^2$$

ισχύει

$$f'(x) = 2(c(x) - \cos x)(-s(x) + \sin x) + 2(s(x) - \sin x)(c(x) - \cos x) = 0$$

για κάθε x. Άρα η $f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει $(c(x) - \cos x)^2 + (s(x) - \sin x)^2 = (c(0) - \cos 0)^2 + (s(0) - \sin 0)^2 = 0$ για κάθε x. Άρα ισχύει $c(x) = \cos x$ και $s(x) = \sin x$ για κάθε x. Δηλαδή,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } x.$$

[10]Μια άλλη απόδειξή της υπάρχει στην άσκηση 6.4.11.

Παράδειγμα 10.2.15. Η **δυναμοσειρά της τόξο εφαπτομένης**: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$.

Η ακολουθία των συντελεστών έχει διπλό τύπο: $a_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και $a_{2k} = 0$. Επομένως, έχουμε $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = \frac{1}{\sqrt[2k-1]{2k-1}} \to 1$ και $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 0 \to 0$. Άρα $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης έχει άκρα -1 και 1. Για $x = -1$ η δυναμοσειρά γίνεται $-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και συγκλίνει. Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$. Έστω

$$s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } \ x \in [-1, 1]$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.
Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1) \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

και εφαρμόζουμε το θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης, επίσης, $R = 1$. Για $x = \pm 1$ γίνεται $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ και αποκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς είναι το $(-1, 1)$. Άρα η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ισχύει

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επομένως, η συνάρτηση $s(x) - \arctan x$ είναι σταθερή στο διάστημα $(-1, 1)$, οπότε ισχύει $s(x) - \arctan x = s(0) - \arctan 0 = 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα ισχύει $s(x) = \arctan x$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και, επειδή η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$,

$$s(1) = \lim_{x \to 1-} s(x) = \lim_{x \to 1-} \arctan x = \arctan 1,$$

$$s(-1) = \lim_{x \to -1+} s(x) = \lim_{x \to -1+} \arctan x = \arctan(-1).$$

Επομένως,

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } \ x \in [-1, 1].$$

Παρατηρήστε τη σχέση:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Παράδειγμα 10.2.16. Η **διωνυμική σειρά**: $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, όπου οι αριθμοί $\binom{\alpha}{n}$ ορίζονται για κάθε α με τους τύπους

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{αν } n \in \mathbb{N}.$$

Είναι φανερό ότι το σύμβολο $\binom{\alpha}{n}$ είναι επέκταση του γνωστού συμβόλου $\binom{m}{n}$, το οποίο είχε ορισθεί για $n, m \in \mathbb{Z}$, $0 \le n \le m$.

Παρατηρήστε ότι, αν ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε είναι $\binom{\alpha}{n} = 0$ για κάθε $n \ge \alpha + 1$, οπότε η δυναμοσειρά γράφεται

$$1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha} x^\alpha = (1+x)^\alpha \qquad \text{αν } \ \alpha \in \mathbb{Z},\ \ \alpha \ge 0,\ \ x \in \mathbb{R},$$

βάσει του διωνυμικού τύπου του Newton. Επομένως, αν ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Στην περίπτωση που ο α *δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος*, υπολογίζουμε $\left| \binom{\alpha}{n+1} / \binom{\alpha}{n} \right| = |\frac{\alpha-n}{n+1}| \to 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 1. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι ένα από τα: $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$.

Θα αποδείξουμε ότι (i) *αν* $\alpha \le -1$, *τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $(-1, 1)$, (ii) *αν* $-1 < \alpha <$

0, *τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $(-1, 1]$ *και* (iii) *αν* $\alpha \geq 0$ *και ο* α *δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $[-1, 1]$.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές το λήμμα 10.1.[11]

ΛΗΜΜΑ 10.1. *Αν* $\mu, \nu > -1$, *τότε υπάρχουν δυο αριθμοί* $c_1, c_2 > 0$, *οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από τους* μ, ν, *ώστε να ισχύει*

$$c_1 n^{\mu-\nu} \leq \tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq c_2 n^{\mu-\nu} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ανισότητα $1 + x \leq e^x$, γράφουμε

$$\begin{aligned} \tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} &= (1 + \tfrac{\mu-\nu}{\nu+1})(1 + \tfrac{\mu-\nu}{\nu+2}) \cdots (1 + \tfrac{\mu-\nu}{\nu+n}) \\ &\leq e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1} + \frac{\mu-\nu}{\nu+2} + \cdots + \frac{\mu-\nu}{\nu+n}} = e^{(\mu-\nu)(\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \cdots + \frac{1}{\nu+n})}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Τώρα, αν $\nu \leq \mu$, από την (10.8) συνεπάγεται

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{(\mu-\nu)(\frac{1}{\nu+1} + \int_1^n \frac{1}{\nu+x}\, dx)} = e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}} (\tfrac{\nu+n}{\nu+1})^{\mu-\nu}$$

και, επειδή $\nu + n \leq (\nu + 2)n$, συνεπάγεται

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}} (\tfrac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu} n^{\mu-\nu}. \tag{10.9}$$

Αν $\mu \leq \nu$, πάλι από την (10.8) συνεπάγεται

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{(\mu-\nu)\int_1^{n+1} \frac{1}{\nu+x}\, dx} = (\tfrac{\nu+n+1}{\nu+1})^{\mu-\nu}$$

και, επειδή $\nu + n + 1 \geq n$, συνεπάγεται

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq \tfrac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}} n^{\mu-\nu}. \tag{10.10}$$

Από τις (10.9) και (10.10) βλέπουμε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq c_2 n^{\mu-\nu}$, όπου c_2 είναι ο αριθμός $e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}} (\frac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu}$ ή ο αριθμός $\frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}}$ ανάλογα με το αν $-1 < \nu \leq \mu$ ή $-1 < \mu \leq \nu$, αντιστοίχως. Παρατηρήστε ότι ο c_2 που βρήκαμε εξαρτάται μόνο από τους μ, ν και όχι από τον n.
Αποδείχτηκε, λοιπόν, η δεξιά ανισότητα. Η αριστερή ανισότητα είναι ακριβώς ίδια με τη δεξιά, αρκεί να εναλλάξουμε τους ρόλους των μ, ν και να επιλέξουμε $c_1 = \frac{1}{c_2}$. ☐

Επιστρέφουμε στη μελέτη της σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ για $x = \pm 1$.
(i) Αν $x = 1$, η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ και έχουμε τις παρακάτω δυο περιπτώσεις.
(i_a) Αν $\alpha < 0$, τότε ισχύει $\binom{\alpha}{n} = (-1)^n \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$ για κάθε n και έχουμε δυο υποπεριπτώσεις.
Αν $\alpha \leq -1$, τότε ισχύει $|\binom{\alpha}{n}| \geq 1$ για κάθε n, οπότε η σειρά αποκλίνει.
Αν $-1 < \alpha < 0$, τότε ο $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$ φθίνει καθώς ο n αυξάνει και, από το λήμμα 10.1, ισχύει $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \leq c_2 \frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$ για κάθε n, οπότε $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \to 0$. Άρα, η σειρά συγκλίνει. Παρεμπιπτόντως, από το λήμμα 10.1, ισχύει $|\binom{\alpha}{n}| = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \geq c_1 \frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$ για κάθε n, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.

[11] Η τεχνική στην απόδειξή του υπάρχει στο κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές και στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20. Δείτε, επίσης, την άσκηση 8.3.9, όπου υπάρχει μια ειδική περίπτωση του λήμματος και αναπτύσσεται η ίδια τεχνική απόδειξης που θα χρησιμοποιήσουμε για το λήμμα.

(i_b) Αν $\alpha \geq 0$, επειδή ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, ισχύει $m < \alpha < m+1$, όπου ο $m = [\alpha]$ είναι μη-αρνητικός ακέραιος. Άρα για $n \geq m+2$, πάλι από το λήμμα 10.1, ισχύει

$$|\binom{\alpha}{n}| = \tfrac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!} = \tfrac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\tfrac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n} \leq c_2\tfrac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\tfrac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Συνοψίζουμε: ο 1 ανήκει στο διάστημα σύγκλισης I, αν $\alpha > -1$, και δεν ανήκει στο I, αν $\alpha \leq -1$.

(ii) Αν $x = -1$, η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$ και έχουμε πάλι δυο περιπτώσεις.

(ii_a) Αν $\alpha < 0$, τότε, από το λήμμα 10.1, ισχύει $\binom{\alpha}{n}(-1)^n = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \geq c_1\frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$ για κάθε n, οπότε η σειρά αποκλίνει.

(ii_b) Αν $\alpha \geq 0$, ισχύει $m < \alpha < m+1$, όπου $m = [\alpha]$ είναι μη-αρνητικός ακέραιος. Για κάθε $n \geq m+1$, από το λήμμα 10.1, ισχύει

$$|\binom{\alpha}{n}(-1)^n| = \tfrac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!} = \tfrac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\tfrac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n} \leq c_2\tfrac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\tfrac{1}{n^{1+\alpha}},$$

οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Συνοψίζουμε: ο -1 ανήκει στο διάστημα σύγκλισης I, αν $\alpha \geq 0$, και δεν ανήκει στο I, αν $\alpha < 0$.

Τώρα έστω $s(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισης I. Η $s(x)$ είναι συνεχής στο I και θα βρούμε τον τύπο της. Θεωρούμε και τη δυναμοσειρά

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n$$

και εφαρμόζουμε το θεώρημα 10.10. Η νέα δυναμοσειρά έχει διάστημα σύγκλισης τουλάχιστον το $(-1,1)$, η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και ισχύει

$$s'(x) = \alpha\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Με λίγες πράξεις, συνεπάγεται

$$(1+x)s'(x) = \alpha s(x)$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (1+x)^{-\alpha}s(x)$$

στο διάστημα $(-1,1)$ και έχουμε ότι

$$f'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}s(x) + (1+x)^{-\alpha}s'(x) = 0$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα η $f(x)$ είναι σταθερή στο διάστημα $(-1,1)$ και, επομένως, ισχύει $(1+x)^{-\alpha}s(x) = (1+0)^{-\alpha}s(0) = 1$. Άρα ισχύει $s(x) = (1+x)^{\alpha}$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

Το διάστημα I ενδέχεται να περιέχει και έναν ή και τους δυο από τους ± 1. Αν $\alpha > -1$, τότε $1 \in I$ και, επειδή η $s(x)$ είναι συνεχής στο I, συνεπάγεται

$$s(1) = \lim_{x\to 1-} s(x) = \lim_{x\to 1-}(1+x)^{\alpha} = 2^{\alpha}.$$

Αν $\alpha \geq 0$ και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε $-1 \in I$ και, για τον ίδιο λόγο, συνεπάγεται

$$s(-1) = \lim_{x\to -1+} s(x) = \lim_{x\to -1+}(1+x)^{\alpha} = 0.$$

Συμπέρασμα: ισχύει

$$(1+x)^{\alpha} = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \tag{10.11}$$

(i) για κάθε $x \in (-1,1)$, αν $\alpha \leq -1$, (ii) για κάθε $x \in (-1,1]$, αν $-1 < \alpha < 0$, και (iii) για κάθε $x \in [-1,1]$, αν $\alpha \geq 0$ και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος.

Η σχέση (10.11) ονομάζεται **γενικός διωνυμικός τύπος του Newton**.
Αξίζει να ξεχωρίσουμε δυο ειδικές περιπτώσεις:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\tfrac{x^n}{2n-1} \qquad \text{για κάθε } x\in[-1,1].$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n \qquad \text{για κάθε } x\in(-1,1].$$

Ασκήσεις.

10.2.1. Στην άσκηση 5.6.10 αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.

10.2.2. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Ποιά είναι αυτή η συνάρτηση;

Ποιά είναι τα αντίστοιχα συμπεράσματα για τις $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^2x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n(1-x^n)$ στο $[0,1]$;

10.2.3. Βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}n^3x^n$.

10.2.4. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών. Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης. $\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}n!x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(2^n+\frac{3^n}{n}\big)x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{2n-1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n+3^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n+3}x^{3n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n^2}}{\sqrt{n}}x^{n^2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sin\frac{a}{n})x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin an}{n}x^n$.

10.2.5. Τί συμπεραίνετε για την ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ αν η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη; Τί συμπεραίνεται αν η $(\frac{1}{a_n})$ είναι φραγμένη;

Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ αποκλίνει και η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ είναι 1.

Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ είναι 1.

10.2.6. Έστω ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, ότι $a_0>0$ και ότι ισχύει $a_n\geq 0$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ είναι ≥ 1.

Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει $\big|a_0-(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\big|<a_0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

10.2.7. [α] Έστω $R>0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ και $s(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi-R,\xi+R)$. Αποδείξτε ότι

$$s^{(m)}(x) = m!\sum_{n=m}^{+\infty}\binom{n}{m}a_n(x-\xi)^{n-m} \qquad \text{για κάθε } x\in(\xi-R,\xi+R),\ \ m\in\mathbb{Z},\ \ m\geq 0$$

και

$$s^{(m)}(\xi) = m!a_m \qquad \text{για κάθε } m\in\mathbb{Z},\ \ m\geq 0.$$

[β] Έστω $R_1>0$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,1}(x-\xi)^n$ και $s_1(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi-R_1,\xi+R_1)$. Έστω, επίσης, $R_2>0$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,2}(x-\xi)^n$ και $s_2(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi-R_2,\xi+R_2)$. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $s_1(x)$ και $s_2(x)$ ταυτίζονται σε ένα διάστημα $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ με $\delta>0$, αποδείξτε ότι οι δυο δυναμοσειρές ταυτίζονται, δηλαδή ότι ισχύει $a_{n,1}=a_{n,2}$ για κάθε n.

10.2.8. Έστω $R>0$ και έστω ότι ισχύει $s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ για $x\in(-R,R)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άρτια στο διάστημα $(-R,R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n=0$ για κάθε περιττό $n\in\mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι περιττή στο διάστημα $(-R,R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n=0$ για κάθε άρτιο $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.

10.2.9. Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n'(x-\xi)^n$ είναι R', της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n''(x-\xi)^n$ είναι R'' και της $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n' + a_n'')(x-\xi)^n$ είναι R.
Αποδείξτε ότι, αν $R' \neq R''$, τότε $R = \min\{R', R''\}$ και, αν $R' = R''$, τότε $R \geq R' = R''$.
Βρείτε παράδειγμα ώστε να είναι $R' = R''$ και η ακτίνα σύγκλισης του αθροίσματος να είναι $R > R' = R''$.

10.2.10. [12] Έστω $R > 0$ και έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ για $x \in (\xi - R, \xi + R)$. Υποθέστε ότι ο ξ είναι ρίζα της $s(x)$, δηλαδή $s(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $a_0 = 0$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $s(x) = 0$ για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ είτε υπάρχει r με $0 < r \leq R$ ώστε να ισχύει $s(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi - r, \xi + r)$ με $x \neq \xi$. Στην δεύτερη περίπτωση, πώς προσδιορίζεται η πολλαπλότητα της ρίζας ξ της $s(x)$ από τους συντελεστές της δυναμοσειράς;

10.2.11. Αναλόγως της τιμής του p, βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$ και, αν $s(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της, βρείτε σε ποιο διάστημα είναι η s παραγωγίσιμη.

10.2.12. Προσδιορίστε τα διαστήματα σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdots(3n-2)} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\big)^2 x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\big)^3 x^n$.

10.2.13. [13] Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της

$$1 + \tfrac{ab}{1\cdot c} x + \tfrac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)} x^2 + \tfrac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)} x^3 + \cdots$$

ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων a, b, c. Για τα άκρα του διαστήματος σύγκλισης χρησιμοποιήστε το λήμμα 10.1.

10.2.14. Αποδείξτε ότι ισχύει $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, γράφοντας το $\frac{1}{1+t^2}$ ως γεωμετρική σειρά. Κατόπιν, αποδείξτε ότι η σχέση αυτή ισχύει και για $x = \pm 1$.

10.2.15. Αποδείξτε ότι ισχύει $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\, x^{2k-1}$ για $x \in (-1, 1)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\arcsin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\, x^{2k-1} \qquad \text{για } \ -1 \leq x \leq 1.$$

10.2.16. Χρησιμοποιώντας τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton με $a = -\frac{1}{2}$ και x^2 στη θέση του x, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\big(x + \sqrt{1 + x^2}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1} \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\, x^{2k-1} \qquad \text{για } \ -1 \leq x \leq 1.$$

10.2.17. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k a_n(x-\xi)^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

10.2.18. Θεωρήστε την $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$. Αν $R > 0$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, αποδείξτε ότι το σύνολο $P = \big\{r \geq 0 \,\big|\, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty\big\}$ είναι το διάστημα $[0, R]$ ή $[0, R)$.

10.2.19. Έστω ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = s(x)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αν ισχύει $b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{s(x)}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.
Αποδείξτε τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton $(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ όταν ο α είναι αρνητικός ακέραιος, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο.

---

[12] Δείτε τις ασκήσεις 5.2.8, 5.3.11 και κυρίως την 5.6.13.

[13] Η δυναμοσειρά αυτή ονομάζεται **υπεργεωμετρική σειρά** και η συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν στο διάστημα σύγκλισής της ονομάζεται **υπεργεωμετρική συνάρτηση** και συμβολίζεται $F(a, b, c; x)$.

10.2.20. Έστω αριθμοί p, q, όχι και οι δυο ίσοι με 0, και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε x στο διάστημα σύγκλισής της η δυναμοσειρά έχει άθροισμα $\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$ και υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς συναρτήσει των p, q.

10.2.21. [14] Αν οι $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν και αν και το γινόμενο Cauchy $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ των δυο σειρών συγκλίνει, αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

10.2.22. [15] Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R ώστε $0 < R \leq +\infty$ και έστω $\eta \in (\xi - R, \xi + R)$, δηλαδή $|\eta - \xi| < R$. Αφού αποδείξετε ότι για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n(\eta-\xi)^{n-m}$ συγκλίνει απολύτως, θεωρήστε τους $b_m = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n(\eta-\xi)^{n-m}$ και αποδείξτε ότι

(i) η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\eta)^m$ είναι $\geq R - |\eta - \xi|$ και

(ii) για κάθε x με $|x-\eta| < R - |\eta - \xi|$ ισχύει:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\eta)^m.$$

10.2.23. [16] Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R ώστε $0 < R \leq +\infty$ και έστω $a_0 \neq 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m$ με ακτίνα σύγκλισης R^* ώστε $0 < R^* \leq +\infty$ και ώστε να ισχύει

$$\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = 1$$

για κάθε x με $|x-\xi| < \min\{R, R^*\}$.

10.2.24. [17] Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$ (δηλαδή, η δυναμοσειρά "εκφυλίζεται" σε πολυώνυμο).

10.2.25. [18] Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2n-1)}$ και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $s(x)$ που ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' - xy = 1$ στο διάστημα σύγκλισης. Βρείτε τη συνάρτηση $s(x)$.

Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $s(x)$ που ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y''+y'+y = e^x$ στο διάστημα σύγκλισης. Βρείτε τη συνάρτηση $s(x)$.

10.2.26. Έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s'(x)| \leq \frac{M}{1-|x|}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

10.2.27. [19] Αποδείξτε το **θεώρημα του Tauber**: *Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *είναι* 1 *και* $s(x)$ *είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα* $(-1, 1)$. *Αν* $na_n \to 0$ *και* $\lim_{x\to 1-} s(x) = p$, *τότε* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = p$.

10.2.28. Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ είναι 1 και $s(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(-1, 1)$. Αν ισχύει $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\lim_{x\to 1-} s(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.

[14] Ένα συμπλήρωμα του θεωρήματος 8.4 και του θεωρήματος του Mertens στην άσκηση 8.5.4.

[15] Εδώ περιγράφεται η διαδικασία **αλλαγής κέντρου δυναμοσειράς** μέσα στο διάστημα σύγκλισής της.

[16] Εδώ περιγράφουμε το **αντίστροφο δυναμοσειράς**.

[17] Δείτε την άσκηση 9.2.23.

[18] Δείτε τις ασκήσεις 7.2.13 και 7.2.14.

[19] Μια σημαντική άσκηση. Το θεώρημα του Tauber είναι η αρχή μιας ολόκληρης περιοχής της Αρμονικής Ανάλυσης.

10.3 Σειρές Taylor.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ ορίζει μια συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισής της, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τον ξ και περιέχει κανένα ή ένα ή και τα δυο άκρα του. Σ' αυτήν την ενότητα θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη διαδικασία.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν υπάρχει διάστημα $I \subseteq A$ με μέσο ξ, το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον ξ, και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ για κάθε $x \in I$, τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι η* **σειρά Taylor** *της f στον ξ.*

Παράδειγμα 10.3.1. Η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Το διάστημα $(-1, 1)$ με μέσο 0 περιέχεται στο σύνολο αυτό και υπάρχει η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ για την οποία ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επομένως, η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ είναι η σειρά Taylor της $\frac{1}{1-x}$ στον 0.

Η σειρά Taylor της f στον ξ, αν υπάρχει, είναι μοναδική.[20] Πράγματι, είναι άμεση συνέπεια της άσκησης 10.2.7 (κι αυτή είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 10.10) ότι οι συντελεστές της σειράς Taylor της f στον ξ είναι οι αριθμοί $a_0 = f(\xi)$ και $a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ για κάθε n.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$, διάστημα $I \subseteq A$ με μέσο ξ, το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον ξ, και έστω ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Τότε για κάθε $x \in I$ και κάθε n ισχύει*

$$f(x) = f(\xi) + \tfrac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + R_{n,\xi}(x,\zeta) \text{ ή } R_{n,\xi}(x),$$

όπου $R_{n,\xi}(x,\zeta)$ είναι το υπόλοιπο Schlömlich τάξης n και $R_{n,\xi}(x)$ είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο τάξης n. Ειδικές περιπτώσεις του υπολοίπου Schlömlich τάξης n είναι το υπόλοιπο Lagrange και το υπόλοιπο Cauchy τάξης n.
Αν για κάθε $x \in I$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x,\zeta) = 0$ ή $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x) = 0$, τότε η σειρά Taylor της f στον ξ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$. Δηλαδή, ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι απλή συνέπεια των θεωρημάτων 5.1 και 7.1. Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x,\zeta) \to 0$ για κάθε $x \in I$, τότε ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \big(f(\xi) + \tfrac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\big) = f(x)$$

ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = f(x)$ για κάθε $x \in I$. □

Τα βασικά παραδείγματα.

Τώρα θα δούμε αρκετά παραδείγματα σειρών Taylor γνωστών συναρτήσεων. Μελετάμε τα ίδια παραδείγματα που είδαμε στην ενότητα 10.2, μόνο που εδώ ακολουθούμε την αντίστροφη διαδικασία.

Πρέπει, πάντως, να τονιστεί ότι *υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες, σε συγκεκριμένα σημεία, δεν έχουν σειρά Taylor.*[21]

Παράδειγμα 10.3.2. Έστω $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού το πολύ m και οποιοσδήποτε ξ.

[20] Γι αυτό λέμε **η** σειρά Taylor της f στον ξ.

[21] Μερικά τέτοια παραδείγματα υπάρχουν στις ασκήσεις 10.3.7 και 10.3.8.

Για κάθε x και κάθε $n \geq m$ ισχύει $P^{(n+1)}(x) = 0$. Άρα το αντίστοιχο υπόλοιπο Lagrange είναι $R_{n,\xi}(x,\zeta) = \frac{P^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} = 0$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x,\zeta) = 0$. Άρα η σειρά Taylor της P στον ξ είναι η

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = P(\xi) + \frac{P'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{P^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m$$

και ισχύει

$$P(x) = P(\xi) + \frac{P'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{P^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m \qquad \text{για κάθε } x.$$

Αυτό είναι το λεγόμενο *ανάπτυγμα πολυωνύμου σε δυνάμεις του* $x-\xi$. Φυσικά, στην περίπτωση $\xi = 0$, το ανάπτυγμα σε δυνάμεις του x είναι $P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{P^{(m)}(0)}{m!}x^m$.

Παράδειγμα 10.3.3. Η e^x είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$ για κάθε n. Ειδικότερα, είναι $\frac{d^n e^x}{dx^n}(0) = 1$ για κάθε n, οπότε η πιθανή σειρά Taylor της e^x στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$.
Το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της e^x στον 0 είναι

$$R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{e^\zeta}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{όπου } \zeta \in [0,x] \text{ ή } \zeta \in [x,0].$$

Αν $x \geq 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| = \frac{e^\zeta}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0$$

και, αν $x \leq 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x;\zeta)| = \frac{e^\zeta}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0.$$

Τα δυο τελευταία όρια βασίζονται στο όριο $\frac{a^n}{n!} \to 0$ του παραδείγματος 2.3.25.
Άρα η σειρά Taylor της e^x στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$ και ισχύει

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 10.3.4. Η $\cos x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \pm\cos x$ ή $\pm\sin x$ για κάθε n. Ειδικότερα, είναι $\frac{d^n \cos x}{dx^n}(0) = 1$ ή 0 ή -1 ή 0 αν είναι, αντιστοίχως, $n = 4k$ ή $4k+1$ ή $4k+2$ ή $4k+3$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Άρα η πιθανή σειρά Taylor της $\cos x$ στον 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$.
Το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της $\cos x$ στον 0 είναι

$$R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{\pm\cos\zeta}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ ή } \frac{\pm\sin\zeta}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \text{όπου } \zeta \in [0,x] \text{ ή } \zeta \in [x,0].$$

Τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Επομένως, η σειρά Taylor της $\cos x$ στον 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ και ισχύει

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τη σειρά Taylor της $\sin x$ στον 0: ισχύει

$$\sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 10.3.5. Η $\log(1+x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ και είναι $\frac{d^n \log(1+x)}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ για κάθε n. Άρα είναι $\frac{d^n \log(1+x)}{dx^n}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ για κάθε n και, επομένως, η πιθανή σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στο διάστημα $(-1,1)$ ή στο $(-1,1]$ με μέσο 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Αποκλείουμε εξ αρχής τον -1 από το υποψήφιο διάστημα διότι η συνάρτηση δεν ορίζεται καν στον -1.
Το υπόλοιπο Lagrange στον 0 ειναι

$$R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \qquad \text{όπου } \zeta \in [0,x] \text{ ή } \zeta \in [x,0].$$

Αν $0 < x \leq 1$, τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| = \frac{x^{n+1}}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Το υπόλοιπο Lagrange δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για $-1 < x \leq 0$, οπότε μελετάμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στον 0. Αυτό είναι

$$R_{n,0}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}} (x-t)^n \, dt = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt.$$

Αν $-1 < x \leq 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x)| = \Big| -\int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt \Big| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt.$$

Επειδή ισχύει $(\frac{t-x}{1+t})^n \leq |x|^n$ για κάθε $t \in [x,0]$, είναι

$$|R_{n,0}(x)| \leq |x|^n \int_x^0 \frac{1}{1+t} \, dt = |x|^n \log \frac{1}{1+x} \to 0.$$

Άρα η σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ και ισχύει

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-1,1].$$

Προφανώς, η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \qquad \text{για κάθε } x \in (0,2]$$

την οποία έχουμε αποδείξει στην προηγούμενη ενότητα.
Τώρα θα βρούμε τη σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στον 0 με έναν άλλο τρόπο, χωρίς να εφαρμόσουμε το θεώρημα 10.11. Αυτός ο τρόπος θα εφαρμοστεί σε ένα ακόμη παράδειγμα, όπου θα είναι δύσκολη η εφαρμογή του θεωρήματος 10.11.
Αρχίζουμε με τον γνωστό τύπο $\frac{1-(-t)^n}{1+t} = 1 + (-t) + \cdots + (-t)^{n-1}$, ο οποίος ισχύει για κάθε $t \neq -1$, και τον γράφουμε

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

Επομένως,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} \, dt = \int_0^x 1 \, dt - \int_0^x t \, dt + \cdots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} \, dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, dt$$

για κάθε $x > -1$, οπότε

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, dt \tag{10.12}$$

για κάθε $x > -1$.
Αν $0 \leq x \leq 1$, τότε

$$\Big| (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, dt \Big| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, dt \leq \int_0^x t^n \, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Αν $-1 < x \leq 0$, τότε

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt\right| = \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t}\, dt \leq \frac{1}{1+x} \int_x^0 |t|^n\, dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{(n+1)(1+x)} \to 0.$$

Άρα ισχύει $(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \to 0$, οπότε από την (10.12) συνεπάγεται

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \to \log(1+x)$$

για κάθε $x \in (-1, 1]$. Συνεπάγεται

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-1, 1].$$

Παράδειγμα 10.3.6. Θα δούμε ότι η σειρά Taylor της $\arctan x$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ με διάστημα σύγκλισης το $[-1, 1]$. Δηλαδή,

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} \qquad \text{για κάθε } \ x \in [-1, 1]. \tag{10.13}$$

Η συνάρτηση $\arctan x$ έχει παράγωγο $\frac{1}{x^2+1}$ αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι άβολος και δεν είναι άνετη η εφαρμογή του θεωρήματος 10.11. Γι αυτό καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο τέλος του προηγούμενου παραδείγματος. Ισχύει $\frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2}$, οπότε

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

για κάθε t. Επομένως,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x 1\, dt - \int_0^x t^2\, dt + \cdots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2}\, dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt.$$

Αυτό το γράφουμε

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt.$$

Αν $|x| \leq 1$, τότε

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt\right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \leq \int_0^{|x|} t^{2n}\, dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \to 0.$$

Άρα

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} \to \arctan x$$

και έτσι προκύπτει η (10.13).

Παράδειγμα 10.3.7. Η $(1+x)^\alpha$ έχει παραγώγους $\frac{d^n(1+x)^\alpha}{dx^n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ για κάθε n. Ειδικώτερα, στον 0 είναι $\frac{d^n(1+x)^\alpha}{dx^n}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ για κάθε n. Άρα η πιθανή σειρά Taylor της $(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$.
Αν ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε αφ' ενός η $(1+x)^\alpha$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού α αφ' ετέρου η παραπάνω δυναμοσειρά γίνεται, όπως έχουμε ξαναπεί, πεπερασμένο άθροισμα $1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$. Στην περίπτωση αυτή η ισότητα

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha, \qquad \text{αν } \ \alpha \in \mathbb{Z}, \ \ \alpha \geq 0$$

δεν είναι παρά ο διωνυμικός τύπος του Newton και, επομένως, η παραπάνω δυναμοσειρά είναι, πράγματι, η σειρά Taylor της $(1+x)^\alpha$ στον 0 με διάστημα σύγκλισης το $\mathbb{R}$.
Αν ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, θα αποδείξουμε ότι και πάλι η σειρά Taylor της $(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$. Δηλαδή,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$$

(i) για κάθε $x \in (-1,1)$, αν $\alpha \le -1$, (ii) για κάθε $x \in (-1,1]$, αν $-1 < \alpha < 0$, και (iii) για κάθε $x \in [-1,1]$, αν $\alpha \ge 0$ και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος.
Το υπόλοιπο Lagrange είναι

$$R_{n,0}(x,\zeta) = \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\zeta)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1} = \tbinom{\alpha}{n+1}(1+\zeta)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \ \text{ με } \zeta \in [0,x] \text{ ή } \zeta \in [x,0].$$

(i) Αν $x \in [0,1]$, τότε $x \le 1 \le 1+\zeta \le 2$ και, επομένως,

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| = \left|\tbinom{\alpha}{n+1}\right|(1+\zeta)^{\alpha}(\tfrac{x}{1+\zeta})^{n+1}.$$

(i_a) Τώρα, αν $a > 0$, εφαρμόζοντας προσεκτικά το λήμμα 10.1, βρίσκουμε ότι για $n > [\alpha]$ είναι

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \le c_2\tbinom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}2^{\alpha} \to 0.$$

(i_b) Αν $-1 < \alpha < 0$, τότε, πάλι από το λήμμα 10.1,

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \le c_2(n+1)^{-\alpha-1} \to 0.$$

(i_c) Αν $x \in [0,1)$ και $\alpha \le -1$, τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \le \left|\tbinom{\alpha}{n+1}\right|x^{n+1} \le c_2(n+1)^{-\alpha-1}x^{n+1} \to 0.$$

(ii) Αν $x \in (-1,0]$, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι

$$R_{n,0}(x) = \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt,$$

οπότε

$$\begin{aligned}|R_{n,0}(x)| &= \left|\tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|\int_x^0 (1+t)^{\alpha-n-1}(t-x)^n\,dt \le \left|\tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n\int_x^0(1+t)^{\alpha-1}\,dt\\ &= \left|\tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n\tfrac{1-(1+x)^{\alpha}}{\alpha} = (n+1)\left|\tbinom{\alpha}{n+1}\right||x|^n\tfrac{1-(1+x)^{\alpha}}{\alpha}.\end{aligned}$$

(ii_a) Αν $\alpha > 0$ και $n > [\alpha]$, συνεπάγεται

$$|R_{n,0}(x)| \le c_2(n+1)\tbinom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n\tfrac{1-(1+x)^{\alpha}}{\alpha} \to 0.$$

(ii_b) Αν $\alpha < 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x)| \le c_2(n+1)^{-\alpha}|x|^n\tfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{|\alpha|} \to 0.$$

Συνοψίζουμε: σε κάθε περίπτωση εκτός μιας έχουμε αποδείξει ότι $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$.
Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι όταν $x = -1$ και $\alpha > 0$. Τότε, όμως, δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα 10.11, οπότε κάνουμε το εξής. Χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις που ισχύουν όταν $x \in (-1,0]$ στην περίπτωση (ii_a) και γράφουμε

$$\left|(1+x)^{\alpha} - 1 - \tbinom{\alpha}{1}x - \cdots - \tbinom{\alpha}{n}x^n\right| = |R_{n,0}(x)| \le c_2(n+1)\tbinom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n\tfrac{1-(1+x)^{\alpha}}{\alpha}.$$

Παίρνουμε όρια καθώς $x \to -1+$ και βρίσκουμε

$$\left|0 - 1 - \tbinom{\alpha}{1}(-1) - \cdots - \tbinom{\alpha}{n}(-1)^n\right| \le c_2(n+1)\tbinom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}\tfrac{1}{\alpha} \to 0$$

Άρα και στην περίπτωση αυτή ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = (1+x)^{\alpha}$.

Ασκήσεις.

10.3.1. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους των δυναμοσειρών $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-(-2)^n\big)x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}(\frac{x-1}{x+1})^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(\frac{x-1}{x+1})^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$.

10.3.2. Χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor των $\sin x$ και $\cos x$ στον ξ, αποδείξτε τους τύπους

$$\sin x = \sin\xi\cos(x-\xi) + \cos\xi\sin(x-\xi), \qquad \cos x = \cos\xi\cos(x-\xi) - \sin\xi\sin(x-\xi),$$

οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με τους τύπους για το ημίτονο και το συνημίτονο αθροίσματος γωνιών.

10.3.3. Βρείτε τις σειρές Taylor στον 0 των $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

10.3.4. Βρείτε τους αρχικούς όρους των σειρών Taylor στον 0 των $\tan x$, $\frac{1}{\cos x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$.

10.3.5. Βρείτε τις σειρές Taylor στον 0 των $\sin(x^3)$, $(\sin x)^3$, $\sin x\sin(3x)$, $(\sin x)^6 + (\cos x)^6$, $\log\frac{1+x}{1-x}$, $\log(1+x+x^2)$, $\frac{1}{1-5x+6x^2}$, $\frac{e^x}{1-x}$, $x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$, $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

10.3.6. Υπολογίστε τα αθροίσματα $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}$.

10.3.7. Η άσκηση 5.6.16 λέει ότι η $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x\le 0\end{cases}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $h^{(n)}(0)=0$ για κάθε n. Είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$ η σειρά Taylor της h στον 0; Ποιό είναι το διάστημα σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς;

Ίδια ερώτηση για την $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$

10.3.8. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}e^{-k}\cos(k^2x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ συγκλίνει μόνο όταν $x=0$.

10.3.9. Έστω $f : I\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I. Η f χαρακτηρίζεται **πραγματική-αναλυτική** στο I αν για κάθε $\xi\in I$ υπάρχει $r>0$ ώστε $(\xi-r,\xi+r)\subseteq I$ και ώστε να ισχύει $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ για κάθε $x\in(\xi-r,\xi+r)$. Δηλαδή, η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I αν για κάθε $\xi\in I$ η f έχει σειρά Taylor στον ξ.

Έστω $f : I\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I. Αποδείξτε ότι η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I αν και μόνο αν για κάθε $\xi\in I$ υπάρχει ανοικτό διάστημα $J\subseteq I$ ώστε $\xi\in J$ και αριθμοί $M\ge 0$, $\rho>0$ ώστε να ισχύει $|f^{(n)}(x)|\le M\frac{n!}{\rho^n}$ για κάθε $x\in J$ και κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\ge 0$.

Αποδείξτε το **θεώρημα του Bernstein**: *Έστω $f : I\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f^{(n)}(x)\ge 0$ για κάθε $x\in I$ και κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\ge 0$. Τότε η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I.*

Έστω $f : I\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι ισχύει $(-1)^nf^{(n)}(x)\ge 0$ για κάθε $x\in I$ και κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\ge 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I.

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις της άσκησης 10.3.7 είναι πραγματικές-αναλυτικές στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ αλλά δεν είναι πραγματικές-αναλυτικές σε κανένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει τον 0. Τί γίνεται με τη συνάρτηση της άσκησης 10.3.8;

10.3.10. Αν $x\le -1$, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = -\infty$.

Αν $x>1$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ δεν έχει άθροισμα.

10.3.11. Έστω ότι ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος.

Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = +\infty$ αν (i) $\alpha<0$ και $x\le -1$ ή αν (ii) $\alpha>0$, ο $[\alpha]$ είναι περιττός και $x<-1$.

Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = -\infty$ αν $\alpha>0$, ο $[\alpha]$ είναι άρτιος και $x<-1$.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ δεν έχει άθροισμα αν (i) $x>1$ ή αν (ii) $x=1$ και $\alpha\le -1$.

10.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ορισμός μέσω δυναμοσειρών.

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε έναν από τους "αναλυτικούς" ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και τις αποδείξεις των βασικών ιδιοτήτων τους. Όπως είχαμε αναφέρει στην ενότητα 3.2, μέχρι τώρα βασιστήκαμε στον "γεωμετρικό" ορισμό των συναρτήσεων αυτών, ο οποίος δεν θεωρείται αποδεικτός από τη σκοπιά της Ανάλυσης, και θεωρήσαμε γνωστές τις ιδιότητές τους.

Ξεκινάμε με τις δυναμοσειρές

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\tfrac{x^{2k}}{(2k)!},\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

για τις οποίες γνωρίζουμε από την ενότητα 10.2 ότι έχουν ως διάστημα σύγκλισης το $\mathbb{R}$. Στην ίδια ενότητα, στο παράδειγμα 10.2.14, "γνωρίζοντας" τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είχαμε αποδείξει ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά είναι η $\cos x$ και η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά είναι η $\sin x$. Τώρα, όμως, δεχόμαστε ότι *δεν γνωρίζουμε* τις συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$ και *θα τις ορίσουμε*, χρησιμοποιώντας τις δυναμοσειρές και τις ιδιότητές τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε τη συνάρτηση* $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά και τη συνάρτηση* $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά. Δηλαδή, ορίζουμε:*

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\tfrac{x^{2k}}{(2k)!},\quad \sin x=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\qquad \textit{για κάθε }\ x\in\mathbb{R}. \tag{10.14}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.4. *Οι συναρτήσεις* $\cos x$ *και* $\sin x$ *είναι παραγωγίσιμες στο* $\mathbb{R}$ *και*

$$\tfrac{d\cos x}{dx}=-\sin x,\qquad \tfrac{d\sin x}{dx}=\cos x.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα 10.10 συνεπάγεται ότι οι $\cos x$, $\sin x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και από τους τύπους (10.14) έχουμε

$$\cos' x=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k 2k\tfrac{x^{2k-1}}{(2k)!}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=-\sin x$$

και

$$\sin' x=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)\tfrac{x^{2k-2}}{(2k-1)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\tfrac{x^{2k}}{(2k)!}=\cos x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.5. *Η* $\cos x$ *είναι άρτια, η* $\sin x$ *είναι περιττή και ισχύει* $\cos 0=1$ *και* $\sin 0=0$.

Απόδειξη. Όλα είναι προφανή από τους τύπους (10.14). □

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.6. [α] *Για κάθε* x,y *ισχύει*

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,\qquad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y. \tag{10.15}$$

[β] *Για κάθε* x *ισχύει*

$$(\sin x)^2+(\cos x)^2=1.$$

[γ] *Για κάθε* x *ισχύει*

$$|\sin x|\le 1,\qquad |\cos x|\le 1.$$

Απόδειξη. [α] [22] Για κάθε y, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x,$$

οπότε είναι

$$f'(x) = \sin(y-x)\cos x - \cos(y-x)\sin x + \cos(y-x)\sin x - \sin(y-x)\cos x = 0$$

για κάθε x. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει

$$\cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x = \cos(y-0)\cos 0 - \sin(y-0)\sin 0 = \cos y.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε x, y, μετατρέπουμε το y σε $y+x$ και καταλήγουμε στην πρώτη ισότητα (10.15). Η δεύτερη ισότητα (10.15) αποδεικνύεται είτε με παρόμοιο τρόπο είτε παραγωγίζοντας την πρώτη ισότητα ως προς το x.
[β] Θέτουμε $y=-x$ στην πρώτη ισότητα (10.15) και χρησιμοποιούμε την πρόταση 10.5.
[γ] Προφανές από το [β]. □

Θα αποδείξουμε, τώρα, μερικές επιπλέον ιδιότητες των συναρτήσεων $\cos x$, $\sin x$ και, κυρίως, *θα ορίσουμε τον αριθμό* π.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.7. *Υπάρχει ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης* $\cos x = 0$.

Απόδειξη. Είναι $\cos 0 = 1$. Επίσης, $\cos 2 = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}$, οπότε

$$\textstyle\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} \to \cos 2 \qquad \text{όταν } k\to+\infty.$$

Αν ο k είναι άρτιος ≥ 4, τότε

$$\textstyle\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \cdots - \left(\frac{2^{2k-2}}{(2k-2)!} - \frac{2^{2k}}{(2k)!}\right) < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3},$$

επειδή κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$.
Επειδή η $\cos x$ είναι συνεχής και $\cos 2 < 0 < \cos 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $\cos\xi = 0$. Τέλος, βάσει του αποτελέσματος της άσκησης 4.2.10, υπάρχει ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το σύμβολο* π *δηλώνει το διπλάσιο της ελάχιστης θετικής λύσης της εξίσωσης* $\cos x = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.8. [α] *Για κάθε* x *ισχύει*

$$\cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \cos(x+\pi) = -\cos x, \quad \cos\left(x+\tfrac{3\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x. \tag{10.16}$$

Ειδικώτερα, οι $\cos x$ *και* $\sin x$ *είναι περιοδικές με περίοδο* 2π.
[β] *Η* $\cos x$ *είναι γνησίως θετική στο* $[0,\frac{\pi}{2})$, *γνησίως αρνητική στο* $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ *και γνησίως θετική στο* $(\frac{3\pi}{2},2\pi]$. *Επίσης,* $\cos 0 = \cos(2\pi) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ *και* $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$.
[γ] *Η* $\sin x$ *είναι γνησίως θετική στο* $(0,\pi)$ *και γνησίως αρνητική στο* $(\pi,2\pi)$. *Επίσης,* $\sin 0 = \sin\pi = \sin(2\pi) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ *και* $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$.
[δ] *Η* $\cos x$ *είναι γνησίως φθίνουσα στο* $[0,\pi]$ *με αντίστοιχο σύνολο τιμών το* $[-1,1]$ *και γνησίως αύξουσα στο* $[\pi,2\pi]$ *με αντίστοιχο σύνολο τιμών το* $[-1,1]$.
[ε] *Η* $\sin x$ *είναι γνησίως αύξουσα στο* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *με αντίστοιχο σύνολο τιμών το* $[0,1]$, *γνησίως φθίνουσα στο* $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ *με αντίστοιχο σύνολο τιμών το* $[-1,1]$ *και γνησίως αύξουσα στο* $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ *με αντίστοιχο σύνολο τιμών το* $[-1,0]$.

[22] Οι σχέσεις αυτές μπορούν να αποδειχτούν χρησιμοποιώντας γινόμενα Cauchy σειρών, αλλά ο τρόπος αυτός είναι αρκετά περίπλοκος.

Απόδειξη. Η $\cos x$ δεν μηδενίζεται στο $[0, \frac{\pi}{2})$ και είναι συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0, \frac{\pi}{2})$ και, επειδή $\cos 0 = 1$, συνεπάγεται

$$\cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \cos x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Η σχέση $\sin' x = \cos x > 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ συνεπάγεται ότι η $\sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ειδικώτερα, έχουμε

$$\sin 0 = 0 \qquad \text{και} \qquad \sin x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Από την $(\sin\frac{\pi}{2})^2 + (\cos\frac{\pi}{2})^2 = 1$ παίρνουμε $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$ και, επειδή $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, συνεπάγεται $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Επειδή η $\sin x$ είναι και συνεχής, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ είναι το $[\sin 0, \sin\frac{\pi}{2}] = [0, 1]$. Κατόπιν, η σχέση $\cos' x = -\sin x < 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ συνεπάγεται ότι η $\cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή η $\cos x$ είναι και συνεχής, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ είναι το $[\cos\frac{\pi}{2}, \cos 0] = [0, 1]$.
Τώρα, από τις ισότητες (10.15) και από τις τιμές $\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ και $\cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0$ βρίσκουμε τις τιμές των $\cos x$ και $\sin x$ στα σημεία π, $\frac{3\pi}{2}$ και 2π καθώς και τις σχέσεις (10.16). Από τις σχέσεις αυτές καθώς και από τη συμπεριφορά της $\cos x$ και της $\sin x$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, διακρίνουμε τη συμπεριφορά της $\cos x$ και της $\sin x$ στα διαστήματα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, δηλαδή συνολικά στο $[0, 2\pi]$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.9. *Για κάθε a, b με $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικός $x \in [0, 2\pi)$ ώστε $\cos x = a$ και $\sin x = b$.*

Απόδειξη. Κατ'αρχάς έστω $a, b \geq 0$ με $a^2 + b^2 = 1$. Προφανώς, συνεπάγεται $0 \leq a, b \leq 1$. Επειδή η $\cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ με σύνολο τιμών το $[0, 1]$, υπάρχει μοναδικός $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ώστε $\cos x = a$. Από την $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ συνεπάγεται $\sin x = \pm b$ και, επειδή $\sin x \geq 0$, έχουμε $\sin x = b$. Δεν υπάρχει x στο $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ ώστε να είναι $\cos x = a$ και $\sin x = b$, διότι για x στο $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ ένας τουλάχιστον από τους $\cos x$ και $\sin x$ είναι αρνητικός.
Έχουμε άλλες τρεις περιπτώσεις: την $a \geq 0, b < 0$ την $a < 0, b \geq 0$ και την $a < 0, b < 0$. Σε κάθε περίπτωση η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη στην πρώτη περίπτωση που εξετάσαμε. □

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε το εξής. Στα κεφάλαια 4 και 5 αποδείχτηκε η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με βάση τον γεωμετρικό ορισμό τους. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν οι ανισότητες (10.17), οι οποίες, σ' αυτό το πλαίσιο, αποδεικνύονται, φυσικά, με γεωμετρικό τρόπο. Από τη στιγμή, όμως, που η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποδεικνύονται με βάση τον αναλυτικό ορισμό τους (ως παραδείγματα δυναμοσειρών), οι ανισότητες αυτές πρέπει να αποδειχθούν με αναλυτικό τρόπο. Ιδού η απόδειξή τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.10. *Ισχύει*

$$|\sin x| \leq |x| \quad \textit{για κάθε } x \qquad \textit{και} \qquad |x| \leq |\tan x| \quad \textit{για } |x| < \tfrac{\pi}{2}. \tag{10.17}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x \pm \sin x$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 1 \pm \cos x \geq 0$ για κάθε x, οπότε οι f είναι αύξουσες. Επομένως, ισχύει $x \pm \sin x = f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \geq 0$ και $x \pm \sin x = f(x) \leq f(0) = 0$ για κάθε $x \leq 0$. Άρα ισχύει $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε x.
Κατόπιν θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x\cos x - \sin x$ για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ισχύει $g'(x) = -x\sin x \leq 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, οπότε η g είναι φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Άρα ισχύει $x\cos x - \sin x = g(x) \leq g(0) = 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ και $x\cos x - \sin x = g(x) \geq g(0) = 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. Άρα ισχύει $|x| \leq |\tan x|$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. □

Μέχρι στιγμής έχουμε όλες τις ιδιότητες των συναρτήσεων $\cos x$ και $\sin x$: τις "αλγεβρικές", τις ιδιότητες μονοτονίας και περιοδικότητας και τις ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας. Οι ιδιότητες των ολοκληρωμάτων τους είναι άμεσες συνέπειες των προηγουμένων. Οι συναρτήσεις $\tan x$ και $\cot x$ ορίζονται με τον γνωστό τρόπο από τις $\cos x$ και $\sin x$ και οι ιδιότητές τους είναι πορίσματα των ιδιοτήτων των $\cos x$ και $\sin x$. Το ίδιο ισχύει με τους ορισμούς και τις ιδιότητες των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Όλα αυτά έχουν περιγραφεί πλήρως στα προηγούμενα κεφάλαια και δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω.

Είναι εύλογο να προτιμάμε τον "γεωμετρικό" ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων λόγω της απλότητάς του. Επίσης, υπάρχουν και άλλοι, και μάλιστα "αναλυτικοί", ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έναν από αυτούς, μέσω ολοκληρώματος, θα δούμε με συνοπτικό τρόπο στην επόμενη υποενότητα. Γι αυτό θα αποδείξουμε ότι, ασχέτως του τρόπου τον οποίο επιλέγουμε για να ορίσουμε τις συναρτήσεις αυτές, *καταλήγουμε στις ίδιες συναρτήσεις*. Θα σκεφτούμε ότι, ασχέτως του τρόπου ορισμού των $\sin x$, $\cos x$, αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες: $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.11. *Έστω δυο ζεύγη συναρτήσεων $f_1, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f_2, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε:*
(i) ${f_1}' = -g_1$ και ${g_1}' = f_1$,
(ii) ${f_2}' = -g_2$ και ${g_2}' = f_2$ και
(iii) $f_1(0) = f_2(0)$ και $g_1(0) = g_2(0)$.
Τότε τα δυο ζεύγη είναι τα ίδια. Δηλαδή, $f_1 = f_2$ και $g_1 = g_2$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = ((f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2$$

και τότε ισχύει

$$f'(x) = 2(f_1(x) - f_2(x))(-g_1(x) + g_2(x)) + 2(g_1(x) - g_2(x))(f_1(x) - f_2(x)) = 0$$

για κάθε x. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει

$$(f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2 = (f_1(0) - f_2(0))^2 + (g_1(0) - g_2(0))^2 = 0$$

για κάθε x. Άρα ισχύει $f_1(x) = f_2(x)$ και $g_1(x) = g_2(x)$ για κάθε x. □

Ορισμός μέσω ολοκληρώματος.

Τώρα θα δούμε πολύ συνοπτικά έναν εναλλακτικό "αναλυτικό" ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω ολοκληρώματος. Ακολουθούμε την εξής πορεία: πρώτα ορίζουμε την συνάρτηση $\arctan y$, κατόπιν την αντίστροφή της, την $\tan x$, και, τέλος τις $\sin x$ και $\cos x$. Ειδικά προς το τέλος θα παραλείψουμε αρκετές λεπτομέρειες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε*

$$\arctan y = \int_0^y \frac{1}{1+s^2}\, ds \qquad \text{για κάθε } y.$$

Δηλαδή, ορίζουμε τη συνάρτηση $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $\frac{1}{1+y^2}$ στο $\mathbb{R}$. Η $\frac{1}{1+y^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\arctan y$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Προφανώς, $\arctan 0 = 0$ και, επειδή η παράγωγος είναι θετική, η $\arctan y$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\arctan y$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\arctan(-y) = \int_0^{-y} \frac{1}{1+s^2}\, ds = -\int_0^{y} \frac{1}{1+(-s)^2}\, ds = -\arctan y$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $y \geq 1$ ισχύει

$$\arctan y = \int_0^y \frac{1}{1+s^2}\,ds = \int_0^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds + \int_1^y \frac{1}{1+s^2}\,ds \leq \int_0^1 1\,ds + \int_1^y \frac{1}{s^2}\,ds = 1 + 1 - \frac{1}{y} \leq 2.$$

Άρα η $\arctan y$ είναι άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, το $\lim_{y\to+\infty} \arctan y$ υπάρχει και είναι αριθμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε*

$$\pi = 2 \lim_{y\to+\infty} \arctan y.$$

Επειδή η $\arctan y$ είναι περιττή, είναι

$$\lim_{y\to-\infty} \arctan y = \lim_{y\to+\infty} \arctan(-y) = -\lim_{y\to+\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Άρα το σύνολο τιμών της $\arctan y$ είναι το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε*

$$\tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

Η $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty.$$

Κατόπιν, έστω $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Τότε για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ είναι $x - k\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, οπότε έχει οριστεί η τιμή $\tan(x-k\pi)$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε $\tan x = \tan(x-k\pi)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $\tan x$ ορίζεται στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Καθώς ο x διατρέχει το $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, ο $x-k\pi$ διατρέχει το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και μπορούμε εύκολα να δούμε ότι όλες οι ιδιότητες της $\tan x$ στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ "μεταφέρονται" ως ιδιότητές της στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Για παράδειγμα, η $\tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$:

$$\tan : (-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi) \to \mathbb{R}$$

Επίσης, είναι $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)-} \tan x = +\infty$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η $\tan x$ ορίζεται στην ένωση $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ή, ισοδύναμα, στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ και είναι φανερό από τον ορισμό της ότι η $\tan x$ είναι περιοδική με περίοδο π.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης, υπολογίζουμε την παράγωγο της $\tan x$ στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και τον αντίστοιχο $y = \tan x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\tan' x = \frac{1}{\arctan' y} = \frac{1}{1/(1+y^2)} = 1 + y^2 = 1 + (\tan x)^2\,.$$

Λόγω περιοδικότητας, αυτό ισχύει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$\tan' x = 1 + (\tan x)^2, \qquad \text{αν } x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τέλος, ορίζουμε τις συναρτήσεις* $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με τύπους:*

$$\cos x = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}\,, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin x = \begin{cases} (-1)^k \frac{\tan x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}\,, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \\ (-1)^k\,, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Είναι, τώρα, πολύ εύκολο να αποδειχθούν όλες οι ιδιότητες των $\cos x$, $\sin x$. Για παράδειγμα, αμέσως αποδεικνύεται ότι ισχύει $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ για κάθε x, ότι οι $\cos x$, $\sin x$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και ότι ισχύει $\cos' x = -\sin x$ και $\sin' x = \cos x$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Επίσης, μέσω του ορισμού της παραγώγου, βλέπουμε ότι είναι παραγωγίσιμες και στα σημεία $\frac{\pi}{2} + k\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και ότι οι σχέσεις $\cos' x = -\sin x$ και $\sin' x = \cos x$ ισχύουν και στα σημεία αυτά και, επομένως, ότι ισχύουν σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Αφήνουμε στον φιλότιμο και εργατικό αναγνώστη τις λεπτομέρειες.

Ασκήσεις.

10.4.1. Αποδείξτε τις βασικές ιδιότητες των $\cos x$ και $\sin x$ οι οποίες αναφέρονται στην τελευταία παράγραφο αυτής της ενότητας, δηλαδή μετά από τον ορισμό των συναρτήσεων αυτών μέσω ολοκληρώματος.

10.4.2. Υπολογίστε με αναλυτικό τρόπο (δηλαδή, όχι γεωμετρικά) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{3}$.

10.4.3. Αποδείξτε ότι:

(i) $\cos y = \cos x$ αν και μόνο αν $y = x + k2\pi$ ή $y = -x + k2\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\sin y = \sin x$ αν και μόνο αν $y = x + k2\pi$ ή $y = \pi - x + k2\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\tan y = \tan x$ αν και μόνο αν $y = x + k\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $\cot y = \cot x$ αν και μόνο αν $y = x + k\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

10.4.4. Αποδείξτε ότι ισχύει $|a\cos x + b\sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ για κάθε x.

10.4.5. Έστω οποιοιδήποτε a, b όχι και οι δυο ίσοι με 0. Αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί $p > 0$ και q ώστε να ισχύει $a\cos x + b\sin x = p\cos(x - q)$ για κάθε x.

Κεφάλαιο 11

Μετρικοί χώροι.

11.1 Μετρικοί χώροι. Παραδείγματα.

Παράδειγμα 11.1.1. Έστω $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ με d παράγοντες είναι το σύνολο με στοιχεία όλες τις διατεταγμένες d-άδες αριθμών:

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \big\{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\big\}.$$

Μέσω κατάλληλης επιλογής ορθογωνίων αξόνων, το $\mathbb{R}^2$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων ενός οποιουδήποτε επιπέδου και το $\mathbb{R}^3$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων του χώρου.
Αν $d = 1$, θεωρούμε $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, οπότε το $\mathbb{R}^1$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων μιας οποιασδήποτε ευθείας.
Αν x, y είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία της ευθείας είναι ίση με την ποσότητα

$$|x - y|.$$

Αν $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$, $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}^2$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία του επιπέδου είναι ίση με

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Τέλος, αν $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3)$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία του χώρου είναι ίση με

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Η Ευκλείδεια απόσταση των x, y είναι ίση με το Ευκλείδειο μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $[\mathrm{x}, \mathrm{y}]$ που έχει άκρα τα σημεία αυτά, είτε αυτά είναι σημεία της ευθείας είτε είναι σημεία του επιπέδου είτε είναι σημεία του χώρου.
Υπάρχουν μερικές απλές ιδιότητες της Ευκλείδειας απόστασης. Κατ' αρχάς, η Ευκλείδεια απόσταση δυο σημείων είναι μη αρνητικός αριθμός. Δεύτερον, η Ευκλείδεια απόσταση δυο σημείων είναι ίση με 0 αν και μόνο αν τα δυο σημεία ταυτίζονται. Τρίτον, η Ευκλείδεια απόσταση δυο σημείων δε μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τη σειρά τους. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **συμμετρία** της Ευκλείδειας απόστασης. Τέλος, η Ευκλείδεια απόσταση δυο σημείων δεν είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των Ευκλείδειων αποστάσεών τους από οποιοδήποτε τρίτο σημείο. Αυτή η σχέση ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα** της Ευκλείδειας απόστασης, διότι, με άλλα λόγια, εκφράζει το γεγονός ότι το Ευκλείδειο μήκος μιας πλευράς τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των Ευκλείδειων μηκών των δυο άλλων πλευρών. Οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων στην ευθεία, στο επίπεδο και στον χώρο είναι ζήτημα απλών πράξεων. Θα αποφύγουμε τις λεπτομέρειες, διότι θα δούμε την απόδειξη στη γενική περίπτωση του συνόλου $\mathbb{R}^d$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε* $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *ορίζουμε την* **Ευκλείδεια νόρμα** *του* x *στον* $\mathbb{R}^d$ *με τον τύπο*

$$\|\mathrm{x}\|_2 = ({x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2)^{1/2}.$$

Επίσης, για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d), \mathrm{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ *ορίζουμε το* **Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο** *των* x, y *στον* $\mathbb{R}^d$ *με τον τύπο*

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d.$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ CAUCHY. *Για κάθε* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει*

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle| \leq \|\mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{y}\|_2.$$

Απόδειξη. Αν $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d)$ και $\mathrm{y} = (y_1, \dots, y_d)$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \|t\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2{}^2 &= (tx_1 + y_1)^2 + \cdots + (tx_d + y_d)^2 \\ &= t^2({x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2) + 2t(x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d) + ({y_1}^2 + \cdots + {y_d}^2) \qquad (11.1) \\ &= t^2 \|\mathrm{x}\|_2{}^2 + 2t\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle + \|\mathrm{y}\|_2{}^2. \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει

$$t^2 \|\mathrm{x}\|_2{}^2 + 2t\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle + \|\mathrm{y}\|_2{}^2 \geq 0 \qquad (11.2)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οπότε η διακρίνουσα της παράστασης στο αριστερό μέρος της (11.2) είναι ≤ 0. Δηλαδή, είναι $4\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle^2 - 4\|\mathrm{x}\|_2{}^2 \|\mathrm{y}\|_2{}^2 \leq 0$ και, επομένως, $|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle| \leq \|\mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{y}\|_2$. □

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ. *Για κάθε* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει*

$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2 \leq \|\mathrm{x}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την (11.1) με $t = 1$ και έχουμε

$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2{}^2 = \|\mathrm{x}\|_2{}^2 + 2\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle + \|\mathrm{y}\|_2{}^2.$$

Από την ανισότητα του Cauchy συνεπάγεται

$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2{}^2 \leq \|\mathrm{x}\|_2{}^2 + 2\|\mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{y}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2{}^2 = \big(\|\mathrm{x}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2\big)^2.$$

Άρα $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2 \leq \|\mathrm{x}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε την* **Ευκλείδεια απόσταση** *ανάμεσα στα* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ *με τον τύπο*

$$d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2$$

Η $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2$ αποτελεί γενίκευση στις d διαστάσεις της γνωστής Ευκλείδειας απόστασης στις διαστάσεις 1, 2 και 3 που αναφέραμε στην αρχή αυτής της ενότητας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.1. *Για κάθε* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει:*
[α] $0 \leq d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) < +\infty$.
[β] $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathrm{x} = \mathrm{y}$.
[γ] $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d_2(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
[δ] $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq d_2(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + d_2(\mathrm{z}, \mathrm{y})$.

Απόδειξη. Οι [α], [β], [γ] είναι προφανείς.
Η [δ] προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2 \leq \|\mathrm{x}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2$, αντικαθιστώντας το x με το $\mathrm{x} - \mathrm{z}$ και το y με το $\mathrm{z} - \mathrm{y}$. □

Το [γ] της Πρότασης 11.1 εκφράζει τη **συμμετρία** και το [δ] την **τριγωνική ανισότητα** της Ευκλείδειας απόστασης.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Εστω* X *οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο. Ονομάζουμε* **μετρική** *στο* X *κάθε συνάρτηση* d *ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο* $X \times X$ *και με πραγματικές τιμές*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) $d(x, y) \geq 0$ *για κάθε* $x, y \in X$.
(ii) *Για κάθε* $x, y \in X$ *ισχύει:* $d(x, y) = 0$ *αν και μόνο αν* $x = y$.
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ *για κάθε* $x, y \in X$.
(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$.
Λέμε ότι το ζευγάρι (X, d) *αποτελεί έναν* **μετρικό χώρο** *ή ότι "το σύνολο* X *είναι εφοδιασμένο με τη μετρική* d*" ή, απλώς, λέμε "το σύνολο* X *με τη μετρική* d*". Επίσης, την τιμή* $d(x, y)$ *στο ζευγάρι* (x, y) *την ονομάζουμε* **απόσταση** *των* x, y.

Με απλοϊκά λόγια, μετρικός χώρος είναι ένα μη-κενό σύνολο X και ένας συγκεκριμένος τρόπος μέτρησης αποστάσεων ανάμεσα στα στοιχεία του. Βέβαια, έχουμε συνηθίσει να μελετάμε τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, για τα οποία έχουμε και την εμπειρική γεωμετρική εποπτεία, και να μετράμε αποστάσεις στα σύνολα αυτά με τον συγκεκριμένο Ευκλείδιο τρόπο. Όμως, υπάρχουν και άλλοι τρόποι να μετράμε αποστάσεις και στα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αλλά και σε πολλά άλλα ενδιαφέροντα σύνολα. Μια ακόμη παρατήρηση. Μετρικός χώρος είναι δυο πράγματα μαζί: ένα μη-κενό σύνολο X και μια μετρική $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Τυπικά, δηλαδή, όταν έχουμε ένα σύνολο X δε μπορούμε να μιλάμε για *μετρικό χώρο* X παρά μόνον όταν είναι ήδη καθορισμένη και εννοείται από τα συμφραζόμενα μια συγκεκριμένη μετρική d στο σύνολο X.

Παράδειγμα 11.1.2. Η $d_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που έχουμε ήδη ορίσει με τύπο $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2$ ονομάζεται **Ευκλείδεια μετρική** στον $\mathbb{R}^d$. Το περιεχόμενο της Πρότασης 11.1 είναι ακριβώς το ότι η d_2 είναι μετρική στον $\mathbb{R}^d$. Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^d, d_2)$ ονομάζεται d-**διάστατος Ευκλείδειος χώρος**. Όταν λέμε **ο Ευκλείδειος χώρος** $\mathbb{R}^d$ εννοούμε το $\mathbb{R}^d$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική.
Από εδώ και πέρα, όποτε εμφανίζεται το $\mathbb{R}^d$*, και ειδικώτερα τα* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$*, θα εννοείται ότι πρόκειται για τον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^d$*, δηλαδή για το* $\mathbb{R}^d$ *εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική. Και όταν μιλάμε για απόσταση ή νόρμα στο* $\mathbb{R}^d$ *θα εννοούμε την Ευκλείδεια απόσταση ή νόρμα. Αν θελήσουμε να εφοδιάσουμε το* $\mathbb{R}^d$ *με μια μετρική διαφορετική από την Ευκλείδεια, θα την αναφέρουμε ρητά.*

Παράδειγμα 11.1.3. Έστω *οποιοδήποτε* μη-κενό σύνολο X και η συνάρτηση $d_\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$d_\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η d_δ έχει τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής. Οι (i), (ii), (iii) είναι προφανείς. Αν $d_\delta(x, y) = 0$, η ανισότητα $d_\delta(x, y) \leq d_\delta(x, z) + d_\delta(z, y)$ ισχύει, διότι $d_\delta(x, z) \geq 0$ και $d_\delta(z, y) \geq 0$. Αν $d_\delta(x, y) = 1$, τότε $x \neq y$, οπότε ένα τουλάχιστον από τα x, y είναι διαφορετικό από το z και, επομένως, ένας τουλάχιστον από τους $d_\delta(x, z)$, $d_\delta(z, y)$ είναι ίσος με 1 (και ο άλλος είναι ≥ 0). Άρα $d_\delta(x, y) = 1 \leq d_\delta(x, z) + d_\delta(z, y)$.
Η d_δ ονομάζεται **διακριτή μετρική** στο X.

Παράδειγμα 11.1.4. Θεωρούμε οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο A και το σύνολο $B(A)$ όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$B(A) = \{ f \mid \text{η } f : A \to \mathbb{R} \text{ είναι φραγμένη } \}.$$

Έχουμε ήδη ορίσει στην ενότητα 9.2 την *ομοιόμορφη απόσταση*

$$\|f-g\|_A = \sup\{|f(x)-g(x)|\,|\,x \in A\}$$

οποιωνδήποτε συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$. Αν $f, g \in B(A)$, δηλαδή αν οι f, g είναι και φραγμένες στο A, τότε $0 \leq \|f-g\|_A < +\infty$. Πράγματι, αν υπάρχουν $M, N \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq N$ για κάθε $x \in A$, τότε ισχύει

$$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N$$

για κάθε $x \in A$ και, επομένως, $\|f-g\|_A \leq M + N < +\infty$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$d_A : B(A) \times B(A) \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$d_A(f,g) = \|f-g\|_A = \sup\{|f(x)-g(x)|\,|\,x \in A\}.$$

Είναι φανερό ότι η d_A ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ιδιότητες μιας μετρικής στο $B(A)$. Έχουμε ήδη αποδείξει, ως απλή συνέπεια της Πρότασης 9.2, ότι ισχύει

$$\|f-g\|_A \leq \|f-h\|_A + \|h-g\|_A$$

για κάθε $f, g, h \in B(A)$. Άρα η d_A είναι μετρική στο $B(A)$. Η d_A ονομάζεται **ομοιόμορφη μετρική** στο $B(A)$ ή **μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης**[1] στο A.

Ασκήσεις.

11.1.1. Διατυπώστε με σύμβολα και αποδείξτε αλγεβρικά την τριγωνική ανισότητα της Ευκλείδειας μετρικής στους $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

11.1.2. [α] Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε πέντε συναρτήσεις d με τους τύπους $d(x,y) = (x-y)^2$, $d(x,y) = |x-y|^{1/2}$, $d(x,y) = |x^2-y^2|$, $d(x,y) = |x-2y|$ και $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Ποιές από αυτές τις d είναι μετρικές στο $\mathbb{R}$;

[β] Για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, x_2), \mathrm{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \big((x_1-y_1)^2 + 4(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}$. Είναι η d μετρική στο $\mathbb{R}^2$;

[γ] Ορίζουμε $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = |x_1 - y_1|$ για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Είναι η d μετρική στο $\mathbb{R}^3$;

11.1.3. Για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε την p-**νόρμα** του x στον $\mathbb{R}^d$ με τον τύπο

$$\|\mathrm{x}\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}, & \text{αν } 1 \leq p < +\infty \\ \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}, & \text{αν } p = +\infty \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η 2-νόρμα ταυτίζεται με την Ευκλείδεια νόρμα.

Αν $1 < p, q < +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, αποδείξτε ότι ισχύει[2] $|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle| \leq \|\mathrm{x}\|_p \|\mathrm{y}\|_q$ για κάθε $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει για τα ζεύγη $p = 1, q = +\infty$ και $p = +\infty, q = 1$.

Αποδείξτε ότι η p-νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.[3]

Ορίζουμε την $d_p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με τύπο $d_p(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|_p$ για κάθε $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι η d_p είναι μετρική στον $\mathbb{R}^d$. Η d_p ονομάζεται p-**μετρική** και η απόσταση $d_p(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ονομάζεται p-**απόσταση** των x, y.

Πώς μεταβάλλεται η p-νόρμα ενός (σταθερού) $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ καθώς το p αυξάνεται στο $[1, +\infty]$; Πώς μεταβάλλεται η p-απόσταση ανάμεσα σε δυο (σταθερά) $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ καθώς το p αυξάνεται στο $[1, +\infty]$;

[1] Ο όρος θα αιτιολογηθεί στην ενότητα 11.4.

[2] Δείτε την ανισότητα του Hölder στις ασκήσεις 5.4.22 και 5.5.39.

[3] Δείτε την ανισότητα του Minkowski στην άσκηση 5.4.22.

11.1.4. Θεωρούμε το σύνολο $C([a,b])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$C([a.b]) = \{f \mid \text{η } f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ είναι συνεχής}\}.$$

Για κάθε $f\in C([a,b])$ ορίζουμε την p-**νόρμα** της f στον $C([a,b])$ με τον τύπο

$$\|f\|_p = \begin{cases} \big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\big)^{1/p}, & \text{αν } 1\le p<+\infty \\ \max\{|f(x)| \mid x\in[a,b]\}, & \text{αν } p=+\infty \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι $\|f\|_\infty = \|f\|_{[a,b]}$.
Επίσης, για κάθε $f,g\in C([a,b])$ ορίζουμε

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Αν $1<p,q<+\infty$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, αποδείξτε ότι ισχύει[4] $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_p\|g\|_q$ για κάθε $f,g\in C([a,b])$. Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει για τα ζεύγη $p=1,q=+\infty$ και $p=+\infty,q=1$.

Αποδείξτε ότι η p-νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.[5]

Ορίζουμε την $d_p: C([a,b])\times C([a,b])\to\mathbb{R}$ με τύπο $d_p(f,g)=\|f-g\|_p$ για κάθε $f,g\in C([a,b])$. Αποδείξτε ότι η d_p είναι μετρική στον $C([a,b])$. Η d_p ονομάζεται p-**μετρική** και η απόσταση $d_p(f,g)$ ονομάζεται p-**απόσταση** των f,g.

11.1.5. Έστω $1\le p<+\infty$. Θεωρούμε το σύνολο l_p όλων των ακολουθιών $\mathrm{x}=(x_n)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^p<+\infty$. Δηλαδή,

$$l_p = \{(x_n) \mid \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^p<+\infty\}.$$

Αν $p=+\infty$, θεωρούμε το σύνολο l_∞ όλων των φραγμένων ακολουθιών $\mathrm{x}=(x_n)$, δηλαδή αυτών με την ιδιότητα $\sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}<+\infty$. Δηλαδή,

$$l_\infty = \{(x_n) \mid \sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}<+\infty\}.$$

Για κάθε $\mathrm{x}=(x_n)\in l_p$ ορίζουμε την p-**νόρμα** της x στον l_p με τον τύπο

$$\|\mathrm{x}\|_p = \begin{cases} \big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^p\big)^{1/p}, & \text{αν } 1\le p<+\infty \\ \sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}, & \text{αν } p=+\infty \end{cases}$$

Αν $1<p,q<+\infty$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ καθώς και για τα ζεύγη $p=1,q=+\infty$ και $p=+\infty,q=1$ ορίζουμε[6]

$$\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}x_ny_n$$

για κάθε $\mathrm{x}=(x_n)\in l_p$ και κάθε $\mathrm{y}=(y_n)\in l_q$. Αποδείξτε ότι η σειρά η οποία ορίζει το $\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle$ συγκλίνει και ότι ισχύει $|\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle|\le\|\mathrm{x}\|_p\|\mathrm{y}\|_q$ για κάθε $\mathrm{x}\in l_p$ και κάθε $\mathrm{y}\in l_q$.

Αποδείξτε ότι η p-νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.[7]

Ορίζουμε την $d_p: l_p\times l_p\to\mathbb{R}$ με τύπο $d_p(\mathrm{x},\mathrm{y})=\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|_p$ για κάθε $\mathrm{x},\mathrm{y}\in l_p$. Αποδείξτε ότι η d_p είναι μετρική στον l_p. Η d_p ονομάζεται p-**μετρική** και η απόσταση $d_p(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ονομάζεται p-**απόσταση** των x,y.

11.1.6. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και μη-κενό $W\subseteq X$. Θεωρούμε τον περιορισμό της συνάρτησης $d:X\times X\to\mathbb{R}$ στο $W\times W$. Δηλαδή, για κάθε $x,y\in W$ η τιμή $d(x,y)$ του περιορισμού $d:W\times W\to\mathbb{R}$ είναι ίδια με την τιμή $d(x,y)$ της $d:X\times X\to\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η $d:W\times W\to\mathbb{R}$ είναι μετρική στο W.

Η μετρική $d:W\times W\to\mathbb{R}$ ονομάζεται **μετρική υπόχωρου** στο W και ο μετρικός χώρος (W,d) ονομάζεται **μετρικός υπόχωρος** του (X,d).

[4] Δείτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 6.4.17.
[5] Δείτε την ανισότητα του Minkowski στην άσκηση 6.4.17.
[6] Δείτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 6.4.17.
[7] Δείτε την ανισότητα του Minkowski στην άσκηση 8.3.23.

11.2 Περιοχές, ανοικτά σύνολα, κλειστά σύνολα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αν $x \in X$ και $r > 0$, ονομάζουμε r-**περιοχή** του x ή περιοχή **κέντρου** x και **ακτίνας** r και συμβολίζουμε $N_x(r)$ το σύνολο*

$$N_x(r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

*Η αντίστοιχη **κλειστή περιοχή** είναι το σύνολο*

$$\overline{N}_x(r) = \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}.$$

Είναι προφανές ότι *κάθε r-περιοχή περιέχει τουλάχιστον το κέντρο της.*

Παράδειγμα 11.2.1. Στο $\mathbb{R}$ οι περιοχές είναι γνωστά σύνολα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $r > 0$, το $N_x(r)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων της ευθείας των οποίων η απόσταση από το x είναι μικρότερη από r, δηλαδή το ανοικτό διάστημα $(x - r, x + r)$. Ομοίως, η $\overline{N}_x(r)$ είναι το διάστημα $[x - r, x + r]$.
Στο $\mathbb{R}^2$ η περιοχή κέντρου x $\in \mathbb{R}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το x είναι μικρότερη από r, δηλαδή ο δίσκος με κέντρο x και ακτίνα r χωρίς τη συνοριακή περιφέρειά του. Η αντίστοιχη κλειστή περιοχή είναι ο δίσκος με κέντρο x και ακτίνα r μαζί με τη συνοριακή περιφέρειά του.
Στο $\mathbb{R}^3$ η περιοχή κέντρου x $\in \mathbb{R}^3$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του χώρου των οποίων η απόσταση από το x είναι μικρότερη από r, δηλαδή η μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r χωρίς τη συνοριακή επιφάνειά της. Η αντίστοιχη κλειστή περιοχή είναι η μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r μαζί με τη συνοριακή επιφάνειά της.
Είναι φανερό ότι από τα παραδείγματα του δίσκου και της μπάλας στα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, αντιστοίχως, προέρχονται οι όροι *κέντρο* και *ακτίνα* στη γενική περίπτωση των περιοχών σε μετρικούς χώρους. Μάλιστα, και στην περίπτωση του γενικού $\mathbb{R}^d$ χρησιμοποιούμε τον όρο *(d-διάστατη) μπάλα κέντρου* x *και ακτίνας* r για την περιοχή $N_{\mathrm{x}}(r)$.

Παράδειγμα 11.2.2. Έστω μη-κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική d_δ. Οι μόνες τιμές της d_δ είναι 0 και 1. Άρα για κάθε $x \in X$ είναι $N_x(r) = \{x\}$, αν $0 < r \leq 1$, και $N_x(r) = X$, αν $r > 1$. Επίσης, είναι $\overline{N}_x(r) = \{x\}$, αν $0 < r < 1$, και $\overline{N}_x(r) = X$, αν $r \geq 1$.

Το επόμενο λήμμα περιγράφει μια πολύ χαρακτηριστική ιδιότητα των περιοχών ενός μετρικού χώρου.

ΛΗΜΜΑ 11.1. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και δυο διαφορετικά σημεία του X. Τότε υπάρχει μια περιοχή του ενός σημείου και μια περιοχή του άλλου σημείου (και, μάλιστα, με την ίδια ακτίνα και οι δυο περιοχές) οι οποίες είναι ξένες.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$ και $x \neq y$. Τότε $d(x, y) > 0$ και θεωρούμε τον αριθμό

$$r = \tfrac{1}{2}\, d(x, y) > 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$N_x(r) \cap N_y(r) = \emptyset.$$

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $z \in N_x(r) \cap N_y(r)$. Τότε $d(z, x) < r$ και $d(z, y) < r$ και, επομένως,

$$2r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(z, x) + d(z, y) < r + r = 2r,$$

οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. □

Όταν $A \subseteq X$, το συμπλήρωμα του A σε σχέση με το X θα το συμβολίζουμε $X \setminus A$ ή A^c. Το σύμβολο A^c είναι απλούστερο, αλλά θα χρησιμοποιούμε το $X \setminus A$ όταν πρέπει να δηλωθεί ποιό (ανάμεσα σε άλλα) είναι το σύνολο X σε σχέση με το οποίο θεωρούμε το συμπλήρωμα του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$.*
Το x χαρακτηρίζεται **εσωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$.*
Το x χαρακτηρίζεται **εξωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A^c$.*
Το x χαρακτηρίζεται **συνοριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$ και $N_x(r) \cap A^c \neq \emptyset$.*
Το x χαρακτηρίζεται **οριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$.*
Το x χαρακτηρίζεται **σημείο συσσώρευσης** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $(N_x(r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.*

Από τον ορισμό, τα εξής 1 - 7 πρέπει να είναι απολύτως σαφή.

1. *Τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c.*
2. *Τα συνοριακά σημεία του A δεν είναι ούτε εσωτερικά ούτε εξωτερικά σημεία του A και, επίσης, κάθε σημείο του X ανήκει σε μια από τις τρεις κατηγορίες σημείων: εσωτερικό σημείο, εξωτερικό σημείο, συνοριακό σημείο του A. Άρα το X χωρίζεται σε τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα: τα σύνολα των εσωτερικών, των εξωτερικών και των συνοριακών σημείων του A.*
3. *Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εσωτερικά σημεία του A^c. Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εξωτερικά σημεία του A^c. Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.*
4. *Αφού τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c, απομένει να δούμε που ανήκουν τα συνοριακά σημεία του A. Αυτό εξαρτάται από το συγκεκριμένο κάθε φορά A: κάποια από τα συνοριακά σημεία (μπορεί όλα, μπορεί μερικά, μπορεί κανένα) ανήκουν στο A και τα υπόλοιπα (μπορεί κανένα, μπορεί μερικά, μπορεί όλα) ανήκουν στο A^c.*
5. *Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία του A. Κανένα εξωτερικό σημείο του A δεν είναι οριακό σημείο του A.*
6. *Ένα σημείο συσσώρευσης του A είναι οριακό σημείο του A και ένα οριακό σημείο του A που δεν ανήκει στο A είναι σημείο συσσώρευσης του A.*
7. *Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν είναι οριακό σημείο του $A \setminus \{x\}$. Αυτό οφείλεται στο ότι $(N_x(r) \setminus \{x\}) \cap A = N_x(r) \cap (A \setminus \{x\})$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ορίζουμε*

$$A^\circ = \{x \in X \mid x \text{ εσωτερικό σημείο του } A\}, \qquad \partial A = \{x \in X \mid x \text{ συνοριακό σημείο του } A\},$$

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ οριακό σημείο του } A\}, \qquad A' = \{x \in X \mid x \text{ σημείο συσσώρευσης του } A\}.$$

Το A° ονομάζεται **εσωτερικό** *του A, το ∂A ονομάζεται* **σύνορο** *του A, το $\overline{A}$ ονομάζεται* **κλειστότητα** *του A και το A' ονομάζεται* **παράγωγο σύνολο** *του A.*

Παράδειγμα 11.2.3. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ και θα εξετάσουμε διάφορα χαρακτηριστικά υποσύνολά του.
Αν A είναι οποιοδήποτε από τα $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$, τότε $A^\circ = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$ και $\overline{A} = A' = [a, b]$.
Αν A είναι το $[a, +\infty)$ ή το $(a, +\infty)$, τότε $A^\circ = (a, +\infty)$, $\partial A = \{a\}$ και $\overline{A} = A' = [a, +\infty)$.
Αν A είναι το $(-\infty, b]$ ή το $(-\infty, b)$, τότε $A^\circ = (-\infty, b)$, $\partial A = \{b\}$ και $\overline{A} = A' = (-\infty, b]$.
Αν $A = \{a\}$, τότε $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \{a\}$, $\overline{A} = \{a\}$ και $A' = \emptyset$.
Αν $A = (a, b) \cup (b, c)$, τότε $A^\circ = (a, b) \cup (b, c)$, $\partial A = \{a, b, c\}$ και $\overline{A} = A' = [a, c]$.
Αν $A = \{a\} \cup (b, c)$, όπου $a < b < c$, τότε $A^\circ = (b, c)$, $\partial A = \{a, b, c\}$, $\overline{A} = \{a\} \cup [b, c]$ και $A' = [b, c]$.
Το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα, αφού σε κάθε ανοικτό διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος. Δηλαδή, το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει καμία περιοχή κανενός σημείου και, επομένως, δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο. Άρα $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. Από την άλλη μεριά, το $\mathbb{Q}$ τέμνει και μάλιστα σε άπειρα σημεία κάθε περιοχή καθενός σημείου, οπότε κάθε σημείο είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{Q}$ και, επομένως, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Τέλος, κάθε περιοχή καθενός σημείου τέμνει το $\mathbb{Q}$ αλλά και το $\mathbb{Q}^c$. Δηλαδή, κάθε σημείο είναι συνοριακό σημείο του $\mathbb{Q}$, οπότε $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $(\mathbb{Q}^c)^\circ = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}^c} = (\mathbb{Q}^c)' = \mathbb{R}$ και $\partial(\mathbb{Q}^c) = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.2.4. Έστω $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{a} \neq 0$ και $a \in \mathbb{R}$. Το υποσύνολο

$$\Gamma = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle = a\}$$

του $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται **υπερεπίπεδο** του $\mathbb{R}^d$. Στην περίπτωση $d = 1$ το υποσύνολο αυτό του $\mathbb{R}$ είναι μονοσύνολο, στην περίπτωση $d = 2$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ και στην περίπτωση $d = 3$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$. Η εξίσωση

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle = x_1 a_1 + \cdots + x_d a_d = a$$

ονομάζεται **εξίσωση** του υπερεπιπέδου Γ. Τα σύνολα

$$A_1 = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle > a\}, \qquad A_2 = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle < a\}$$

ονομάζονται **ανοικτοί ημιχώροι** του $\mathbb{R}^d$ με συνοριακό υπερεπίπεδο το Γ. Τα

$$A_1 \cup \Gamma = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle \geq a\}, \qquad A_2 \cup \Gamma = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle \leq a\}$$

ονομάζονται **κλειστοί ημιχώροι** του $\mathbb{R}^d$ με συνοριακό υπερεπίπεδο το Γ.
Έστω οποιοδήποτε $\mathrm{x} \in A_1$, οπότε $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle > a$. Θέτουμε

$$\kappa = \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle - a > 0 \qquad \text{και} \qquad r = \tfrac{\kappa}{\|a\|_2} > 0.$$

Τότε για κάθε $\mathrm{y} \in N_{\mathrm{x}}(r)$ ισχύει $\|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 < r$, οπότε

$$|\langle \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle| \leq \|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{a}\|_2 < r\|\mathrm{a}\|_2 = \kappa$$

και, επομένως,

$$\langle \mathrm{y}, \mathrm{a} \rangle = \langle \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle + \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle > -\kappa + \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle = a.$$

Άρα για κάθε $\mathrm{y} \in N_{\mathrm{x}}(r)$ ισχύει $\mathrm{y} \in A_1$ που σημαίνει ότι $N_{\mathrm{x}}(r) \subseteq A_1$. Δηλαδή κάθε σημείο του A_1 είναι εσωτερικό σημείο του A_1.
Ομοίως, αποδεικνύεται ότι κάθε σημείο του A_2 είναι εσωτερικό σημείο του A_2. (Εξ άλλου, το σύνολο A_2 είναι του *ίδιου τύπου* με το A_1 και αυτό φαίνεται αν θεωρήσουμε το $-\mathrm{a}$ στη θέση του a και το $-a$ στη θέση του a, οπότε η ανισότητα $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle < a$ που καθορίζει το A_2 γράφεται ισοδύναμα $\langle \mathrm{x}, -\mathrm{a} \rangle > -a$.) Επομένως, κάθε σημείο του A_2 είναι εξωτερικό σημείο του A_1.
Τέλος, μπορούμε να δούμε ότι κάθε σημείο του Γ είναι συνοριακό σημείο του A_1 και του A_2. Πράγματι, αν $\mathrm{x} \in \Gamma$, τότε $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle = a$ και αν πάρουμε οποιοδήποτε $r > 0$ και θεωρήσουμε τα δυο σημεία $\mathrm{x} \pm \frac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}$, τότε το ένα από αυτά ανήκει στο $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_1$ και το άλλο στο $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_2$. Για παράδειγμα, για το $\mathrm{x} + \frac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}$ έχουμε

$$\left\|\left(\mathrm{x} + \tfrac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}\right) - \mathrm{x}\right\|_2 = \tfrac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\|\mathrm{a}\|_2 < r, \quad \left\langle \mathrm{x} + \tfrac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}, \mathrm{a} \right\rangle = \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle + \tfrac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\langle \mathrm{a}, \mathrm{a} \rangle = a + \tfrac{r}{2}\|\mathrm{a}\|_2 > a,$$

οπότε το σημείο αυτό ανήκει στο $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_1$. Ομοίως, το $\mathrm{x} - \frac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}$ ανήκει στο $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_2$. Δηλαδή, για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_1 \neq \emptyset$ και $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_2 \neq \emptyset$.
Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε εύκολα ότι $A_1{}^\circ = A_1$, $\partial A_1 = \Gamma$ και $\overline{A_1} = A_1 \cup \Gamma$.
Ακόμη, $(A_1 \cup \Gamma)^\circ = A_1$, $\partial(A_1 \cup \Gamma) = \Gamma$ και $\overline{A_1 \cup \Gamma} = A_1 \cup \Gamma$.
Τα ανάλογα ισχύουν για τους ημιχώρους A_2 και $A_2 \cup \Gamma$.
Τέλος, για το υπερεπίπεδο Γ είναι $\Gamma^\circ = \emptyset$, $\partial \Gamma = \Gamma$ και $\overline{\Gamma} = \Gamma$.

Παράδειγμα 11.2.5. Τώρα θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ και μια απλή σχετικά καμπύλη Γ στο επίπεδο που χωρίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μια μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Η Γ θα μπορούσε να είναι ένας κύκλος ή μια έλλειψη ή μια ευθεία (όπως στο παράδειγμα 11.2.4) ή μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή (η περιφέρεια ενός τετραγώνου ή ενός παραλληλογράμμου, για παράδειγμα).
Έστω ότι το A είναι το A_1 μαζί με μερικά από τα σημεία της Γ. Τότε $A^\circ = A_1$, $\overline{A} = A_1 \cup \Gamma$ και $\partial A = \Gamma$.
Έστω ότι $A = \Gamma$. Τότε $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = \Gamma$ και $\partial A = \Gamma$.
Λίγο πιο γενικά, αν το A είναι ένα υποσύνολο της Γ, τότε $A^\circ = \emptyset$.

Παράδειγμα 11.2.6. Έστω ότι έχουμε μια απλή σχετικά επιφάνεια Γ στο $\mathbb{R}^3$ η οποία χωρίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μια μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Παραδείγματα τέτοιων Γ είναι ένα επίπεδο (όπως στο παράδειγμα 11.2.4), μια σφαιρική επιφάνεια, η επιφάνεια ενός παραλληλεπιπέδου.
Αν ως A θεωρήσουμε το A_1 μαζί με κάποια από τα σημεία της Γ, τότε $A^\circ = A_1$, $\overline{A} = A_1 \cup \Gamma$ και $\partial A = \Gamma$.
Επίσης, αν $A = \Gamma$, τότε $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = \Gamma$ και $\partial A = \Gamma$.
Αν το A είναι υποσύνολο της Γ, τότε $A^\circ = \emptyset$.

Παράδειγμα 11.2.7. Έστω μη-κενό X με τη διακριτή μετρική d_δ και οποιοδήποτε $A \subseteq X$. Αν $x \in A$, τότε $N_x(1) = \{x\} \subseteq A$. Άρα κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A. Για τον ίδιο λόγο, κάθε $x \in A^c$ είναι εξωτερικό σημείο του A. Επομένως, κανένα $x \in X$ δεν είναι συνοριακό σημείο του A. Τέλος, κανένα x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, διότι $N_x(1) \setminus \{x\} = \emptyset$, οπότε το $N_x(1) \setminus \{x\}$ δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $A \subseteq X$ είναι $A^\circ = \overline{A} = A$ και $A' = \partial A = \emptyset$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.2. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε*
[α] $\partial A = \partial(A^c)$.
[β] $A^\circ = A \setminus \partial A$.
[γ] $\overline{A} = A \cup \partial A$.
[δ] $\overline{A} = A \cup A'$.
[ε] $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$.

Απόδειξη. [α] Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.
[β] Αν το $x \in X$ είναι εσωτερικό σημείο του A, τότε ανήκει στο A και δεν είναι συνοριακό σημείο του A. Άρα $A^\circ \subseteq A \setminus \partial A$. Αντιστρόφως, αν το x ανήκει στο A και δεν είναι συνοριακό σημείο του A, τότε είναι εσωτερικό σημείο του A. Άρα $A \setminus \partial A \subseteq A^\circ$.
[γ] Αν το $x \in X$ είναι οριακό σημείο του A, τότε είναι είτε εσωτερικό σημείο του A (οπότε ανήκει στο A) είτε συνοριακό σημείο του A. Άρα $\overline{A} \subseteq A \cup \partial A$. Αντιστρόφως, αν το x ανήκει στο A ή είναι συνοριακό σημείο του A, τότε είναι είτε εσωτερικό σημείο του A είτε συνοριακό σημείο του A, οπότε είναι οριακό σημείο του A. Άρα $A \cup \partial A \subseteq \overline{A}$.
[δ] Αν το $x \in X$ είναι οριακό σημείο του A, τότε είτε ανήκει στο A είτε δεν ανήκει στο A και, σ' αυτήν την δεύτερη περίπτωση, είναι σημείο συσσώρευσης του A. Άρα $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Αντιστρόφως, αν το x ανήκει στο A ή είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε και στις δυο περιπτώσεις είναι οριακό σημείο του A. Άρα $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.
[ε] Το $x \in X$ δεν είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν είναι εξωτερικό σημείο του A αν και μόνο αν είναι εσωτερικό σημείο του A^c. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.*
Το A χαρακτηρίζεται **ανοικτό** *αν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά του σημεία.*
Το A χαρακτηρίζεται **κλειστό** *αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.*

Παράδειγμα 11.2.8. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ και τα διαστήματα κάθε τύπου: (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$.
Από αυτά τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ εκείνα που είναι ανοικτά σύνολα είναι τα: (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$. Ενώ εκείνα που είναι κλειστά είναι τα: $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$. Έτσι δικαιολογείται ο όρος "ανοικτό διάστημα" που χρησιμοποιούμε για τα πρώτα και ο όρος "κλειστό διάστημα" που χρησιμοποιούμε για τα δεύτερα διαστήματα.
Τα διαστήματα $[a, b)$, $(a, b]$ δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά σύνολα. Άρα δεν πρέπει να μείνει η εντύπωση ότι κάθε υποσύνολο ενός μετρικού χώρου οφείλει να είναι είτε ανοικτό είτε κλειστό υποσύνολό του. Δηλαδή, *δεν ισχύει ότι η έννοια του ανοικτού υποσυνόλου είναι η άρνηση της έννοιας του κλειστού υποσυνόλου.*

Παράδειγμα 11.2.9. Στο παράδειγμα 11.2.4 οι δύο ανοικτοί ημιχώροι A_1 και A_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και οι κλειστοί ημιχώροι $A_1 \cup \Gamma$ και $A_2 \cup \Gamma$ καθώς και το υπερεπίπεδο Γ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

Παράδειγμα 11.2.10. Στο παράδειγμα 11.2.5 τα σύνολα A_1 και A_2 είναι ανοικτά και τα σύνολα $A_1 \cup \Gamma$, $A_2 \cup \Gamma$ και Γ είναι κλειστά.

Παράδειγμα 11.2.11. Στο παράδειγμα 11.2.6 τα σύνολα A_1 και A_2 είναι ανοικτά και τα σύνολα $A_1 \cup \Gamma$, $A_2 \cup \Gamma$ και Γ είναι κλειστά.

Παράδειγμα 11.2.12. Έστω μη-κενό X με τη διακριτή μετρική d_δ. Σύμφωνα με το παράδειγμα 11.2.7, κάθε $A \subseteq X$ είναι ανοικτό *και* κλειστό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.3. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d).
[α] *Το* X *και το* $\emptyset$ *είναι ανοικτά.*
[β] *Το* X *και το* $\emptyset$ *είναι κλειστά.*
[γ] *Κάθε* r*-περιοχή είναι ανοικτή.*
[δ] *Κάθε κλειστή* r*-περιοχή είναι κλειστή.*
[ε] *Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του* X *είναι κλειστό.*

Απόδειξη. [α] Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $r > 0$ είναι $N_x(r) \subseteq X$. Άρα κάθε $x \in X$ είναι εσωτερικό σημείο του X, οπότε το X είναι ανοικτό.
Αν το $\emptyset$ δεν ήταν ανοικτό, θα υπήρχε $x \in \emptyset$ το οποίο δεν θα ήταν εσωτερικό σημείο του $\emptyset$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο διότι δεν υπάρχει κανένα $x \in \emptyset$. Άρα το $\emptyset$ είναι ανοικτό.
[β] Το X περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, αφού, απλούστατα, περιέχει όλα τα σημεία του. Άρα το X είναι κλειστό.
Αν κάποιο $x \in X$ ήταν οριακό σημείο του $\emptyset$, για κάθε $r > 0$ θα ίσχυε $N_x(r) \cap \emptyset \neq \emptyset$, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα κανένα $x \in X$ δεν είναι οριακό σημείο του $\emptyset$. Επομένως, δεν υπάρχει κάποιο οριακό σημείο του $\emptyset$ το οποίο να μην περιέχεται στο $\emptyset$. Επομένως, το $\emptyset$ περιέχει όλα τα οριακά του σημεία και άρα είναι κλειστό.
[γ] Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Έστω $y \in N_x(r)$. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη κάποιου $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$.
Επειδή $y \in N_x(r)$, είναι $d(y, x) < r$ και θεωρούμε τον

$$s = r - d(y, x) > 0.$$

Αν $w \in N_y(s)$, τότε $d(w, y) < s$, οπότε

$$d(w, x) \leq d(w, y) + d(y, x) < s + d(y, x) = r$$

και, επομένως, $w \in N_x(r)$. Άρα $N_y(s) \subseteq N_x(r)$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $y \in N_x(r)$ υπάρχει περιοχή του y η οποία περιέχεται στο $N_x(r)$. Άρα κάθε $y \in N_x(r)$ είναι εσωτερικό σημείο της $N_x(r)$, οπότε η $N_x(r)$ είναι ανοικτή.
[δ] Έστω $x \in X$ και $r > 0$ και έστω y οριακό σημείο της $\overline{N}_x(r)$.
Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και έχουμε ότι υπάρχει $z \in \overline{N}_x(r) \cap N_y(\epsilon)$. Τότε

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < \epsilon + r$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $d(y, x) \leq r$ ή, ισοδύναμα, $y \in \overline{N}_x(r)$.
Άρα η $\overline{N}_x(r)$ περιέχει κάθε οριακό σημείο της, οπότε είναι κλειστή.
[ε] Έστω $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$. Έστω $x \in A^c$, οπότε $d(x, x_1) > 0, \ldots, d(x, x_n) > 0$. Θεωρούμε τον

$$r = \min\{d(x, x_1), \ldots, d(x, x_n)\} > 0.$$

Κανένα από τα $x_1, \ldots, x_n$ δεν ανήκει στην $N_x(r)$ και, επομένως, $N_x(r) \subseteq A^c$. Άρα κάθε $x \in A^c$ είναι εξωτερικό σημείο του A. Επομένως, το A περιέχει όλα τα οριακά του σημεία και άρα είναι κλειστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.4. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.*

[α] *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A \cap \partial A = \emptyset$.*

[β] *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $\partial A \subseteq A$.*

Απόδειξη. [α] Κάθε σύνολο A περιέχει τα εσωτερικά του σημεία και πιθανόν κάποια από τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.

[β] Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά του σημεία, τα οποία ούτως ή άλλως περιέχονται στο A, και τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.5. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν το A^c είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Έχουμε τις εξής διαδοχικές ισοδυναμίες. "Το A είναι κλειστό" αν και μόνο αν "το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του A" αν και μόνο αν "το A^c δεν περιέχει κανένα οριακό σημείο του A" αν και μόνο αν "το A^c περιέχει μόνο εξωτερικά σημεία του A" αν και μόνο αν "το A^c περιέχει μόνο εσωτερικά σημεία του A^c" αν και μόνο αν "το A^c είναι ανοικτό". □

Το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός συνόλου είναι το ίδιο το σύνολο, οπότε:
Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν το A^c είναι κλειστό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.6. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.*

[α] *Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το A.*

[β] *Το A° είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχεται στο A.*

[γ] *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$.*

[δ] *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A^\circ = A$.*

Απόδειξη. [α] Κατ' αρχάς είναι ήδη σαφές ότι $A \subseteq \overline{A}$.
Κατόπιν, θα δούμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Έστω x τυχόν οριακό σημείο του $\overline{A}$ και έστω τυχόν $r > 0$. Επειδή το x είναι οριακό σημείο του $\overline{A}$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y \in \overline{A}$ μέσα στην περιοχή $N_x(r)$. Και, επειδή η $N_x(r)$ είναι ανοικτή, υπάρχει $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$. Τώρα, επειδή το y είναι οριακό σημείο του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in A$ μέσα στην περιοχή $N_y(s)$ και, επομένως, μέσα στην $N_x(r)$. Άρα για κάθε $r > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in A$ μέσα στην περιοχή $N_x(r)$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του A, δηλαδή $x \in \overline{A}$.
Αποδείξαμε ότι το τυχόν οριακό σημείο του $\overline{A}$ ανήκει στο $\overline{A}$, οπότε το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Τέλος, θα δούμε ότι το $\overline{A}$ είναι το *μικρότερο* κλειστό υπερσύνολο του A.
Έστω κλειστό B με $A \subseteq B$.
Έστω τυχόν $x \in \overline{A}$, δηλαδή οριακό σημείο του A. Τότε για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$, οπότε, επειδή $A \subseteq B$, ισχύει $N_x(r) \cap B \neq \emptyset$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του B και, επειδή το B είναι κλειστό, συνεπάγεται $x \in B$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in \overline{A}$ ισχύει $x \in B$, οπότε $\overline{A} \subseteq B$.

[β] Κατ' αρχάς, είναι προφανές ότι $A^\circ \subseteq A$.
Τώρα, θα δούμε ότι το A° είναι ανοικτό.
Έστω $x \in A^\circ$, δηλαδή εσωτερικό σημείο του A. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$. Για κάθε $y \in N_x(r)$ υπάρχει $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$ και, επομένως, $N_y(s) \subseteq A$ και, επομένως, το y είναι εσωτερικό σημείο του A. Αποδείξαμε ότι κάθε $y \in N_x(r)$ είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $y \in A^\circ$. Άρα $N_x(r) \subseteq A^\circ$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του A°.
Αποδείξαμε ότι κάθε $x \in A^\circ$ είναι εσωτερικό σημείο του A°, οπότε το A° είναι ανοικτό.
Τέλος, θα δούμε ότι το A° είναι το *μεγαλύτερο* ανοικτό υποσύνολο του A.
Έστω ανοικτό B με $B \subseteq A$.

Έστω τυχόν $x \in B$. Επειδή το B είναι ανοικτό, το x είναι εσωτερικό σημείο του B, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq B$ και, επομένως, $N_x(r) \subseteq A$. Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $x \in A^\circ$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in B$ ισχύει $x \in A^\circ$, οπότε $B \subseteq A^\circ$.
Τα [γ] και [δ] είναι άμεσες συνέπειες των [α] και [β], αντιστοίχως. □

Όταν μιλάμε για μια **οικογένεια συνόλων** ή **συλλογή συνόλων** Σ εννοούμε ότι κάθε $A \in \Sigma$ είναι σύνολο. Την ένωση όλων των συνόλων/στοιχείων της συλλογής Σ τη συμβολίζουμε $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ ή $\bigcup\{A \,|\, A \in \Sigma\}$. Φυσικά, $x \in \bigcup_{A\in\Sigma} A$ αν και μόνο αν $x \in A$ για τουλάχιστον ένα $A \in \Sigma$. Την τομή όλων των συνόλων/στοιχείων της συλλογής Σ τη συμβολίζουμε $\bigcap_{A\in\Sigma} A$ ή $\bigcap\{A \,|\, A \in \Sigma\}$. Ομοίως, $x \in \bigcap_{A\in\Sigma} A$ αν και μόνο αν $x \in A$ για κάθε $A \in \Sigma$.

Πολλές φορές μια συλλογή συνόλων περιγράφεται και με έναν διαφορετικό (αλλά, τελικά, ισοδύναμο) τρόπο. Ξεκινάμε με ένα σύνολο δεικτών Λ και σε κάθε $\lambda \in \Lambda$ αντιστοιχίζουμε ένα σύνολο A_λ. Παίρνουμε έτσι τη συλλογή συνόλων $\Sigma = \{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$. Τώρα, το να λέμε ότι το A είναι στοιχείο της συλλογής Σ είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι $A = A_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda$. Επίσης, η ένωση $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ και η τομή $\bigcap_{A\in\Sigma} A$ συμβολίζονται, ισοδύναμα, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ ή $\bigcup\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ και $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ ή $\bigcap\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$, αντιστοίχως. Στην ειδική περίπτωση πεπερασμένης συλλογής, οπότε ως σύνολο δεικτών παίρνουμε το $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ για κάποιο n, η ένωση και η τομή συμβολίζονται και $\bigcup_{k=1}^n A_k$ ή $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και $\bigcap_{k=1}^n A_k$ ή $A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Στην περίπτωση που σύνολο δεικτών είναι το $\mathbb{N}$, η ένωση συμβολίζεται και $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ ή $A_1 \cup A_n \cup \cdots$ και η τομή συμβολίζεται και $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ ή $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.1. *Έστω μετρικός χώρος (X, d).*
[α] *Έστω συλλογή συνόλων Σ κάθε στοιχείο της οποίας είναι ανοικτό υποσύνολο του X και έστω M η ένωση των στοιχείων της Σ, δηλαδή $M = \bigcup_{A\in\Sigma} A$. Τότε το M είναι ανοικτό.*
[β] *Έστω πεπερασμένου πλήθους ανοικτά υποσύνολα $A_1, \ldots, A_n$ του X και M η τομή τους, δηλαδή $M = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Τότε το M είναι ανοικτό.*
[γ] *Έστω συλλογή συνόλων Σ κάθε στοιχείο της οποίας είναι κλειστό υποσύνολο του X και έστω M η τομή των στοιχείων της Σ, δηλαδή $M = \bigcap_{A\in\Sigma} A$. Τότε το M είναι κλειστό.*
[δ] *Έστω πεπερασμένου πλήθους κλειστά υποσύνολα $A_1, \ldots, A_n$ του X και η ένωσή τους, δηλαδή $M = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Τότε το M είναι κλειστό.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x \in M$. Τότε υπάρχει $A \in \Sigma$ ώστε $x \in A$. Το A είναι ανοικτό, οπότε υπάρχει περιοχή $N_x(r)$ του x ώστε $N_x(r) \subseteq A$. Επομένως, $N_x(r) \subseteq M$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του M.
[β] Έστω $x \in M$, οπότε $x \in A_1, \ldots, x \in A_n$. Αφού κάθε A_k είναι ανοικτό, υπάρχουν περιοχές $N_x(r_1) \subseteq A_1, \ldots, N_x(r_n) \subseteq A_n$. Ορίζουμε

$$r = \min\{r_1, \ldots, r_n\},$$

οπότε $N_x(r) \subseteq N_x(r_1) \subseteq A_1, \ldots, N_x(r) \subseteq N_x(r_n) \subseteq A_n$. Άρα $N_x(r) \subseteq A_1 \cap \cdots \cap A_n = M$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του M.
[γ] Το σύνολο $M^c = \bigcup_{A\in\Sigma} A^c$ είναι ανοικτό, διότι για κάθε $A \in \Sigma$ το A^c είναι ανοικτό. Άρα το M είναι κλειστό.
[δ] Το $M^c = {A_1}^c \cap \cdots \cap {A_n}^c$ είναι ανοικτό, διότι όλα τα ${A_1}^c, \ldots, {A_n}^c$ είναι ανοικτά. Άρα το M είναι κλειστό. □

Παράδειγμα 11.2.13. Ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών διαστημάτων είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.2.14. Ένωση οποιασδήποτε συλλογής ανοικτών διαστημάτων είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.2.15. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το σύνολο $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$.
Τότε $A^c=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)\cup\bigcup_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$. Παρατηρούμε ότι $0\in A^c$ αλλά δεν υπάρχει καμιά περιοχή του 0 η οποία να περιέχεται στο A^c. Άρα το A^c δεν είναι ανοικτό και, επομένως, το A δεν είναι κλειστό.
Εναλλακτικά, βλέπουμε ότι κάθε περιοχή του 0 τέμνει το A και, επομένως, ο 0 είναι οριακό σημείο του A. Όμως, ο 0 δεν ανήκει στο A, οπότε το A δεν είναι κλειστό.

Παράδειγμα 11.2.16. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το σύνολο $B=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$. Τώρα, $B^c=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\cup\bigcup_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$, το οποίο, ως ένωση ανοικτών διαστημάτων, είναι ανοικτό. Άρα το B είναι κλειστό.

Παράδειγμα 11.2.17. Αν έχουμε μια άπειρη συλλογή ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου, η τομή της είναι άλλοτε ανοικτό υποσύνολο του χώρου και άλλοτε όχι.
Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$, αν $A_n=(0,1)$ για κάθε n, τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n=(0,1)$, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Αλλά, αν $A_n=(-1-1/n,1+1/n)$ για κάθε n, τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n=[-1,1]$, το οποίο δεν είναι ανοικτό σύνολο.
Τα ίδια μπορούμε να πούμε για άπειρη συλλογή κλειστών υποσυνόλων και την ένωσή της.
Για παράδειγμα, πάλι στο $\mathbb{R}$, αν $A_n=[-1,1]$ για κάθε n, τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n=[-1,1]$, το οποίο είναι κλειστό σύνολο, ενώ, αν $A_n=[-1+1/n,1-1/n]$ για κάθε n, τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n=(-1,1)$, το οποίο δεν είναι κλειστό σύνολο.

Παράδειγμα 11.2.18. Το

$$(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_d,b_d)=\{(x_1,\ldots,x_d)\,|\,a_k<x_k<b_k \text{ για κάθε } k=1,\ldots,d\}$$

ονομάζεται **ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** στον $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες. Αν για κάθε $k=1,\ldots,d$ θεωρήσουμε το σημείο $\mathrm{e}_k\in\mathbb{R}^d$ το οποίο έχει όλες τις συντεταγμένες του ίσες με 0 εκτός από την k-οστή η οποία είναι ίση με 1, τότε βλέπουμε εύκολα ότι το παραπάνω ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ίσο με την εξής τομή $2d$ ανοικτών ημιχώρων:

$$\bigcap_{k=1}^{d}\big(\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^d\,|\,\langle\mathrm{x},\mathrm{e}_k\rangle>a_k\}\cap\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^d\,|\,\langle\mathrm{x},\mathrm{e}_k\rangle<b_k\}\big).$$

Όπως είδαμε, κάθε ανοικτός ημιχώρος είναι ανοικτό σύνολο οπότε κάθε ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
Αναλόγως, το

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]=\{(x_1,\ldots,x_d)\,|\,a_k\le x_k\le b_k \text{ για κάθε } k=1,\ldots,d\}$$

ονομάζεται **κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** στον $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες. Τώρα, αυτό είναι ίσο με την τομή $2d$ κλειστών ημιχώρων

$$\bigcap_{k=1}^{d}\big(\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^d\,|\,\langle\mathrm{x},\mathrm{e}_k\rangle\ge a_k\}\cap\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^d\,|\,\langle\mathrm{x},\mathrm{e}_k\rangle\le b_k\}\big),$$

Άρα κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Ασκήσεις.

11.2.1. Αποδείξτε ότι κάθε μη-κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς. Βρείτε ένα απλό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο να περιέχει μόνο ρητούς αριθμούς και ένα άλλο το οποίο να περιέχει μόνο άρρητους αριθμούς.

11.2.2. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$;
Το A και το $\mathbb{R}\setminus A$, όπου A είναι τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\{1/n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}\setminus\big(\{0\}\cup\{1/n\,|\,n\in\mathbb{N}\}\big)$.
Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, το σύνορο και το παράγωγο σύνολο καθενός από αυτά τα σύνολα.

11.2.3. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$;

Τα A και $\mathbb{R}^2 \setminus A$, όπου A είναι τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, και τα $\{(x_1,x_2)\,|\,x_1>0\}$, $\{(x_1,x_2)\,|\,x_1x_2>1\}$, $\{(x_1,x_2)\,|\,x_1x_2\leq 1\}$, $\mathbb{R}^2\setminus\{(n,0)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}^2\setminus\{(1/n,0)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}^2\setminus\big(\{(0,0)\}\cup\{(1/n,1/m)\,|\,n,m\in\mathbb{N}\}\big)$, $\{(x_1,0)\,|\,a\leq x_1\leq b\}$, $\{(x_1,0)\,|\,a<x_1<b\}$, $\mathbb{R}^2\setminus\{(x_1,0)\,|\,a\leq x_1\leq b\}$, $\mathbb{R}^2\setminus\{(x_1,0)\,|\,a<x_1<b\}$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{R}^2\setminus\big([0,1])\times\{1/n\,|\,n\in\mathbb{N}\}\big)$, $\mathbb{R}^2\setminus\big([0,1]\times(\{0\}\cup\{1/n\,|\,n\in\mathbb{N}\})\big)$.

Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, το σύνορο και το παράγωγο σύνολο καθενός από αυτά τα σύνολα.

11.2.4. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$;

Τα A και $\mathbb{R}^3 \setminus A$, όπου A είναι τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, και τα $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1+x_2+x_3>1\}$, $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,{x_1}^2+{x_2}^2<x_3\}$, $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1>0\}$, $\mathbb{R}^3\setminus\{(n,0,1)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}^3\setminus\big(\{(0,0,0)\}\cup\{(\frac{1}{n},0,0)\,|\,n\in\mathbb{N}\}\big)$, $\{(x_1,0,0)\,|\,a<x_1<b\}$, $\mathbb{R}^3\setminus\{(x_1,0,0)\,|\,a\leq x_1\leq b\}$, $\mathbb{Q}^3$, $\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{Q}^3$, $\mathbb{R}^3\setminus\{(x_1,x_2,0)\,|\,a\leq x_1\leq b, c\leq x_2\leq d\}$.

Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, το σύνορο και το παράγωγο σύνολο καθενός από αυτά τα σύνολα.

11.2.5. Στο $\mathbb{R}^d$ θεωρούμε τις p-μετρικές d_p για $1\leq p\leq+\infty$.

Στην περίπτωση $d=1$ παρατηρήστε ότι όλες οι μετρικές d_p ταυτίζονται.

Αν $d=2$ περιγράψτε γεωμετρικά πώς μεταβάλλονται οι περιοχές ενός σταθερού σημείου με μια σταθερή ακτίνα όταν το p μεταβάλλεται από 1 μέχρι $+\infty$. Ειδικώτερα, ζωγραφίστε ακριβώς τις περιοχές για $p=1$, $p=2$ και $p=+\infty$.

Κάντε τα ίδια στην περίπτωση $d=3$.

11.2.6. Αν το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\sup A\in\overline{A}$. Ομοίως, αν το A είναι μη-κενό και κάτω φραγμένο, αποδείξτε ότι $\inf A\in\overline{A}$.

11.2.7. Βρείτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με ακριβώς δύο σημεία συσσώρευσης για το καθένα.

11.2.8. [α] Θεωρήστε το κλειστό διάστημα $I_0=[0,1]$. Πάρτε το υποσύνολό του $I_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. Δηλαδή, κρατήστε τα δυο ακριανά κλειστά διαστήματα μήκους, το καθένα, το $\frac{1}{3}$ του μήκους του αρχικού I_0. Κάντε το ίδιο σε καθένα από τα δυο υποδιαστήματα του I_1. Δηλαδή, πάρτε $I_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$. Συνεχίστε επαγωγικά, δημιουργώντας τα $I_3,I_4,\ldots$. Αν, δηλαδή, έχετε φτιάξει το I_n ως ένωση κλειστών διαστημάτων, τότε καθένα από αυτά τα διαστήματα θα *γεννήσει* δύο νέα κλειστά διαστήματα: τα δύο ακριανά του με μήκος, το καθένα, το $\frac{1}{3}$ του μήκους του. Ορίζουμε $C=\bigcap_{n=1}^{+\infty}I_n$. Το C ονομάζεται **σύνολο του Cantor**.

Από πόσα κλειστά διαστήματα αποτελείται κάθε I_n και ποιό είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;

Αποδείξτε ότι το C είναι κλειστό.

Αποδείξτε ότι το C δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα και, επομένως, ότι $C^\circ=\emptyset$.

Γράψτε το $\mathbb{R}\setminus C$ ως ένωση κατάλληλης συλλογής ανοικτών διαστημάτων.

Αποδείξτε ότι το C είναι υπεραριθμήσιμο.

[β] Περιγράψτε κατασκευή συνόλου Cantor στο $\mathbb{R}^2$: πάρτε το τετράγωνο $I_0=[0,1]\times[0,1]$, φτιάξτε το $I_1=\big([0,\frac{1}{3}]\times[0,\frac{1}{3}]\big)\cup\big([0,\frac{1}{3}]\times[\frac{2}{3},1]\big)\cup\big([\frac{2}{3},1]\times[0,\frac{1}{3}]\big)\cup\big([\frac{2}{3},1]\times[\frac{2}{3},1]\big)$ και συνεχίστε επαγωγικά με τα $I_2,I_3,\ldots$.

Κάθε I_n αποτελείται από ξένα ανά δύο κλειστά τετράγωνα. Καθένα από αυτά πόσα καινούρια τετράγωνα θα γεννήσει και πού βρίσκονται αυτά; Από πόσα τετράγωνα απαρτίζεται το I_n και ποιό είναι το συνολικό εμβαδό αυτών των τετραγώνων;

Θεωρήστε το $C=\bigcap_{n=1}^{+\infty}I_n$ και αποδείξτε ότι το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Αποδείξτε ότι το C δεν περιέχει κανέναν ανοικτό δίσκο, οπότε $C^\circ=\emptyset$.

11.2.9. Έστω μετρικός χώρος (X, d). Αποδείξτε ότι $\bigcup_{r>0} N_x(r) = X$ και $\bigcap_{r>0} N_x(r) = \{x\}$ για κάθε $x \in X$.

11.2.10. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Αποδείξτε ότι: το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα σημεία του A.

11.2.11. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x \in X$ και $r > 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{N_x(r)} \subseteq \overline{N}_x(r)$.
Στο $\mathbb{R}^d$ αποδείξτε ότι $\overline{N_x(r)} = \overline{N}_x(r)$.
Ισχύει πάντοτε ότι $\overline{N_x(r)} = \overline{N}_x(r)$; Θεωρήστε, για παράδειγμα, μη-κενό σύνολο X με την διακριτή μετρική d_δ και συγκρίνατε τα $\overline{N_x(1)}$ και $\overline{N}_x(1)$.

11.2.12. Έστω μετρικός χώρος (X, d), ανοικτό $A \subseteq X$ και κλειστό $B \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το $A \setminus B$ είναι ανοικτό και το $B \setminus A$ είναι κλειστό.

11.2.13. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ και $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

11.2.14. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B, A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ και Σ μια συλλογή υποσυνόλων του X.
[α] Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $A^\circ \subseteq B^\circ$ και $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
[β] Αποδείξτε ότι $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ και $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
[γ] Αποδείξτε ότι $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^\circ = {A_1}^\circ \cap \cdots \cap {A_n}^\circ$ και $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.
Αποδείξτε ότι $(\bigcap_{A\in\Sigma} A)^\circ \subseteq \bigcap_{A\in\Sigma} A^\circ$ και $\overline{\bigcup_{A\in\Sigma} A} \supseteq \bigcup_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
Βρείτε συλλογή Σ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $(\bigcap_{A\in\Sigma} A)^\circ \neq \bigcap_{A\in\Sigma} A^\circ$. Βρείτε συλλογή Σ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $\overline{\bigcup_{A\in\Sigma} A} \neq \bigcup_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
[ε] Αποδείξτε ότι $(\bigcup_{A\in\Sigma} A)^\circ \supseteq \bigcup_{A\in\Sigma} A^\circ$ και $\overline{\bigcap_{A\in\Sigma} A} \subseteq \bigcap_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
Βρείτε δυο υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ ώστε $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$. Βρείτε δυο υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ ώστε $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.
[στ] Αποδείξτε ότι $A^\circ \subseteq (\overline{A})^\circ$ και $\overline{(A^\circ)} \subseteq \overline{A}$.
Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $A^\circ \neq (\overline{A})^\circ$. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $\overline{(A^\circ)} \neq \overline{A}$.

11.2.15. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι: το A είναι κλειστό αν και μόνον αν $A' \subseteq A$.

11.2.16. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.
[α] Αποδείξτε ότι το A' είναι κλειστό.
[β] Αποδείξτε ότι $A' = (\overline{A})'$. Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.
[γ] Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $A' \subseteq B'$.
[δ] Αποδείξτε ότι $(A')' \subseteq A'$.
Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $(A')' \neq A'$.

11.2.17. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.
Αν $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.
Βρείτε υποσύνολα A και B του $\mathbb{R}$ ώστε $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

11.2.18. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.
[α] Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό, αποδείξτε ότι $(\partial A)^\circ = \emptyset$.
Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $(\partial A)^\circ = \mathbb{R}$.
[β] Αποδείξτε ότι $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.
Αν $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.
Βρείτε υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ ώστε $\partial(A \cup B) \neq \partial A \cup \partial B$.

11.2.19. Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και $x \in X$. Ορίζουμε την **απόσταση** του x από το A με τον τύπο $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \,|\, y \in A\}$.
Αποδείξτε ότι $d(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

11.2.20. Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και $r > 0$. Ορίζουμε την r-**περιοχή** του A να είναι το σύνολο

$$N_A(r) = \{x \in X \,|\, \text{υπάρχει } y \in A \text{ ώστε } d(y, x) < r\} = \{x \in X \,|\, N_x(r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Αποδείξτε ότι $N_A(r) = \bigcup_{x \in A} N_x(r)$.
Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ ποιά είναι τα $N_A(r)$ για κάθε $r > 0$ και για καθένα A από τα: $\{1\}$, $[0, 1]$, $(0, 1)$, $\{0, 1\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ και $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$;
Αποδείξτε ότι το $N_A(r)$ είναι ανοικτό και $A \subseteq N_A(r)$.
Αν το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} N_A(\frac{1}{n})$. Συμπεράνατε ότι κάθε μη-κενό κλειστό σύνολο είναι τομή αριθμήσιμης συλλογής ανοικτών συνόλων.

11.2.21. Θεωρήστε τον μετρικό χώρο $B\big([0, 1]\big)$ με την ομοιόμορφη μετρική και το στοιχείο $f \in B\big([0, 1]\big)$ με τύπο $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Περιγράψτε όλα τα στοιχεία της περιοχής με κέντρο f με ακτίνα $r > 0$.

11.2.22. Θεωρήστε τον μετρικό χώρο $B\big([0, 1]\big)$ με την ομοιόμορφη μετρική και το στοιχείο $f \in B\big([0, 1]\big)$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1, & \text{αν } 1/3 < x \leq 1 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι *όλα* τα στοιχεία της περιοχής του f με ακτίνα $r \leq \frac{1}{2}$ είναι συναρτήσεις στο $[0, 1]$ οι οποίες *δεν* είναι συνεχείς στο $\frac{1}{3}$. Αποδείξτε, όμως, ότι η περιοχή του f με ακτίνα $r > \frac{1}{2}$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο το οποίο είναι συνάρτηση συνεχής στο $[0, 1]$.

11.2.23. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται **κυρτό**, αν για κάθε $x, y \in A$ και κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει $tx + (1 - t)y \in A$. Ποιό είναι το γεωμετρικό νόημα αυτού του ορισμού στα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$;
Αποδείξτε ότι τα μόνα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα διαστήματα.
Αποδείξτε ότι κάθε d-διάστατη (ανοικτή ή κλειστή) μπάλα, κάθε d-διάστατο (ανοικτό ή κλειστό) ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κάθε υπερεπίπεδο και κάθε (ανοικτός ή κλειστός) ημιχώρος στον $\mathbb{R}^d$ είναι κυρτό σύνολο.
Αν A είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, αποδείξτε ότι τα A° και $\overline{A}$ είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

11.2.24. [α] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται **πυκνό**, αν $\overline{A} = X$.
Αποδείξτε ότι το A είναι πυκνό και μόνον αν κάθε περιοχή $N_x(r)$ καθενός $x \in X$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A.
Είναι το $\mathbb{Q}$ πυκνό στο $\mathbb{R}$; Είναι το $\mathbb{Q}^2$ πυκνό στο $\mathbb{R}^2$; Είναι το $\mathbb{Q}^d$ πυκνό στο $\mathbb{R}^d$;
Βρείτε τα πυκνά υποσύνολα του μη-κενού X με τη διακριτή μετρική d_δ.
[β] Ένας μετρικός χώρος (X, d) χαρακτηρίζεται **διαχωρίσιμος** αν υπάρχει αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του X.
Είναι ο $\mathbb{R}$ διαχωρίσιμος; Είναι ο $\mathbb{R}^d$ διαχωρίσιμος;
Αν το μη-κενό X είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική d_δ, αποδείξτε ότι το X είναι διαχωρίσιμο αν και μόνον αν είναι αριθμήσιμο.
[γ] Έστω διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x χαρακτηρίζεται **σημείο συμπύκνωσης** του A, αν για κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x(r)$ περιέχει υπεραριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A.
Αν το A είναι αριθμήσιμο, αποδείξτε ότι το A δεν έχει κανένα σημείο συμπύκνωσης.
Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και P είναι το σύνολο όλων των σημείων συμπύκνωσης του A, αποδείξτε ότι $P' = P$ και ότι το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο.

[δ] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $P \subseteq X$. Το P χαρακτηρίζεται **τέλειο**, αν $P' = P$.

Βρείτε μερικά απλά παραδείγματα τέλειων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Αν ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος και το $A \subseteq X$ είναι κλειστό, αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο τέλειο σύνολο P και κάποιο αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A = P \cup Z$ και $P \cap Z = \emptyset$.

11.2.25. [α] Έστω μη-κενό σύνολο X και μετρικές d_1 και d_2 στο X. Λέμε ότι οι δυο μετρικές είναι **ισοδύναμες** αν κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι ανοικτό στον (X, d_1) είναι ανοικτό και στον (X, d_2) και, αντιστρόφως, κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι ανοικτό στον (X, d_2) είναι ανοικτό και στον (X, d_1).

Αποδείξτε ότι οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι κλειστό στον (X, d_1) είναι κλειστό και στον (X, d_2) και, αντιστρόφως, κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι κλειστό στον (X, d_2) είναι κλειστό και στον (X, d_1).

Έστω X οποιοδήποτε πεπερασμένο μη-κενό σύνολο. Αποδείξτε ότι οποιεσδήποτε δύο μετρικές στο X είναι ισοδύναμες.

Συμβολίζουμε $N_x^{d_1}(r)$ και $N_x^{d_2}(r)$ τις περιοχές του $x \in X$ στους μετρικούς χώρους (X, d_1) και (X, d_2), αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω (i), (ii) είναι ισοδύναμα.

(i) Οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες.

(ii) Για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_1}(\delta) \subseteq N_x^{d_2}(\epsilon)$ και, αντιστρόφως, για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_2}(\delta) \subseteq N_x^{d_1}(\epsilon)$.

[β] Έστω μετρικός χώρος (X, d). Ορίζουμε $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ με τον τύπο $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$ για κάθε $x, y \in X$.

Αποδείξτε ότι η d' είναι φραγμένη μετρική στο X ισοδύναμη με την d.

[γ] Δείτε την άσκηση 11.1.3. Αποδείξτε ότι για κάθε $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ η p_1-μετρική και p_2-μετρική στον $\mathbb{R}^d$ είναι ισοδύναμες.

11.2.26. Δείτε την άσκηση 11.1.6. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $W \subseteq X$.

[α] Αν $x \in W$ και $N_x^X(r)$ είναι η r-περιοχή του x στον μετρικό χώρο (X, d) και $N_x^W(r)$ είναι η r-περιοχή του x στον μετρικό υπόχωρο (W, d), αποδείξτε ότι $N_x^W(r) = N_x^X(r) \cap W$.

[β] Θεωρήστε το $A = (0, 1]$ ως υποσύνολο του υπόχωρου $W = (0, 1]$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $A^0 = (0, 1]$, $\overline{A} = (0, 1]$ και $\partial A = \emptyset$.

[γ] Έστω $A \subseteq W$. Αποδείξτε ότι το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (W, d) αν και μόνο αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο B του (X, d) ώστε $A = B \cap W$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του (W, d) αν και μόνο αν υπάρχει κλειστό υποσύνολο B του (X, d) ώστε $A = B \cap W$.

[δ] Έστω $A \subseteq W$. Αν $A^{\circ, X}$ είναι το εσωτερικό του A ως υποσύνολο του (X, d) και $A^{\circ, W}$ είναι το εσωτερικό του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $A^{\circ, X} \subseteq A^{\circ, W}$.

[ε] Έστω $A \subseteq W$. Αν $\overline{A}^X$ είναι η κλειστότητα του A ως υποσύνολο του (X, d) και $\overline{A}^W$ είναι η κλειστότητα του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $\overline{A}^W = \overline{A}^X \cap W$.

[στ] Έστω $A \subseteq W$. Αν $\partial_X A$ είναι το σύνορο του A ως υποσύνολο του (X, d) και $\partial_W A$ είναι το σύνορο του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $\partial_W A \subseteq \partial_X A \cap W$.

11.3 Όρια και συνέχεια συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν μια ιδιότητα έχει νόημα (είτε ισχύει είτε όχι) για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει* **κοντά στο** *x_0 αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < r$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $x \in (N_{x_0}(r) \setminus \{x_0\}) \cap A$.*

Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι:

Αν δυο ιδιότητες ισχύουν για κάθε x στο ίδιο σύνολο A και αν η μία ισχύει κοντά στο x_0 και η άλλη *ισχύει, επίσης, κοντά στο x_0, τότε ισχύουν και οι δυο ταυτόχρονα ιδιότητες κοντά στο x_0.*

Πράγματι, υπάρχει $r_1 > 0$ ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < r_1$ και υπάρχει $r_2 > 0$ ώστε η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < r_2$. Θεωρούμε

$$r = \min\{r_1, r_2\} > 0$$

και τότε για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < r$ συνεπάγεται $0 < d(x, x_0) < r_1$ και $0 < d(x, x_0) < r_2$ και, επομένως, ισχύει και η πρώτη ιδιότητα αλλά και η δεύτερη ιδιότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$, $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A και $y_0 \in Y$. Λέμε ότι το y_0 είναι* **όριο** *της f στο x_0, και συμβολίζουμε*

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{y_0}(\epsilon)$ για κάθε $x \in (N_{x_0}(\delta) \setminus \{x_0\}) \cap A$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\rho(f(x), y_0) < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < \delta$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $\rho(f(x), y_0) < \epsilon$ κοντά στο x_0.

Ο ορισμός αυτός είναι η άμεση γενίκευση του ορισμού του ορίου συνάρτησης που είδαμε στην ενότητα 3.2 όπου και οι δυο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.3.1. Έστω ότι το μη-κενό σύνολο X είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική d_δ. Τότε για καμία συνάρτηση ορισμένη σε υποσύνολο του X δεν έχει νόημα η μελέτη ορίου, διότι κάθε υποσύνολο του X δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.7. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ και $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει στο Y κάποιο όριο της f στο x_0, αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω $y_0' = \lim_{x \to x_0} f(x)$ και $y_0'' = \lim_{x \to x_0} f(x)$, όπου y_0' και y_0'' είναι στοιχεία του Y, και υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $y_0' \neq y_0''$.
Βάσει του λήμματος 11.1, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_{y_0'}(\epsilon) \cap N_{y_0''}(\epsilon) = \emptyset$.
Τότε ισχύει $f(x) \in N_{y_0'}(\epsilon)$ κοντά στο x_0 και, επίσης, ισχύει $f(x) \in N_{y_0''}(\epsilon)$ κοντά στο x_0. Άρα ισχύει $f(x) \in N_{y_0'}(\epsilon)$ *και* $f(x) \in N_{y_0''}(\epsilon)$ κοντά στο x_0 και καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Βάσει του αποτελέσματος της Πρότασης 11.7, μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο.

Και τώρα θα δούμε τη γενίκευση του ορισμού της συνέχειας συνάρτησης που είδαμε στην ενότητα 4.1 όταν και οι δυο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι* **συνεχής** *στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(x_0)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in N_{x_0}(\delta) \cap A$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$.*

Αν το $x_0 \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A (δηλαδή είναι **μεμονωμένο σημείο** του A), τότε μπορούμε να δούμε[8] πολύ εύκολα, ακριβώς όπως όταν και οι δυο μετρικοί χώροι είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$, ότι η f είναι αυτομάτως συνεχής στο x_0. Αναλόγως, αν το $x_0 \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Λέμε ότι η f είναι* **συνεχής** *στο A αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.*

[8] Άσκηση 11.3.2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.2. [9] *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) *Η f είναι συνεχής στο A.*
(ii) *Για κάθε ανοικτό $W \subseteq Y$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(W) = U \cap A$.*
(iii) *Για κάθε κλειστό $F \subseteq Y$ υπάρχει κλειστό $G \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(F) = G \cap A$.*

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω ανοικτό $W \subseteq Y$ και τυχόν $x \in f^{-1}(W)$, οπότε $f(x) \in W$. Επειδή το W είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon_x > 0$ ώστε

$$N_{f(x)}(\epsilon_x) \subseteq W.$$

Κατόπιν, επειδή η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(x') \in N_{f(x)}(\epsilon_x) \qquad \text{για κάθε } \ x' \in N_x(\delta_x) \cap A.$$

Άρα ισχύει $f(x') \in W$ ή, ισοδύναμα, $x' \in f^{-1}(W)$ για κάθε $x' \in N_x(\delta_x) \cap A$. Δηλαδή ισχύει

$$N_x(\delta_x) \cap A \subseteq f^{-1}(W) \qquad \text{για κάθε } \ x \in f^{-1}(W). \tag{11.3}$$

Τώρα ορίζουμε

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} N_x(\delta_x). \tag{11.4}$$

Το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, διότι είναι ένωση περιοχών, δηλαδή ανοικτών υποσυνόλων του X.
Από τις (11.3) και (11.4) συνεπάγεται

$$U \cap A = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} \big(N_x(\delta_x) \cap A\big) \subseteq f^{-1}(W). \tag{11.5}$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $x \in f^{-1}(W)$ ισχύει, προφανώς, $x \in A$. Επίσης, σύμφωνα με την (11.4), για κάθε $x \in f^{-1}(W)$ ισχύει $x \in U$. Άρα

$$f^{-1}(W) \subseteq U \cap A. \tag{11.6}$$

Από τις (11.5) και (11.6) συνεπάγεται $f^{-1}(W) = U \cap A$.
$[ii \Rightarrow i]$. Παίρνουμε τυχόν $x \in A$ για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Η $N_{f(x)}(\epsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, οπότε υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε

$$f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big) = U \cap A. \tag{11.7}$$

Επειδή $f(x) \in N_{f(x)}(\epsilon)$, είναι $x \in f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big) = U \cap A$ και, επομένως, $x \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x(\delta) \subseteq U$. Από την (11.7) συνεπάγεται

$$N_x(\delta) \cap A \subseteq f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big).$$

Άρα για κάθε $x' \in N_x(\delta) \cap A$ ισχύει $x' \in f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big)$ και, επομένως, $f(x') \in N_{f(x)}(\epsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x.
$[ii \Rightarrow iii]$. Έστω τυχόν κλειστό $F \subseteq Y$. Το $W = Y \setminus F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, οπότε υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(W) = U \cap A$. Το $G = X \setminus U$ είναι κλειστό υποσύνολο του X και

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus W) = A \setminus f^{-1}(W) = A \setminus (U \cap A) = (X \setminus U) \cap A = G \cap A.$$

[9]Το “σωστό” πλαίσιο για το θεώρημα αυτό είναι το πλαίσιο του *μετρικού υπόχωρου*. Δείτε τις ασκήσεις 11.1.6 και 11.2.12 (ειδικά το [γ]). Σ’ αυτό το πλαίσιο το (ii) διατυπώνεται: *για κάθε ανοικτό υποσύνολο W του (Y, ρ) το $f^{-1}(W)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (A, d)*. Και το (iii) διατυπώνεται: *για κάθε κλειστό υποσύνολο W του (Y, ρ) το $f^{-1}(W)$ είναι κλειστό υποσύνολο του (A, d)*.

$[iii \Rightarrow ii]$. Έστω τυχόν ανοικτό $W \subseteq Y$. Το $F = Y \setminus W$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, οπότε υπάρχει κλειστό $G \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(F) = G \cap A$. Το $U = X \setminus G$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \setminus F) = A \setminus f^{-1}(F) = A \setminus (G \cap A) = (X \setminus G) \cap A = U \cap A.$$

□

Παράδειγμα 11.3.2. Θα δούμε τώρα μια σημαντική μέθοδο αναγνώρισης ανοικτών ή κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου. *Θεωρούμε συναρτήσεις με τιμές στο* $\mathbb{R}$.
Έστω υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X, d), $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A και $a, b \in \mathbb{R}$.
Αν το πεδίο ορισμού A της f είναι *ανοικτό* υποσύνολο του X, τότε τα

$$\{x \in A \,|\, a < f(x)\} = f^{-1}((a, +\infty)), \qquad \{x \in A \,|\, f(x) < b\} = f^{-1}((-\infty, b)),$$

$$\{x \in A \,|\, a < f(x) < b\} = f^{-1}((a, b))$$

είναι ανοικτά υποσύνολα του X.
Πράγματι, επειδή το $(a, +\infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $f^{-1}((a, +\infty)) = U \cap A$. Επειδή και το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X, συνεπάγεται ότι το $f^{-1}((a, +\infty)) = U \cap A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τα επιχειρήματα είναι ίδια και για τα υπόλοιπα σύνολα αλλά και για το επόμενο ανάλογο αποτέλεσμα.
Αν το πεδίο ορισμού A της f είναι *κλειστό* υποσύνολο του X, τότε τα

$$\{x \in A \,|\, a \le f(x)\} = f^{-1}([a, +\infty)), \qquad \{x \in A \,|\, f(x) \le b\} = f^{-1}((-\infty, b]),$$

$$\{x \in A \,|\, a \le f(x) \le b\} = f^{-1}([a, b])$$

είναι κλειστά υποσύνολα του X.
Φυσικά, εκτός από διαστήματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου προϋποθέτει, βέβαια, ότι μπορούμε να αναγνωρίζουμε *συνεχείς* συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ ορισμένες σε υποσύνολα A ενός μετρικού χώρου. Οι επόμενες προτάσεις θα μας βοηθήσουν να αποκτήσουμε ένα σημαντικό απόθεμα συνεχών συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.8. *Έστω (X, d), (Y, ρ) και (Z, τ) τρεις μετρικοί χώροι, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $x_0 \in A$, $f : A \to B$ και $g : B \to Z$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$, τότε η $g \circ f : A \to Z$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$\tau(g(y), g(y_0)) < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ y \in B \ \text{ με } \ \rho(y, y_0) < \delta'. \tag{11.8}$$

Κατόπιν, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\rho(f(x), y_0) = \rho(f(x), f(x_0)) < \delta' \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ με } \ d(x, x_0) < \delta. \tag{11.9}$$

Από την (11.9) και από την (11.8) με $y = f(x)$ συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$ ισχύει $\tau(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon$. Άρα η $g \circ f : A \to Z$ είναι συνεχής στο x_0. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.9. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο x_0. Τότε:*
[α] *η $\lambda f + \mu g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
[β] *η $fg : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.*
[γ] *αν $B = \{x \in A \,|\, g(x) \neq 0\}$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε η $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε όλες οι συναρτήσεις είναι αυτομάτως συνεχείς στο x_0. Οπότε υποθέτουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.
[α] Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)}$ και $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(|\mu|+1)}$ κοντά στο x_0. Άρα ισχύει

$$\begin{aligned}\big|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda f(x_0) + \mu g(x_0))\big| &\le |\lambda||f(x) - f(x_0)| + |\mu||g(x) - g(x_0)| \\ &\le |\lambda|\tfrac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)} + |\mu|\tfrac{\epsilon}{2(|\mu|+1)} < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

κοντά στο x_0, οπότε η $\lambda f + \mu g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.
[β] Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και θέτουμε

$$\epsilon_1 = \min\left\{(\tfrac{\epsilon}{3})^{1/2}, \tfrac{\epsilon}{3(|f(x_0)|+1)}, \tfrac{\epsilon}{3(|g(x_0)|+1)}\right\} > 0.$$

Τότε ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon_1$ και $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon_1$ κοντά στο x_0. Άρα ισχύει

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &\le |f(x) - f(x_0)||g(x) - g(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \\ &\quad + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\ &\le {\epsilon_1}^2 + |f(x_0)|\epsilon_1 + |g(x_0)|\epsilon_1 < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

κοντά στο x_0, οπότε η $fg : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.
[γ] Επειδή $\frac{|g(x_0)|}{2} > 0$, ισχύει $|g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|}{2}$ κοντά στο x_0. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|g(x)| = |g(x_0) + (g(x) - g(x_0))| \ge |g(x_0)| - |g(x) - g(x_0)| > |g(x_0)| - \tfrac{|g(x_0)}{2} = \tfrac{|g(x_0)|}{2}$$

κοντά στο x_0.
Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $|g(x) - g(x_0)| < \frac{g(x_0)^2}{2}\epsilon$ κοντά στο x_0.
Άρα ισχύει $|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2}$ και $|g(x) - g(x_0)| < \frac{g(x_0)^2}{2}\epsilon$ κοντά στο x_0 και, επομένως, ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{1}{g(x_0)}\right| = \tfrac{|g(x)-g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|} \le \tfrac{2|g(x)-g(x_0)|}{g(x_0)^2} < \epsilon$$

κοντά στο x_0. Άρα η $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0. □

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες προτάσεις, μπορούμε, ξεκινώντας από πολύ απλές συνεχείς συναρτήσεις, να κατασκευάζουμε όλο και πιο πολύπλοκες.

Παράδειγμα 11.3.3. Στον $\mathbb{R}^d$ ορίζεται για κάθε k με $1 \le k \le d$ η συνάρτηση k-**προβολή**

$$\pi_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$\pi_k(\mathrm{x}) = x_k \qquad \text{για κάθε } \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Κάθε π_k είναι συνεχής, διότι ισχύει

$$|\pi_k(\mathrm{x}) - \pi_k(\mathrm{y})| = |x_k - y_k| \le \big((x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2\big)^{1/2} = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_e$$

για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ και $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ στον $\mathbb{R}^d$.
Άρα, αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(\mathrm{x}) = g(x_k) \qquad \text{για κάθε } \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

είναι συνεχής, διότι $f = g \circ \pi_k$.
Άρα *πολυωνυμικές συναρτήσεις* $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, δηλαδή συναρτήσεις με τύπο

$$p(x_1, \ldots, x_d) = A{x_1}^{a_1} \cdots {x_d}^{a_d} + B{x_1}^{b_1} \cdots {x_d}^{b_d} + \cdots,$$

όπου όλοι οι εκθέτες είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί και το άθροισμα είναι πεπερασμένο, είναι συνεχείς. *Ρητές συναρτήσεις*, δηλαδή λόγοι πολυωνυμικών συναρτήσεων, είναι επίσης συνεχείς (εκτός από τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής) όπως και συναρτήσεις οι οποίες είναι απλοί συνδυασμοί εκθετικών, τριγωνομετρικών κ.λ.π. συναρτήσεων των συντεταγμένων.

Παράδειγμα 11.3.4. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $A \subseteq X$. Θεωρούμε το σύνολο $BC(A)$ όλων των φραγμένων, συνεχών συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$BC(A) = \{f \mid \text{η } f : A \to \mathbb{R} \text{ είναι φραγμένη και συνεχής}\}.$$

Το $BC(A)$ είναι, προφανώς, υποσύνολο του $B(A)$. Το $B(A)$ ορίστηκε για οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο A αλλά το ότι το A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) μας επιτρέπει να θεωρήσουμε συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο A και έτσι να σχηματίσουμε το σύνολο $BC(A)$. Ανάμεσα στα στοιχεία $f, g \in BC(A)$ θεωρούμε την ίδια *ομοιόμορφη απόσταση*

$$d_A(f, g) = \|f - g\|_A = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in A\}$$

που έχουν ως στοιχεία και του $B(A)$. Το ότι η συνάρτηση

$$d_A : BC(A) \times BC(A) \to \mathbb{R}$$

που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο έχει τις ιδιότητες μετρικής στον χώρο $BC(A)$ είναι προφανές. Πράγματι, είδαμε στο παράδειγμα 11.1.4 ότι η d_A έχει τις ιδιότητες $(i) - (iv)$ μιας μετρικής για κάθε $f, g, h \in B(A)$, οπότε, επειδή τα στοιχεία του $BC(A)$ είναι στοιχεία και του $B(A)$, συνεπάγεται ότι η d_A έχει τις ιδιότητες $(i) - (iv)$ για κάθε $f, g, h \in BC(A)$.

Ασκήσεις.

11.3.1. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A και $f : A \to Y$ η οποία είναι σταθερή κοντά στο x_0, δηλαδή υπάρχει $y_0 \in Y$ και $r > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in N_{x_0}(r) \cap A$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

11.3.2. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f : A \to Y$.

Αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνον αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

11.3.3. Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε οποιοδήποτε υποσύνολο A μετρικού χώρου (X, d_δ), όπου d_δ είναι η διακριτή μετρική, είναι συνεχής στο A.

11.3.4. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $B \subseteq A \subseteq X$ ώστε $A \subseteq \overline{B}$, $y_0 \in Y$ και $f : A \to Y$ συνεχής στο A. Αν $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in B$, αποδείξτε ότι $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in A$.

11.3.5. Αποδείξτε ότι τα $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^3 - x < 4\}$ και $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\sin x}{2} < e^x < \sin x\}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Είναι το $\{x \in [0, 1] \mid \frac{1}{4} < x^2 < 4\}$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$;

Αποδείξτε ότι το $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid e^{-\|\mathrm{x}\|_2} + \sin \|\mathrm{x}\|_2 > 3\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Είναι το $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \|\mathrm{x}\|_2 - \|\mathrm{x}\|_2{}^3 \leq 3\}$ κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$;

11.3.6. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι συνεχής στο A.

(ii) $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^\circ \cap A$ για κάθε $B \subseteq Y$.

(iii) $f(\overline{B} \cap A) \subseteq \overline{f(B)}$ για κάθε $B \subseteq A$.

11.3.7. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A, $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to x_0}(f + g)(x) = l + m$ και $\lim_{x \to x_0}(fg)(x) = lm$.

Αν, επιπλέον, $m \neq 0$, θεωρήστε το $B = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$ και αποδείξτε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι για την $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.

11.3.8. [α] Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και η συνάρτηση $d(\cdot\,, A) : X \to \mathbb{R}$ που ορίσθηκε στην άσκηση 11.2.19. Αποδείξτε ότι ισχύει $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και ότι η $d(\cdot\,, A) : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.
[β] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενά *κλειστά* υποσύνολα A και B του X με $A \cap B = \emptyset$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ για κάθε $x \in X$.
Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 1$ αν και μόνο αν $x \in B$ καθώς και ότι ισχύει $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in A$.
Ορίζουμε $K = f^{-1}\big((-\infty, \frac{1}{2})\big)$ και $L = f^{-1}\big((\frac{1}{2}, +\infty)\big)$. Αποδείξτε ότι τα K και L είναι ανοικτά υποσύνολα του X, ότι $K \cap L = \emptyset$ και ότι $A \subseteq K$ και $B \subseteq L$.

11.4 Ακολουθίες.

Ο επόμενος ορισμός είναι γενίκευση του ορισμού που υπάρχει στην ενότητα 2.2 του ορίου ακολουθίας στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x \in X$ και ακολουθία (x_n) στο X. Λέμε ότι η (x_n)* **συγκλίνει** *στο x στον (X, d) ή ότι το x είναι* **όριο** *της (x_n) στον (X, d), και συμβολίζουμε*

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d(x_n, x) < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $d(x_n, x) < \epsilon$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.10. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αν υπάρχει όριο της (x_n), τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x'$ και $x_n \to x''$ και (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ας υποθέσουμε ότι $x' \neq x''$.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_{x'}(\epsilon) \cap N_{x''}(\epsilon) = \emptyset$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \in N_{x'}(\epsilon)$ και $x_n \in N_{x''}(\epsilon)$ και αυτό είναι, προφανώς, άτοπο. □

Σύμφωνα με την Πρόταση 11.10, μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο μιας ακολουθίας.

Παράδειγμα 11.4.1. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x \in X$ και (x_n) στον X η οποία από κάποιον δείκτη και πέρα είναι σταθερή και ίση με x. Τότε $x_n \to x$.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x) = 0 < \epsilon$. Άρα $x_n \to x$.

Η επόμενη πρόταση ανάγει τη σύγκλιση ακολουθιών στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$ στη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.11. *Έστω $\mathrm{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d}) \in \mathbb{R}^d$ για κάθε n και $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$.
(ii) $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$.

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και τότε ισχύει τελικά $\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}\| < \epsilon$. Επομένως, για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει τελικά

$$0 \leq |x_{n,k} - x_k| \leq \big((x_{n,1} - x_1)^2 + \cdots + (x_{n,d} - x_d)^2\big)^{1/2} = \|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}\| < \epsilon.$$

Άρα για κάθε $k = 1, \ldots, d$ έχουμε ότι $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$.

$[ii \Rightarrow i]$. Έστω $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και έχουμε ότι ισχύει τελικά $|x_{n,k} - x| < \epsilon/\sqrt{d}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$. Άρα ισχύει τελικά

$$\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}\| = \big((x_{n,1} - x_1)^2 + \cdots + (x_{n,d} - x_d)^2\big)^{1/2} < (d\,\tfrac{\epsilon^2}{d})^{1/2} = \epsilon.$$

Άρα $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$. □

Παράδειγμα 11.4.2. Σε μη-κενό σύνολο X με την διακριτή μετρική d_δ ισχύει $N_x(\epsilon) = \{x\}$, αν $0 < \epsilon \leq 1$, και $N_x(\epsilon) = X$, αν $1 < \epsilon$.
Αν μια ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x, τότε για $\epsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\frac{1}{2}) = \{x\}$ ή, ισοδύναμα, $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$, Άρα η (x_n) είναι τελικά σταθερή. Το αντίστροφο, σύμφωνα με το παράδειγμα 11.4.1, ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο.
Άρα οι συγκλίνουσες ακολουθίες στον (X, d_δ) είναι εκείνες και μόνον εκείνες οι οποίες είναι τελικά σταθερές.

Παράδειγμα 11.4.3. Όπως στο παράδειγμα 11.1.4, θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(B(A), d_A)$, όπου A είναι ένα μη-κενό σύνολο και $B(A)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Η απόσταση δυο συναρτήσεων $f, g \in B(A)$ ορίστηκε να είναι

$$d_A(f, g) = \|f - g\|_A = \sup\{|f(x) - g(x)| \,|\, x \in A\}.$$

Αν θεωρήσουμε μια ακολουθία (f_n) στον χώρο $B(A)$, τότε το ότι η (f_n) συγκλίνει στην συνάρτηση $f \in B(A)$ στον μετρικό χώρο $(B(A), d_A)$ ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $\|f_n - f\|_A = d_A(f_n, f) < \epsilon$, δηλαδή με το ότι

$$\|f_n - f\|_A \to 0.$$

Αυτό, όμως, το τελευταίο ισοδυναμεί, σύμφωνα με τον ορισμό στην ενότητα 9.2, με το ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο σύνολο A. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι *η σύγκλιση ακολουθίας στον μετρικό χώρο $(B(A), d_A)$ ισοδυναμεί με την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων στο σύνολο A*. Αυτός είναι ο λόγος που η μετρική d_A ονομάστηκε, εκτός από ομοιόμορφη μετρική στο $B(A)$, και *μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης στο A*.
Τα ίδια μπορούμε να πούμε για την περίπτωση του μετρικού χώρου $(BC(A), d_A)$ του παραδείγματος 11.3.4 στην περίπτωση που το A είναι μη-κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, $BC(A)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$ και d_A είναι η ομοιόμορφη μετρική στο $BC(A)$. Και πάλι η σύγκλιση ακολουθίας στον μετρικό χώρο $(BC(A), d_A)$ ισοδυναμεί με την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων στο σύνολο A. Η μόνη διαφορά είναι ότι οι συναρτήσεις μας είναι φραγμένες και συνεχείς και όχι μόνο φραγμένες.

Θα δούμε, τώρα, την πολύ ισχυρή σχέση ανάμεσα στην έννοια της σύγκλισης ακολουθιών και σε διάφορες έννοιες που έχουμε ήδη μελετήσει: τις έννοιες του οριακού σημείου και του σημείου συσσώρευσης, την έννοια του κλειστού υποσυνόλου (και, εμμέσως, του ανοικτού υποσυνόλου) και, τέλος, τις έννοιες του ορίου συνάρτησης και της συνέχειας συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.12. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$.*
[α] *Το x είναι οριακό σημείο του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$.*
[β] *Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $A \setminus \{x\}$ ώστε $x_n \to x$.*

Απόδειξη. [α] Έστω ότι το x είναι οριακό σημείο του A και έστω τυχόν $n \in \mathbb{N}$. Στην περιοχή $N_x\big(\frac{1}{n}\big)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και έστω x_n ένα τέτοιο στοιχείο. Δηλαδή, ισχύει $x_n \in A$ και $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ για κάθε n και, επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $d(x_n, x) < \epsilon$ Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$,

οπότε ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και, επομένως, η περιοχή $N_x(\epsilon)$ του x περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A. Άρα το x είναι οριακό σημείο του A.

[β] Άμεση συνέπεια του [α], διότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν είναι οριακό σημείο του $A \setminus \{x\}$. $\square$

Παράδειγμα 11.4.4. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Κάθε $x \in A$ είναι οριακό σημείο του A, διότι υπάρχει η σταθερή ακολουθία (x) στο A με όριο x.

Παράδειγμα 11.4.5. Έστω $a < b$ και το διάστημα $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$. Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι κάθε $x \in [a, b]$ είναι οριακό σημείο του $[a, b]$. Επίσης, κάθε $x \in [a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b]$. Πράγματι, αν $a \leq x < b$, υπάρχει η ακολουθία $\big(x + \frac{b-x}{n}\big)$ στο $[a, b] \setminus \{x\}$ με όριο το x και, αν $x = b$, υπάρχει η ακολουθία $\big(b - \frac{b-a}{n}\big)$ στο $[a, b] \setminus \{b\}$ με όριο το b.
Έστω, τώρα, $a < b < c$ και το $[a, b] \cup \{c\}$ στο $\mathbb{R}$. Κάθε $x \in [a, b] \cup \{c\}$ είναι οριακό σημείο του $[a, b] \cup \{c\}$. Επίσης, με την αιτιολόγηση του προηγούμενου παραδείγματος, κάθε $x \in [a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b] \cup \{c\}$. Όμως, το c δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b] \cup \{c\}$, διότι δεν υπάρχει καμία ακολουθία (x_n) στο $\big([a, b] \cup \{c\}\big) \setminus \{c\} = [a, b]$ με όριο το c.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.13. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) Το A είναι κλειστό.
(ii) Κάθε x, το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο A, ανήκει στο A.

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω τυχόν x για το οποίο υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Βάσει της Πρότασης 11.12, το x είναι οριακό σημείο του A, οπότε, επειδή το A είναι κλειστό, ισχύει $x \in A$.
$[ii \Rightarrow i]$. Έστω τυχόν οριακό σημείο x του A. Τότε, από την Πρόταση 11.12, υπάρχει ακολουθία στο A με όριο x και, επομένως, το x ανήκει στο A. Άρα το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του, οπότε είναι κλειστό. $\square$

Παράδειγμα 11.4.6. Θεωρούμε το διάστημα $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$ και οποιοδήποτε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας (x_n) στο $[a, b]$. Δηλαδή, ισχύει $a \leq x_n \leq b$ για κάθε n και $x_n \to x$. Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι $a \leq x \leq b$, δηλαδή, $x \in [a, b]$. Άρα το $[a, b]$ είναι κλειστό σύνολο.
Ομοίως, κάθε κλειστό διάστημα $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ είναι κλειστό σύνολο.
Για το (a, b) υπάρχει ένα τουλάχιστον x, συγκεκριμένα το $x = a$ ή το $x = b$, το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο (a, b), συγκεκριμένα της $(a + (b-a)/2n)$ ή της $(b - (b-a)/2n)$, αντιστοίχως, αλλά δεν ανήκει στο (a, b). Άρα το (a, b) δεν είναι κλειστό σύνολο.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι τα $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$ δεν είναι κλειστά σύνολα.

Οι προτάσεις 11.14 και 11.15 είναι γενικεύσεις των θεωρημάτων 3.1 και 4.1, αντιστοίχως, τα οποία ισχύουν στο πλαίσιο του $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.14. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A, $y_0 \in Y$ και $f : A \to Y$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.
(ii) Για κάθε (x_n) στο $A \setminus \{x_0\}$ με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to y_0$.

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω (x_n) στο $A \setminus \{x_0\}$ ώστε $x_n \to x_0$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$d(f(x), y_0) < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in A \text{ με } 0 < d(x, x_0) < \delta. \tag{11.10}$$

Κατόπιν, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$d(x_n, x_0) < \delta \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{11.11}$$

Επειδή ισχύει $x_n \neq x_0$ για κάθε n, από την (11.11) καθώς και από την (11.10) με $x = x_n$ συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(f(x_n), y_0) < \epsilon$. Άρα $f(x_n) \to y_0$.
$[ii \Rightarrow i]$. Έστω ότι *δεν* είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Τότε υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < \delta$ και $\rho(f(x), y_0) \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_n \in A \;\text{ με }\; 0 < d(x_n, x_0) < \tfrac{1}{n} \;\text{ και }\; \rho(f(x_n), y_0) \geq \epsilon.$$

Τότε η ακολουθία (x_n) είναι στο $A \setminus \{x_0\}$ και ισχύει $x_n \to x_0$ αλλά όχι $f(x_n) \to y_0$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. □

Η απόδειξη της πρότασης 11.15 είναι σχεδόν κατά λέξη επανάληψη της απόδειξης της πρότασης 11.14.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.15. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f : A \to Y$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) Η f είναι συνεχής στο x_0.
(ii) Για κάθε (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω (x_n) στο A ώστε $x_n \to x_0$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon \qquad \text{για κάθε }\; x \in A \;\text{ με }\; d(x, x_0) < \delta. \tag{11.12}$$

Κατόπιν, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$d(x_n, x_0) < \delta \qquad \text{για κάθε }\; n \geq n_0. \tag{11.13}$$

Από την (11.13) καθώς και από την (11.12) με $x = x_n$ συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$. Άρα $f(x_n) \to f(x_0)$.
$[ii \Rightarrow i]$. Έστω ότι η f *δεν* είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$ και $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_n \in A \;\text{ με }\; d(x_n, x_0) < \tfrac{1}{n} \;\text{ και }\; \rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon.$$

Τότε η ακολουθία (x_n) είναι στο A και ισχύει $x_n \to x_0$ αλλά όχι $f(x_n) \to f(x_0)$. Καταλήγουμε σε άτοπο και άρα η f είναι συνεχής στο x_0. □

Ασκήσεις.

11.4.1. Έστω $x_n \to x$ στον μετρικό χώρο (X, d) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι $x_{n_k} \to x$ στον (X, d).

11.4.2. Έστω ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον (X, d). Αποδείξτε ότι $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ στο $\mathbb{R}$.

11.4.3. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Αποδείξτε ότι το x είναι συνοριακό σημείο του A αν και μόνον αν υπάρχουν (x'_n) στο A και (x''_n) στο A^c ώστε $x'_n \to x$ και $x''_n \to x$.

11.4.4. Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n) και (y_n) στο $\mathbb{R}^d$ και ακολουθία (λ_n) στο $\mathbb{R}$. Αν $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$, $\mathrm{y}_n \to \mathrm{y}$ στο $\mathbb{R}^d$ και $\lambda_n \to \lambda$ στο $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\mathrm{x}_n + \mathrm{y}_n \to \mathrm{x} + \mathrm{y}$ και $\lambda_n \mathrm{x}_n \to \lambda \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$ και $\langle \mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n \rangle \to \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ στο $\mathbb{R}$.

11.4.5. Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, αποδείξτε ότι το $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ενώ το $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

11.4.6. Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, αποδείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα, κάθε υπερεπίπεδο, κάθε κλειστός ημιχώρος και κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

11.4.7. Έστω μη-κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική d_δ. Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, αποδείξτε ότι κάθε $A \subseteq X$ είναι κλειστό.

11.4.8. Θεωρήστε τον χώρο $BC([a, b], d_A)$ των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$ με την ομοιόμορφη μετρική και την συνάρτηση $I : BC([a, b]) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{για κάθε } f \in BC([a, b]).$$

Αποδείξτε ότι η I είναι συνεχής.

11.4.9. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) στο X είναι κλειστό.

11.5 Πληρότητα.

Ο επόμενος ορισμός και η πρόταση 11.16 αποτελούν γενίκευση του αντίστοιχου ορισμού και της πρότασης 2.17 για το $\mathbb{R}$ στην ενότητα 2.6.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία (x_n) στο X. Λέμε ότι η (x_n) είναι* **ακολουθία Cauchy** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d(x_n, x_m) < \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.16. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αν η (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$ και έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Με απλή αλλαγή του συμβόλου του δείκτη, ισχύει $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \geq n_0$. Άρα για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται* **πλήρες** *αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A, η οποία είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει σε στοιχείο του A.*
Ο ίδιος ο χώρος (X, d) χαρακτηρίζεται **πλήρης** *αν το X είναι πλήρες, δηλαδή αν κάθε ακολουθία (x_n) στο X, η οποία είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει σε στοιχείο του X.*

Παράδειγμα 11.5.1. Βάσει των αποτελεσμάτων της ενότητας 2.6, ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι πλήρης.

Παράδειγμα 11.5.2. Έστω μη-κενό X με την διακριτή μετρική d_δ και έστω ακολουθία Cauchy (x_n). Τότε για $\epsilon = 1$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d_\delta(x_n, x_m) < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Άρα ισχύει $x_n = x_m$ για κάθε $n, m \geq n_0$ και, επομένως, η (x_n) είναι τελικά σταθερή, οπότε συγκλίνει. Άρα ο μετρικός χώρος (X, d_δ) είναι πλήρης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.3. *Ο χώρος $\mathbb{R}^d$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m\|_e < \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Αν $\mathrm{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d})$, τότε για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει

$$|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m\|_e < \epsilon$$

για κάθε $n, m \geq n_0$ και, επομένως, για κάθε $k = 1, \ldots, d$ η $(x_{n,k})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$. Όμως, ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, οπότε για κάθε $k = 1, \ldots, d$ υπάρχει $x_k \in \mathbb{R}$ ώστε $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$. Τώρα ορίζουμε $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ και έχουμε ότι $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.4. *Ο μετρικός χώρος* $(B(A), d_A)$ *είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία Cauchy (f_n) στον $(B(A), d_A)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.
Έστω $x \in A$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ n, m \geq n_0.$$

Άρα η ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό.
Ορίζουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε δημιουργείται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.
Είδαμε πιο πάνω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ και κάθε } \ n, m \geq n_0. \tag{11.14}$$

Θεωρώντας το όριο $\lim_{m\to+\infty}$ στην (11.14), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ και κάθε } \ n \geq n_0. \tag{11.15}$$

Τώρα μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο A, δηλαδή είναι στοιχείο του χώρου $B(A)$. Πράγματι, από την (11.15) με $n = n_0$ και χρησιμοποιώντας ότι η f_{n_0} είναι φραγμένη στο A, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, βρίσκουμε ότι ισχύει

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq \epsilon + M \qquad \text{για κάθε } \ x \in A.$$

Επίσης, η (11.15) μας λέει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ n \geq n_0.$$

Άρα η (f_n) συγκλίνει στην f στον $(B(A), d_A)$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.5. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και* $A \subseteq X$. *Ο μετρικός χώρος* $(BC(A), d_A)$ *είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία Cauchy (f_n) στον $(BC(A), d_A)$. Επειδή το $BC(A)$ είναι υποσύνολο του $B(A)$, η ακολουθία (f_n) είναι ακολουθία και στον $B(A)$. Και, επειδή η μετρική d_A που χρησιμοποιούμε στον $BC(A)$ είναι η ίδια με την μετρική d_A που χρησιμοποιούμε στον μεγαλύτερο χώρο $B(A)$, συνεπάγεται ότι η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy και στον $(B(A), d_A)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 11.4, υπάρχει $f \in B(A)$ ώστε η (f_n) να συγκλίνει στην f στον $(B(A), d_A)$. Απομένει να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο A ώστε η f να είναι στοιχείο του $BC(A)$.
Έστω $\xi \in A$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_0$ και, ειδικώτερα, $\|f_{n_0} - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$. Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $x \in N_\xi(\delta) \cap A$. Άρα για κάθε $x \in N_\xi(\delta) \cap A$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + |f_{n_0}(\xi) - f(\xi)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + \|f_{n_0} - f\|_A < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο ξ. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.17. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και* $A \subseteq X$. *Αν το* A *είναι πλήρες, τότε το* A *είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω οριακό σημείο x του A. Τότε υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Επειδή η (x_n) συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy. Επειδή το A είναι πλήρες, η (x_n) συγκλίνει σε στοιχείο του A. Λόγω μοναδικότητας του ορίου, αυτό το στοιχείο του A είναι το x.
Άρα το A περιέχει κάθε οριακό σημείο του, οπότε είναι κλειστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.18. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και* $A \subseteq B \subseteq X$. *Αν το* B *είναι πλήρες και το* A *είναι κλειστό, τότε το* A *είναι πλήρες.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (x_n) στο A, η οποία είναι ακολουθία Cauchy. Η (x_n) είναι και στο B και, επειδή το B είναι πλήρες, η (x_n) συγκλίνει σε στοιχείο, έστω x, του B. Επειδή η (x_n) είναι στο A, το x είναι οριακό σημείο του A και, επειδή το A είναι κλειστό, το x ανήκει στο A.
Άρα κάθε ακολουθία (x_n) στο A, η οποία είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει σε στοιχείο του A, οπότε το A είναι πλήρες. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και μη-κενό* $M \subseteq X$. *Ονομάζουμε* **διάμετρο** *του* M, *και συμβολίζουμε* $\operatorname{diam} M$, *το*

$$\operatorname{diam} M = \sup\{d(x, y) \,|\, x, y \in M\}.$$

Το σύνολο $\{d(x, y) \,|\, x, y \in M\}$ είναι μη-κενό, διότι το M είναι μη-κενό και, αν $x \in M$, το $d(x, x) = 0$ είναι στοιχείο του συνόλου αυτού. Επίσης, το σύνολο αυτό είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και τα στοιχεία του είναι μη-αρνητικοί αριθμοί. Αν το σύνολο αυτό είναι άνω φραγμένο, το supremum του υπάρχει και είναι αριθμός ≥ 0 ενώ, αν το σύνολο αυτό δεν είναι άνω φραγμένο, το supremum του είναι το $+\infty$. Άρα, η διάμετρος του M είναι καλώς ορισμένη και

$$0 \leq \operatorname{diam} M \leq +\infty.$$

Παράδειγμα 11.5.3. Στο $\mathbb{R}^d$ η διάμετρος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ίση με το μήκος του και η διάμετρος μιας d-διάστατης μπάλας είναι ίση με το διπλάσιο της ακτίνας της.

Παράδειγμα 11.5.4. Σε κάθε μετρικό χώρο (X, d) και για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ ισχύει $\operatorname{diam} \overline{N}_x(r) \leq 2r$. Πράγματι, για κάθε $y, z \in \overline{N}_x(r)$ ισχύει

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq r + r = 2r.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.19. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και ακολουθία* $F_1, F_2. \ldots$ *μη-κενών πλήρων υποσυνόλων του* X *ώστε να ισχύει* $F_{n+1} \subseteq F_n$ *για κάθε* n *και* $\operatorname{diam} F_n \to 0$. *Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο το οποίο ανήκει σε όλα τα* F_n *ή, ισοδύναμα, η τομή* $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ *περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε x_n από κάθε F_n και σχηματίζουμε μια ακολουθία (x_n).
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε $\operatorname{diam} F_{n_0} < \epsilon$. Τώρα για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $x_n \in F_n \subseteq F_{n_0}$ και $x_m \in F_m \subseteq F_{n_0}$ και, επομένως,

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \epsilon.$$

Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επειδή η ακολουθία αυτή είναι ολόκληρη στο F_1 και το F_1 είναι πλήρες, συνεπάγεται ότι η (x_n) συγκλίνει σε στοιχείο του F_1. Δηλαδή, υπάρχει $x \in F_1$ ώστε $x_n \to x$. Παρατηρούμε, όμως, ότι από τον οποιονδήποτε δείκτη m και πέρα η (x_n) είναι στο F_m και, επομένως, το x είναι οριακό σημείο του F_m. Τώρα, επειδή το F_m είναι πλήρες, είναι και κλειστό, οπότε περιέχει όλα τα οριακά σημεία του και άρα περιέχει και το x. Άρα το x ανήκει σε κάθε F_m, δηλαδή ανήκει στην τομή $\bigcap_{m=1}^{+\infty} F_m$.
Αν η $\bigcap_{m=1}^{+\infty} F_m$ περιέχει, εκτός από το x, και κάποιο y, τότε για κάθε m ισχύει $x, y \in F_m$, οπότε

$$0 \leq d(x, y) \leq \operatorname{diam} F_m \to 0.$$

Άρα $d(x, y) = 0$, οπότε $y = x$. Δηλαδή η $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και* $A \subseteq X$. *Το* A *χαρακτηρίζεται* **πυκνό** *αν* $\overline{A} = X$.

Παράδειγμα 11.5.5. Το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BAIRE. *Έστω πλήρης μετρικός χώρος (X, d). Αν για κάθε n το U_n είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X, τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in X$ και οποιονδήποτε $r > 0$.
Επειδή το U_1 είναι πυκνό, δηλαδή $\overline{U_1} = X$, το x είναι οριακό σημείο του U_1, οπότε η τομή $U_1 \cap N_x(r)$ είναι μη-κενό και ανοικτό σύνολο (ως τομή δυο ανοικτών συνόλων). Άρα υπάρχει $x_1 \in X$ και $r_1 > 0$ ώστε

$$\overline{N}_{x_1}(r_1) \subseteq U_1 \cap N_x(r).$$

Παίρνοντας, αν χρειάζεται, μικρότερο r_1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, επιπλέον,

$$0 < r_1 < 1.$$

Επειδή το U_2 είναι πυκνό, δηλαδή $\overline{U_2} = X$, το x_1 είναι οριακό σημείο του U_2, οπότε η τομή $U_2 \cap N_{x_1}(r_1)$ είναι μη-κενό και ανοικτό σύνολο. Άρα υπάρχει $x_2 \in X$ και $r_2 > 0$ ώστε

$$\overline{N}_{x_2}(r_2) \subseteq U_2 \cap N_{x_1}(r_1).$$

Παίρνοντας, αν χρειάζεται, μικρότερο r_2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, επιπλέον,

$$0 < r_2 < \tfrac{1}{2}.$$

Είναι φανερό ότι, συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία επαγωγικά, δημιουργείται μια ακολουθία περιοχών $\big(N_{x_n}(r_n)\big)$ έτσι ώστε

$$\overline{N}_{x_{n+1}}(r_{n+1}) \subseteq U_{n+1} \cap N_{x_n}(r_n), \qquad 0 < r_n < \tfrac{1}{n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, κάθε $\overline{N}_{x_n}(r_n)$ είναι κλειστό και, επομένως, πλήρες υποσύνολο του πλήρους X. Επίσης, τα σύνολα αυτά αποτελούν εγκιβωτισμένη ακολουθία και

$$0 \leq \operatorname{diam} \overline{N}_{x_n}(r_n) \leq 2r_n < \tfrac{2}{n} \to 0.$$

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 11.19, υπάρχει (μοναδικό) y το οποίο ανήκει σε κάθε $\overline{N}_{x_n}(r_n)$. Ειδικώτερα, το y ανήκει στο $\overline{N}_{x_1}(r_1)$ και, επομένως, στην αρχική περιοχή $N_x(r)$. Επιπλέον, επειδή ισχύει $\overline{N}_{x_n}(r_n) \subseteq U_n$ για κάθε n, το y ανήκει στην τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ τέμνει κάθε περιοχή του x, οπότε το x είναι οριακό σημείο της $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$. Αυτό ισχύει για κάθε $x \in X$, οπότε η $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ είναι πυκνό σύνολο. $\square$

Ασκήσεις.

11.5.1. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται **πουθενά πυκνό** αν το $\overline{A}$ δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.
Αποδείξτε ότι, αν ο X είναι πλήρης και αν για κάθε n το F_n είναι κλειστό και πουθενά πυκνό υποσύνολο του X, τότε η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X.

11.5.2. Αποδείξτε την **αρχή ομοιόμορφου φράγματος**. *Έστω πλήρης μετρικός χώρος (X, d) και συλλογή $\mathcal{F}$ συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει αριθμός M_x ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M_x$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Τότε υπάρχει μη-κενό ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$ και αριθμός M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και κάθε $x \in U$.*

11.5.3. Δείτε τις ασκήσεις 11.1.4 και 11.1.5.
Αν $1 \leq p \leq +\infty$, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος (l_p, d_p) είναι πλήρης.
Αν $1 \leq p < +\infty$, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος $\big(C([a, b]), d_p\big)$ δεν είναι πλήρης.

11.5.4. [10] Έστω μετρικός χώρος (X, d). Αν για κάθε ακολουθία $F_1, F_2. \ldots$ μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του X, για την οποία ισχύει $F_{n+1} \subseteq F_n$ για κάθε n και $\operatorname{diam} F_n \to 0$, η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ είναι μη-κενή, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος είναι πλήρης.

[10] Ουσιαστικά, το αντίστροφο της πρότασης 11.19.

11.5.5. [11] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και πλήρες $A \subseteq X$. Αν $0 \leq M < 1$ και για την $f : A \to A$ ισχύει $d(f(x), f(y)) \leq Md(x, y)$ για κάθε $x, y \in A$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A και ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in A$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

11.6 Συμπάγεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μη-κενό σύνολο X και $M \subseteq X$ και μια οικογένεια Σ υποσυνόλων του X. Δηλαδή, κάθε $A \in \Sigma$ είναι ένα υποσύνολο του X.*
Η Σ ονομάζεται **κάλυψη** *του M αν $M \subseteq \bigcup_{A \in \Sigma} A$. Αν, επιπλέον, η Σ είναι πεπερασμένη, τότε ονομάζεται* **πεπερασμένη κάλυψη** *του M.*
Έστω Σ και Σ' δύο καλύψεις του M. Αν $\Sigma' \subseteq \Sigma$, τότε λέμε ότι η Σ είναι **μεγαλύτερη ή ίση** *της Σ' και ότι η Σ' είναι* **μικρότερη ή ίση** *της Σ.*
Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν η Σ είναι κάλυψη του M και όλα τα $A \in \Sigma$ είναι ανοικτά, τότε η Σ ονομάζεται **ανοικτή κάλυψη** *του M.*

Είναι προφανές ότι, αν οι Σ και Σ' είναι καλύψεις του M και $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M, τότε και η Σ' είναι ανοικτή κάλυψη του M. Είναι, επίσης, προφανές ότι, αν η Σ είναι κάλυψη του M και $N \subseteq M$, τότε η Σ είναι κάλυψη και του N.

Παράδειγμα 11.6.1. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το διάστημα $[0, 1]$, τα διαστήματα $A_x = \big(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}\big)$ και τη συλλογή $\Sigma = \{A_x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
Η Σ είναι, προφανώς, ανοικτή κάλυψη του $[0, 1]$.
Αν κρατήσουμε μονάχα τα διαστήματα $A_{x_k} = \big(x_k - \frac{1}{100}, x_k + \frac{1}{100}\big)$, όπου $x_k = \frac{k}{100}$ για $k = 0, \dots, 100$, τότε η συλλογή $\Sigma' = \{A_{x_k} \,|\, k = 0, \dots, 100\}$ είναι μια πεπερασμένη κάλυψη του $[0, 1]$ μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $[0, 1]$ *υπάρχει* μια πεπερασμένη κάλυψη του $[0, 1]$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Παράδειγμα 11.6.2. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbb{R}$, τα διαστήματα $A_x = \big(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}\big)$ του προηγούμενου παραδείγματος και την $\Sigma = \{A_x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, η οποία είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$. Η Σ είναι άπειρη συλλογή και τίθεται το ερώτημα αν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbb{R}$ μικρότερη ή ίση της Σ.
Η απάντηση είναι "όχι". Πράγματι, αν πάρουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους διαστήματα $A_{x_1} = \big(x_1 - \frac{1}{100}, x_1 + \frac{1}{100}\big), \dots, A_{x_n} = \big(x_n - \frac{1}{100}, x_n + \frac{1}{100}\big)$ και θεωρήσουμε την $\Sigma' = \{A_{x_k} \,|\, k = 1, \dots, n\}$, τότε η Σ' δεν είναι κάλυψη του $\mathbb{R}$. Διότι, αν θέσουμε $l = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ και $u = \max\{x_1, \dots, x_n\}$, τότε $\bigcup_{A \in \Sigma'} A \subseteq \big(l - \frac{1}{100}, u + \frac{1}{100}\big)$.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $\mathbb{R}$ δεν υπάρχει *καμία* πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbb{R}$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Παράδειγμα 11.6.3. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbb{R}$, τα διαστήματα $(-n, +\infty)$ και $(-\infty, n)$ και έστω $\Sigma = \{(-n, +\infty), (-\infty, n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Προφανώς, η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$ και η $\Sigma' = \{(-1, +\infty), (-\infty, 1)\}$ είναι, επίσης, κάλυψη του $\mathbb{R}$ και, μάλιστα, μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $\mathbb{R}$ *υπάρχει* μια πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbb{R}$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Παράδειγμα 11.6.4. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το διάστημα $(0, 1)$ και τη συλλογή $\Sigma = \{A_x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ του παραδείγματος 11.6.1, όπου $A_x = \big(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}\big)$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$. Η $\Sigma' = \{A_{x_k} \,|\, k = 0, \dots, 100\}$, όπου $x_k = \frac{k}{100}$, είναι, όπως και στο παράδειγμα 11.6.1, πεπερασμένη κάλυψη του $(0, 1)$ μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$ *υπάρχει* μια πεπερασμένη κάλυψη του $(0, 1)$ μικρότερη ή ίση της Σ.

[11] Γενίκευση της άσκησης 4.3.5.

Παράδειγμα 11.6.5. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το διάστημα $(0,1)$, τα ανοικτά διαστήματα $A_n = (\frac{1}{n}, 1)$ και την $\Sigma = \{A_n \,|\, n = 2, 3, \dots\}$.
Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0,1)$, διότι κάθε x στο $(0,1)$ περιέχεται σε κάποιο $(\frac{1}{n}, 1)$, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n} < x < 1$. Αν πάρουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα αυτά, για παράδειγμα τα $A_{n_1} = \big(\frac{1}{n_1}, 1\big), \dots, A_{n_N} = \big(\frac{1}{n_N}, 1\big)$, και θεωρήσουμε την $\Sigma' = \{A_{n_k} \,|\, k = 1, \dots, N\}$, τότε η Σ' δεν είναι κάλυψη του $(0,1)$. Πράγματι, αν θέσουμε $m = \max\{n_1, \dots, n_N\}$, τότε $\bigcup_{A \in \Sigma'} A = (\frac{1}{m}, 1)$.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $(0,1)$ δεν υπάρχει *καμία* πεπερασμένη κάλυψη του $(0,1)$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, όλα στο πλαίσιο του $\mathbb{R}$:
(i) Στις περιπτώσεις $M = (0,1)$ και $M = \mathbb{R}$ είδαμε συγκεκριμένες ανοικτές καλύψεις Σ του M για τις οποίες υπάρχουν πεπερασμένες καλύψεις Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και συγκεκριμένες ανοικτές καλύψεις Σ του M για τις οποίες δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$.
(ii) Στην περίπτωση $M = [0,1]$ είδαμε συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του M για την οποία υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$ αλλά δεν είδαμε καμία ανοικτή κάλυψη Σ του $[0,1]$ για την οποία δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$.
Είναι δυνατόν να βρούμε ανοικτή κάλυψη Σ του $[0,1]$ για την οποία δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$; Λίγο παρακάτω θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο!

Η ερώτηση που διατυπώθηκε για το διάστημα $[0,1]$, μπορεί, φυσικά, να διατυπωθεί για οποιοδήποτε υποσύνολο όχι μόνο του $\mathbb{R}$ αλλά και οποιουδήποτε μετρικού χώρου:
Δοθέντος μετρικού χώρου (X,d) και υποσυνόλου M του X, είναι δυνατόν να βρούμε ανοικτή κάλυψη Σ του M για την οποία δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$;

Όσο περίεργο κι αν φαίνεται ένα τέτοιο ερώτημα, η αλήθεια είναι ότι η δυνατότητα απάντησης σ' αυτό παίζει *ιδιαίτερα σημαντικό* ρόλο στην Ανάλυση. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε ορισμένες εκφάνσεις αυτού του ρόλου, αφού κωδικοποιήσουμε το ερώτημα με τον επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $M \subseteq X$. Το M χαρακτηρίζεται* **συμπαγές** *αν για κάθε ανοικτή κάλυψη Σ του M υπάρχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση της Σ.*

Παράδειγμα 11.6.6. Σύμφωνα με τα παραδείγματα 11.6.2 και 11.6.5, το $\mathbb{R}$ και το $(0,1)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.6.7. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και πεπερασμένο $M \subseteq X$. Δηλαδή, $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ για κάποια $x_1, \dots, x_n \in X$. Θα δούμε ότι το M είναι συμπαγές.
Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Τότε κάθε $x_k \in M$ περιέχεται σε κάποιο $A_k \in \Sigma$. Είναι, τώρα, προφανές ότι $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και, επομένως, η $\Sigma' = \{A_1, \dots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M με $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Άρα το M είναι συμπαγές.

Παράδειγμα 11.6.8. Έστω μη-κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική d_δ και $M \subseteq X$. Θα δούμε ότι το M είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο.
Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι, αν το M είναι πεπερασμένο, τότε είναι συμπαγές και, μάλιστα, αυτό ισχύει στο πλαίσιο οποιουδήποτε μετρικού χώρου.
Αντιστρόφως, έστω ότι το M είναι συμπαγές. Για κάθε $x \in M$ θεωρούμε το σύνολο $A_x = \{x\}$, το οποίο είναι ανοικτό, και έχουμε την ανοικτή κάλυψη $\Sigma = \{A_x \,|\, x \in M\}$ του M. Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει κάποια πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M με $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Αυτό σημαίνει ότι $\Sigma' = \{A_{x_1}, \dots, A_{x_n}\}$ για κάποια $x_1, \dots, x_n \in M$ και ότι $M \subseteq A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n} = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Επειδή, μάλιστα, $x_1, \dots, x_n \in M$, συνεπάγεται $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ και, επομένως, το M είναι πεπερασμένο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $M \subseteq X$. Το M χαρακτηρίζεται* **φραγμένο** *αν υπάρχει $x_0 \in X$ και θετικός αριθμός R ώστε $M \subseteq N_{x_0}(R)$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $d(x,x_0) < R$ για κάθε $x \in M$.*

Είναι προφανές ότι, αν ένα M είναι φραγμένο και $N \subseteq M$, τότε και το N είναι φραγμένο.

Παράδειγμα 11.6.9. Στο $\mathbb{R}$ ένα υποσύνολο M είναι φραγμένο αν και μόνο αν περιέχεται σε κάποιο διάστημα (a, b). Γενικά, στο $\mathbb{R}^d$ ένα υποσύνολο M είναι φραγμένο αν και μόνον αν περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες.
Πράγματι, αν το M είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}^d$, υπάρχουν $R < +\infty$ και $\mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,d})$ ώστε να ισχύει

$$\big((x_1 - x_{0,1})^2 + \cdots + (x_d - x_{0,d})^2\big)^{1/2} = \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_e < R$$

για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d) \in M$. Τότε ισχύει $|x_k - x_{0,k}| < R$ για κάθε $k = 1, \dots, d$ και κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d) \in M$. Άρα για κάθε $\mathrm{x} \in M$ ισχύει

$$\mathrm{x} \in [x_{0,1} - R, x_{0,1} + R] \times \cdots \times [x_{0,d} - R, x_{0,d} + R],$$

οπότε το M περιέχεται στο ορθ. παραλληλεπίπεδο $[x_{0,1} - R, x_{0,1} + R] \times \cdots \times [x_{0,d} - R, x_{0,d} + R]$.
Αντιστρόφως, έστω ότι το M περιέχεται στο $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$. Θέτουμε $x_{0,k} = \frac{a_k + b_k}{2}$ για κάθε $k = 1, \dots, d$ και $R = \sqrt{d}\max\{\frac{b_k - a_k}{2} \,|\, 1 \leq k \leq d\}$. Τότε για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d) \in M$ έχουμε $|x_k - x_{0,k}| \leq \frac{R}{\sqrt{d}}$ για κάθε $k = 1, \dots, d$ και, επομένως,

$$\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_e = \big((x_1 - x_{0,1})^2 + \cdots + (x_d - x_{0,d})^2\big)^{1/2} \leq \big(d\,\tfrac{R^2}{d}\big)^{1/2} = R.$$

Άρα το M είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}^d$.

Παράδειγμα 11.6.10. Έστω μη-κενό σύνολο X με την διακριτή μετρική d_δ. Τότε κάθε $M \subseteq X$ είναι φραγμένο και, ειδικώτερα, το ίδιο το X είναι φραγμένο.
Αυτό οφείλεται στο ότι η d_δ έχει δύο μόνον τιμές, 0 και 1. Αν, λοιπόν, επιλέξουμε οποιοδήποτε $x_0 \in X$, ισχύει $d_\delta(x, x_0) \leq 1$ για κάθε $x \in X$.

Παρατηρούμε ότι το αν ένα υποσύνολο M ενός μετρικού χώρου είναι φραγμένο ή όχι εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μετρική του χώρου. Για παράδειγμα, το $\mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδια μετρική ενώ είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.20. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές, τότε είναι φραγμένο και κλειστό.*

Απόδειξη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και θεωρούμε τη συλλογή $\Sigma = \{N_{x_0}(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M (και, μάλιστα, είναι ανοικτή κάλυψη ολόκληρου του X), οπότε υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M η οποία είναι μικρότερη ή ίση της Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \dots, n_N$ ώστε $M \subseteq N_{x_0}(n_1) \cup \cdots \cup N_{x_0}(n_N)$. Αν θέσουμε $R = \max\{n_1, \dots, n_N\}$, συνεπάγεται $M \subseteq N_{x_0}(R)$ και, επομένως, το M είναι φραγμένο.
Παίρνουμε τυχόν $x_0 \in M^c$. Θεωρούμε $A_n = \{x \in X \,|\, d(x, x_0) > \frac{1}{n}\} = \big(\overline{N}_{x_0}(\frac{1}{n})\big)^c$ και τη συλλογή $\Sigma = \{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M, οπότε υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση της Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \dots, n_N$ ώστε $M \subseteq A_{n_1} \cup \cdots \cup A_{n_N}$. Αν θέσουμε $n = \max\{n_1, \dots, n_N\}$, συνεπάγεται $M \subseteq A_n$ και, επομένως, $N_{x_0}(\frac{1}{n}) \subseteq M^c$. Αποδείξαμε ότι κάθε $x_0 \in M^c$ είναι εσωτερικό σημείο του M^c. Άρα το M^c είναι ανοικτό και, επομένως, το M είναι κλειστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.21. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $N \subseteq M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές και το N κλειστό, τότε το N είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του N. Τότε η $\Sigma_1 = \{N^c\} \cup \Sigma$ είναι ανοικτή κάλυψη του M (και, μάλιστα, είναι ανοικτή κάλυψη ολόκληρου του X). Πράγματι,

$$M \subseteq X = N^c \cup N \subseteq N^c \cup \textstyle\bigcup_{A \in \Sigma} A = \bigcup_{A \in \Sigma_1} A.$$

Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ_1' του M μικρότερη ή ίση της Σ_1. Δηλαδή, υπάρχουν $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_1$ (μπορούμε να τα πάρουμε διαφορετικά ανά δύο) ώστε $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Διακρίνουμε, τώρα, περιπτώσεις σε σχέση με το αν το N^c είναι ένα από τα $A_1, \ldots, A_n$ ή όχι.
Στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $N^c = A_n$ (με αναδιάταξη των $A_1, \ldots, A_n$). Τότε η $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ γράφεται $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup N^c$, οπότε $N \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$. Αυτό σημαίνει ότι η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση της Σ.
Στη δεύτερη περίπτωση όλα τα $A_1, \ldots, A_n$ ανήκουν στην Σ, οπότε η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση της Σ. □

Η πρόταση 11.22 λέει ότι αν δυο σύνολα, το ένα συμπαγές και το άλλο κλειστό, είναι ξένα, τότε υπάρχει *θετική* απόσταση ανάμεσά τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.22. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M, N \subseteq X$ με $M \cap N = \emptyset$. Αν το M είναι συμπαγές και το N κλειστό, τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $d(x, y) \geq \epsilon$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in M$ ισχύει $x \in N^c$ και, επειδή το N^c είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon_x > 0$ ώστε $N_x(\epsilon_x) \subseteq N^c$ και, επομένως, $N_x(\epsilon_x) \cap N = \emptyset$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει

$$d(x, y) \geq \epsilon_x \qquad \text{για κάθε } x \in M \text{ και } y \in N. \tag{11.16}$$

Η συλλογή $\{N_x(\frac{\epsilon_x}{2}) \,|\, x \in M\}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M, οπότε, επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in M$ ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\tfrac{\epsilon_{x_1}}{2}) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\tfrac{\epsilon_{x_n}}{2}). \tag{11.17}$$

Θέτουμε

$$\epsilon = \min\{\tfrac{\epsilon_{x_1}}{2}, \ldots, \tfrac{\epsilon_{x_n}}{2}\} > 0. \tag{11.18}$$

Τότε για κάθε $x \in M$ υπάρχει, σύμφωνα με την (11.17), $k = 1, \ldots, n$ ώστε $x \in N_{x_k}(\frac{\epsilon_{x_k}}{2})$ και, επομένως, βάσει των (11.16) και (11.18), για κάθε $y \in N$ έχουμε

$$d(x, y) \geq d(y, x_k) - d(x, x_k) \geq \epsilon_{x_k} - \tfrac{\epsilon_{x_k}}{2} = \tfrac{\epsilon_{x_k}}{2} \geq \epsilon.$$

Άρα ισχύει $d(x, y) \geq \epsilon$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$. □

Το Θεώρημα 11.6 είναι γενίκευση του γνωστού αποτελέσματος για ακολουθίες εγκιβωτισμένων κλειστών και φραγμένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$: *αν $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$, τότε υπάρχει x το οποίο ανήκει σε όλα τα $[a_n, b_n]$ και, αν, επιπλέον, $b_n - a_n \to 0$, τότε αυτό το x είναι μοναδικό.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.6. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία $K_1, K_2. \ldots$ μη-κενών συμπαγών υποσυνόλων του X ώστε να ισχύει $K_{n+1} \subseteq K_n$ για κάθε n. Τότε υπάρχει στοιχείο το οποίο ανήκει σε όλα τα K_n ή, ισοδύναμα, η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ δεν είναι κενή. Αν, επιπλέον,* $\operatorname{diam} K_n \to 0$, *τότε το κοινό στοιχείο των K_n είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n = \emptyset$. Θεωρούμε την $\Sigma = \{{K_n}^c \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ανοικτή κάλυψη του K_1 (και, μάλιστα, είναι ανοικτή κάλυψη ολόκληρου του X). Πράγματι,

$$K_1 \subseteq X = \emptyset^c = \textstyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} {K_n}^c.$$

Άρα υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του K_1 μικρότερη ή ίση της Σ, δηλαδή υπάρχουν $n_1, \ldots, n_N$ ώστε $K_1 \subseteq {K_{n_1}}^c \cup \cdots \cup {K_{n_N}}^c$. Θέτουμε $n = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$, οπότε $K_1 \subseteq {K_n}^c$, το οποίο

είναι άτοπο, διότι $K_n \subseteq K_1$ και $K_n \neq \emptyset$.
Έστω diam $K_n \to 0$. Αν τα x, y ανήκουν και τα δύο σε όλα τα K_n, τότε ισχύει

$$0 \leq d(x,y) \leq \text{diam}\, K_n$$

για κάθε n. Άρα $d(x,y) = 0$ και, επομένως, $x = y$. □

Το θεώρημα 11.7 είναι πολύ βασικό και πολύ χρήσιμο, αφού παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο χειρισμού της έννοιας της συμπάγειας, ανάγοντάς την στην έννοια της σύγκλισης ακολουθιών.[12]

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.7. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) Το M είναι συμπαγές.
(ii) Κάθε ακολουθία στο M έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του M.

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω τυχούσα (x_n) στο M.
Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x \in M$ υπάρχει περιοχή $N_x(\epsilon_x)$ του x (το ϵ_x εξαρτάται από το x), η οποία περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n). Η $\Sigma = \{N_x(\epsilon_x) \,|\, x \in M\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M. Άρα υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση της Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n$ ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon_{x_1}) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon_{x_n}).$$

Αφού καθεμιά από αυτές τις περιοχές περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n), η ένωσή τους και, επομένως, και το M, περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n). Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ολόκληρη η (x_n) περιέχεται στο M.
Επομένως, η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, οπότε υπάρχει κάποιο $x_0 \in M$ ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ η $N_{x_0}(\epsilon)$ να περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Άρα η $N_{x_0}(1)$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_1 \geq 1$ ώστε $x_{n_1} \in N_{x_0}(1)$. Ομοίως, η $N_{x_0}(\frac{1}{2})$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε $x_{n_2} \in N_{x_0}(\frac{1}{2})$. Ομοίως, η $N_{x_0}(\frac{1}{3})$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_3 > n_2$ ώστε $x_{n_3} \in N_{x_0}(\frac{1}{3})$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έτσι ώστε να ισχύει $x_{n_k} \in N_{x_0}(\frac{1}{k})$ ή, ισοδύναμα, $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{k}$ για κάθε k. Άρα $x_{n_k} \to x_0$ στον (X, d).
$[ii \Rightarrow i]$. *Βήμα 1.* Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του M ώστε*

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon).$$

Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Διαλέγουμε τυχόν $x_1 \in M$. Τότε $M \nsubseteq N_{x_1}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in M$ με $x_2 \notin N_{x_1}(\epsilon)$. Τότε $M \nsubseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_3 \in M$ με $x_3 \notin N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon)$. Τότε $M \nsubseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon) \cup N_{x_3}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_4 \in M$ με $x_4 \notin N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon) \cup N_{x_3}(\epsilon)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά βλέπουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο M ώστε να ισχύει $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ για κάθε n, m με $n \neq m$. Αυτό, όμως, αποκλείει τη δυνατότητα να υπάρχει υποακολουθία της (x_n) η οποία να συγκλίνει και καταλήγουμε σε άτοπο.

[12]Ουσιαστικά, το Θεώρημα 11.7 διατυπώνει έναν εναλλακτικό ορισμό της έννοιας της συμπάγειας.

ΟΡΙΣΜΟΣ *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Το M χαρακτηρίζεται* **συμπαγές** *αν κάθε ακολουθία στο M έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M.*

Ίσως ο δεύτερος ορισμός της έννοιας της συμπάγειας φαίνεται πιο εύληπτος από τον πρώτο, αφού στο στάδιο αυτό ο αναγνώστης είναι συνήθως πιο εξοικειωμένος με την έννοια της ακολουθίας (και της υποακολουθίας) παρά με την έννοια της ανοικτής κάλυψης. Επιλέγουμε, όμως, τον πρώτο ορισμό διότι στο πλαίσιο των *τοπολογικών χώρων*, το οποίο είναι ευρύτερο από το πλαίσιο των μετρικών χώρων, δεν ισχύει το Θεώρημα 11.7 και, για λόγους που δεν θα μας απασχολήσουν τώρα (αφού δεν θα ασχοληθούμε με τους τοπολογικούς χώρους), ο κατάλληλος ορισμός είναι ο πρώτος, αυτός με τις ανοικτές καλύψεις. Ούτως ή άλλως, η έννοια της ανοικτής κάλυψης, σε σχέση με την έννοια της συμπάγειας, είναι αρκετά χρήσιμη στην Ανάλυση και, επομένως, όποιον ορισμό κι αν επιλέξουμε, το Θεώρημα 11.7 που εξασφαλίζει την ισοδυναμία των δύο ορισμών είναι αναπόφευκτο.

Βήμα 2. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχει* $\epsilon > 0$ *με την ιδιότητα: για κάθε* $x \in M$ *η περιοχή* $N_x(\epsilon)$ *περιέχεται σε κάποιο από τα* $A \in \Sigma$.[13]
Έστω ότι δεν υπάρχει $\epsilon > 0$ με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $x \in M$ ώστε το $N_x(\epsilon)$ να μην περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$. Εφαρμόζουμε με $\epsilon = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε ότι για κάθε n υπάρχει $x_n \in M$ ώστε η περιοχή $N_{x_n}(\frac{1}{n})$ να μην περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$. Υπάρχει, όμως, υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in M$. Το x_0 ανήκει σε κάποιο απο τα $A \in \Sigma$. Έστω $x_0 \in A_0 \in \Sigma$. Αφού το A_0 είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_{x_0}(\delta) \subseteq A_0$. Επιλέγουμε αρκετά μεγάλο n_k ώστε

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2} \text{ και } \frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}.$$

Τότε για κάθε $x \in N_{x_{n_k}}(\frac{1}{n_k})$ ισχύει

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

και, επομένως, $N_{x_{n_k}}(\frac{1}{n_k}) \subseteq N_{x_0}(\delta) \subseteq A_0$ και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι η περιοχή $N_{x_{n_k}}(\frac{1}{n_k})$ δεν πρέπει να περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$.
Βήμα 3. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Τότε, σύμφωνα με το βήμα 2, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in M$ το $N_x(\epsilon)$ να περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$. Σύμφωνα με το βήμα 1, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του M ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \ldots \cup N_{x_n}(\epsilon).$$

Καθένα, όμως, από τα $N_{x_k}(\epsilon)$ περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$. Έστω $N_{x_k}(\epsilon) \subseteq A_k \in \Sigma$. Τότε

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Επομένως, η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M μικρότερη ή ίση της Σ. $\square$

Παράδειγμα 11.6.11. Θεωρούμε το $(a, b]$ στο $\mathbb{R}$ και την ακολουθία (x_n) με $x_n = a + \frac{b-a}{n}$ για κάθε n. Επειδή $x_n \to a$, κάθε υποακολουθία της (x_n) συγκλίνει στο a. Άρα η (x_n) περιέχεται στο $(a, b]$ και δεν έχει καμία υποακολουθία η οποία να συγκλίνει σε στοιχείο του $(a, b]$. Άρα το $(a, b]$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.6.12. Θεωρούμε το $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$ και τυχούσα ακολουθία (x_n) η οποία περιέχεται στο $[a, b]$. Η (x_n) είναι φραγμένη. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano - Weierstrass στο $\mathbb{R}$, η (x_n) έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Επειδή το $[a, b]$ είναι κλειστό και η (x_{n_k}) περιέχεται στο $[a, b]$, συνεπάγεται $x \in [a, b]$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε ακολουθία στο $[a, b]$ έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $[a, b]$ και, επομένως, το $[a, b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.6.13. Θεωρούμε το $[a, +\infty)$ στο $\mathbb{R}$ και την ακολουθία (x_n) με $x_n = a + n$ για κάθε n. Επειδή $x_n \to +\infty$, κάθε υποακολουθία της αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα η (x_n) περιέχεται στο $[a, +\infty)$ και δεν έχει καμία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $[a, +\infty)$. Άρα το $[a, +\infty)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Εν γένει, το να αποδείξουμε ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο M *δεν είναι* συμπαγές είναι σχετικά απλό πρόβλημα: αρκεί να βρούμε *μία συγκεκριμένη* ακολουθία στο M ώστε καμία υποακολουθία της να μη συγκλίνει σε στοιχείο του M. Ενώ το να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο M *είναι* συμπαγές είναι πιο δύσκολο πρόβλημα: πρέπει να θεωρήσουμε *τυχούσα* ακολουθία στο M και να αποδείξουμε ότι έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M. Η δυσκολία είναι φανερή στο παράδειγμα 11.6.12, όπου χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε το δύσκολο θεώρημα Bolzano - Weierstrass στο $\mathbb{R}$.

[13] Ο αριθμός ϵ με την ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αριθμός Lebesgue** της ανοικτής κάλυψης Σ του M.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.23. *Κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι συμπαγές.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω $M = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο M και έστω $\mathrm{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d})$ για κάθε n.
Χωρίζοντας κάθε ακμή $[a_k, b_k]$ στα ισομήκη υποδιαστήματα $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ και $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$, χωρίζουμε το M σε 2^d ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Καθένα από αυτά περιέχεται, φυσικά, στο M και έχει διάμετρο υποδιπλάσια της διαμέτρου του M και μήκη ακμών υποδιπλάσια των μηκών των αντίστοιχων ακμών του M. Τώρα, επειδή ολόκληρη η ακολουθία (x_n) περιέχεται στο M, τουλάχιστον ένα από τα 2^d αυτά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα πρέπει να περιέχει *άπειρους* όρους της (x_n). Παίρνουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε $M_1 = [a_{1,1}, b_{1,1}] \times \cdots \times [a_{1,d}, b_{1,d}]$. Χωρίζοντας κάθε ακμή $[a_{1,k}, b_{1,k}]$ στα $[a_{1,k}, \frac{a_{1,k}+b_{1,k}}{2}]$ και $[\frac{a_{1,k}+b_{1,k}}{2}, b_{1,k}]$, χωρίζουμε το M_1 σε 2^d ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Καθένα από αυτά περιέχεται στο M_1 και έχει διάμετρο υποδιπλάσια της διαμέτρου του M_1 και μήκη ακμών υποδιπλάσια των μηκών των αντίστοιχων ακμών του M_1 και, επειδή άπειροι όροι της (x_n) περιέχονται στο M_1, τουλάχιστον ένα από τα 2^d αυτά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα θα περιέχει, επίσης, άπειρους όρους της (x_n). Παίρνουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε $M_2 = [a_{2,1}, b_{2,1}] \times \cdots \times [a_{2,d}, b_{2,d}]$. Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία επαγωγικά, δημιουργούμε ακολουθία ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων $M_l = [a_{l,1}, b_{l,1}] \times \cdots \times [a_{l,d}, b_{l,d}]$ με τις ιδιότητες:
(i) κάθε M_l περιέχει άπειρους όρους της (x_n).
(ii) $M \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_{l-1} \supseteq M_l \supseteq \ldots$.
(iii) για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει

$$a_k \leq a_{1,k} \leq \ldots \leq a_{l-1,k} \leq a_{l,k} \leq \ldots \leq b_{l,k} \leq b_{l-1,k} \leq \ldots \leq b_{1,k} \leq b_k.$$

(iv) για κάθε $k = 1, \ldots, d$ και κάθε $l \geq 2$ ισχύει

$$b_{l,k} - a_{l,k} = \tfrac{b_{l-1,k}-a_{l-1,k}}{2} = \ldots = \tfrac{b_{1,k}-a_{1,k}}{2^{l-1}} = \tfrac{b_k-a_k}{2^l},$$

οπότε $b_{l,k} - a_{l,k} \to 0$ και
(v) για κάθε $l \geq 2$ ισχύει

$$\operatorname{diam} M_l = \tfrac{\operatorname{diam} M_{l-1}}{2} = \ldots = \tfrac{\operatorname{diam} M_1}{2^{l-1}} = \tfrac{\operatorname{diam} M}{2^l},$$

οπότε $\operatorname{diam} M_l \to 0$.
Επειδή το M_1 περιέχει άπειρους όρους της (x_n) υπάρχει $\mathrm{x}_{n_1} \in M_1$. Επειδή το M_2 περιέχει άπειρους όρους της (x_n) υπάρχει $\mathrm{x}_{n_2} \in M_2$ με $n_2 > n_1$. Επειδή το M_3 περιέχει άπειρους όρους της (x_n) υπάρχει $\mathrm{x}_{n_3} \in M_3$ με $n_3 > n_2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε υποακολουθία (x_{n_l}) της (x_n) ώστε να ισχύει $\mathrm{x}_{n_l} \in M_l$ για κάθε $l \geq 1$. Αυτό γράφεται:

$$a_{l,k} \leq x_{n_l,k} \leq b_{l,k} \qquad \text{για κάθε } \ k = 1, \ldots, d \ \text{ και } \ l \geq 1. \tag{11.19}$$

Από την (iii) συνεπάγεται για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ότι η $(a_{l,k})$ είναι αύξουσα και φραγμένη, η $(b_{l,k})$ είναι φθίνουσα και φραγμένη και, επομένως, οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν σε δύο αντίστοιχα όρια, τα οποία, λόγω της (iv), είναι ο ίδιος αριθμός. Θέτουμε

$$x_k = \lim\nolimits_{l\to+\infty} a_{l,k} = \lim\nolimits_{l\to+\infty} b_{l,k}. \tag{11.20}$$

Από την (11.19) συνεπάγεται

$$x_{n_l,k} \to x_k$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $k = 1, \ldots, d$, συνεπάγεται

$$\mathrm{x}_{n_l} \to \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d).$$

Βλέπουμε, επίσης, ότι $\mathrm{x} \in M_l$ για κάθε $l \geq 1$, διότι, λόγω του (iii) και της (11.20), ισχύει

$$a_{l,k} \leq x_k \leq b_{l,k} \qquad \text{για κάθε } \ k = 1, \ldots, d \ \text{ και } \ l \geq 1.$$

Δηλαδή, το x ανήκει σε κάθε M_l (και, φυσικά, και στο M το οποίο περιέχει όλα τα M_l).
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) στο M έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M, οπότε το M είναι συμπαγές.

Δεύτερη απόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M και υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση της Σ. Όπως και στην πρώτη απόδειξη, χωρίζουμε το M στα ίδια 2^d ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και παρατηρούμε ότι για τουλάχιστον ένα από αυτά δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψή του μικρότερη ή ίση της Σ. Σε αντίθετη περίπτωση, θα είχαμε για καθένα υπο-παραλληλεπίπεδο μια πεπερασμένη κάλυψη μικρότερη ή ίση της Σ, οπότε η ένωσή τους θα ήταν *πεπερασμένη* κάλυψη του M μικρότερη ή ίση της Σ. Επιλέγουμε ένα τέτοιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε M_1. Όπως πριν, χωρίζουμε το M_1 σε 2^d υπο-παραλληλεπίπεδα για ένα τουλάχιστον από τα οποία δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψή του μικρότερη ή ίση της Σ. Επιλέγουμε ένα τέτοιο και το συμβολίζουμε M_2. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία (M_l) ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων με ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες $(ii) - (v)$ όπως και η αντίστοιχη ακολουθία στην πρώτη απόδειξη και με την (i) να έχει αντικατασταθεί από την:
(i') για κάθε l δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη του M_l μικρότερη ή ίση της Σ.
Όπως πριν, υπάρχει μοναδικό $\mathrm{x} \in M$ το οποίο περιέχεται σε όλα τα M_l. Επειδή η Σ είναι κάλυψη του M, υπάρχει κάποιο $A_0 \in \Sigma$ ώστε $\mathrm{x} \in A_0$. Επειδή το A_0 είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε $N_{\mathrm{x}}(\epsilon_0) \subseteq A_0$. Επειδή $\operatorname{diam} M_l \to 0$, υπάρχει l_0 αρκετά μεγάλο ώστε $\operatorname{diam} M_{l_0} < \epsilon_0$. Τότε για κάθε $\mathrm{y} \in M_{l_0}$ (και επειδή $\mathrm{x} \in M_{l_0}$) έχουμε

$$\|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_e \leq \operatorname{diam} M_{l_0} < \epsilon_0$$

και, επομένως, $\mathrm{y} \in N_{\mathrm{x}}(\epsilon_0)$. Άρα $M_{l_0} \subseteq N_{\mathrm{x}}(\epsilon_0) \subseteq A_0$. Αυτό σημαίνει ότι η $\Sigma' = \{A_0\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M_{l_0} μικρότερη ή ίση της Σ και καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Τώρα θα αποδείξουμε το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^d$, το οποίο διατυπώνεται με δύο (ισοδύναμες) μορφές.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ BOLZANO - WEIERSTRASS. [α] *Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}^d$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.*
[β] *Κάθε φραγμένο άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.*

Απόδειξη. [α] Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχει κάποιο κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο M με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες ώστε να ισχύει $\mathrm{x}_n \in M$ για κάθε n. Σύμφωνα με την πρόταση 11.23, το M είναι συμπαγές, οπότε, βάσει του θεωρήματος 11.7, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει (σε στοιχείο του M).
[β] Έστω K τυχόν άπειρο και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επειδή το K είναι άπειρο, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο K με όρους διαφορετικούς ανά δύο. Το K είναι φραγμένο, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με το [α], υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$. Επειδή οι όροι της (x_{n_k}) είναι διαφορετικοί ανά δύο, το πολύ ένας από αυτούς είναι ίσος με x. Άρα η ακολουθία (x_{n_k}) από κάποιον δείκτη και πέρα έχει όλους τους όρους της διαφορετικούς από το x και συγκλίνει στο x. Από την πρόταση 11.12 συνεπάγεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του K. $\square$

Ερχόμαστε, τώρα, σε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο χαρακτηρίζει όλα τα συμπαγή υποσύνολα ενός Ευκλείδιου χώρου. Η αναγνώριση ενός συμπαγούς συνόλου στον Ευκλείδειο χώρο είναι πολύ απλή υπόθεση: *πρέπει και αρκεί να δούμε ότι το σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.8. *Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Το M είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι φραγμένο και κλειστό.*

Πρώτη απόδειξη. Η πρόταση 11.20 αποδεικνύει τη μία κατεύθυνση.
Έστω ότι το M είναι κλειστό και φραγμένο. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο M. Επειδή το M είναι φραγμένο, η (x_n) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, έχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει, δηλαδή, $\mathrm{x}_{n_k} \to \mathrm{x}$ για κάποιο $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$. Επειδή το M είναι κλειστό και η (x_{n_k}) περιέχεται στο M, συνεπάγεται ότι $\mathrm{x} \in M$. Άρα κάθε ακολουθία στο M έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M και, επομένως, από το θεώρημα 11.7 συνεπάγεται ότι το M είναι συμπαγές.
Δεύτερη απόδειξη. Πάλι η πρόταση 11.20 αποδεικνύει τη μία κατεύθυνση.
Επειδή το M είναι φραγμένο, υπάρχει κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο N με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες ώστε $M \subseteq N$. Από την πρόταση 11.23 συνεπάγεται ότι το N είναι συμπαγές και, επειδή το M είναι κλειστό, το M είναι, σύμφωνα με την πρόταση 11.21, συμπαγές. □

Παράδειγμα 11.6.14. Οποιαδήποτε κλειστή μπάλα $\overline{N}_{x_0}(R)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Το θεώρημα 11.8 λέει ότι το αντίστροφο της πρότασης 11.20 ισχύει στο $\mathbb{R}^d$. Δεν είναι, όμως, σωστό ότι ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο.

Παράδειγμα 11.6.15. Σύμφωνα με τα παραδείγματα 11.6.8 και 11.6.10, κάθε άπειρο υποσύνολο ενός άπειρου συνόλου X με την διακριτή μετρική d_δ είναι μεν κλειστό και φραγμένο αλλά δεν είναι συμπαγές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.24. *Κάθε μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό συμπαγές υποσύνολο M του $\mathbb{R}$. Αφού το M είναι μη-κενό και φραγμένο, το M έχει supremum το οποίο είναι αριθμός και θέτουμε $u = \sup M$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in M$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$ και, επομένως, $x \in N_u(\epsilon)$. Άρα το u είναι οριακό σημείο του M και, επειδή το M είναι κλειστό, $u \in M$. Άρα το u είναι το μέγιστο στοιχείο του M. Η απόδειξη είναι ίδια για την ύπαρξη ελαχίστου στοιχείου. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.9. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $M \subseteq X$ και $f : M \to Y$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, τότε το $f(M)$ είναι συμπαγές.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω (y_n) οποιαδήποτε ακολουθία στο $f(M)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η (y_n) έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $f(M)$. Για κάθε n υπάρχει $x_n \in M$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Αφού το M είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M, δηλαδή $x_{n_k} \to x$ για κάποιο $x \in M$. Αφού η f είναι συνεχής στο M, συνεπάγεται $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(M)$.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη T του $f(M)$. Σύμφωνα με το θεώρημα 11.2, για κάθε $B \in T$ υπάρχει ανοικτό $A_B \subseteq X$ ώστε

$$f^{-1}(B) = A_B \cap M. \tag{11.21}$$

Επειδή $f(M) \subseteq \bigcup_{B \in T} B$, συνεπάγεται

$$M \subseteq \bigcup_{B \in T} f^{-1}(B) \subseteq \bigcup_{B \in T} A_B.$$

Επομένως, η συλλογή $\Sigma = \{A_B \,|\, B \in T\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M. Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχουν $B_1, \ldots, B_n \in T$ ώστε

$$M \subseteq A_{B_1} \cup \cdots \cup A_{B_n}.$$

Από αυτήν την σχέση και την (11.21) συνεπάγεται

$$M \subseteq (A_{B_1} \cup \cdots \cup A_{B_n}) \cap M = (A_{B_1} \cap M) \cup \cdots \cup (A_{B_n} \cap M) = f^{-1}(B_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(B_n),$$

οπότε $f(M) \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Άρα η $\{B_1, \ldots, B_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του $f(M)$ μικρότερη ή ίση της T. □

Το θεώρημα 11.10 γενικεύει τα γνωστά θεωρήματα φραγμένης συνάρτησης και μέγιστης - ελάχιστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ στο πλαίσιο του $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.10. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $M \subseteq X$ και $f : M \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, τότε η f είναι φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 11.9 συνεπάγεται ότι το $f(M)$ είναι συμπαγές. Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 11.24, το $f(M)$ είναι φραγμένο και έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο. □

Παράδειγμα 11.6.16. Θα ξαναγυρίσουμε στις περιπτώσεις των μετρικών χώρων $(B(A), d_A)$ και $(BC(A), d_A)$ με την ομοιόμορφη μετρική d_A στο A, όπου A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Υπάρχει και ένα τρίτο σύνολο με στοιχεία συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$, το σύνολο

$$C(A) = \{f \mid \text{η } f : A \to \mathbb{R} \text{ είναι συνεχής}\}.$$

Είναι προφανές ότι

$$BC(A) = B(A) \cap C(A),$$

αλλά δεν μπορούμε να πούμε ότι, γενικά, ένα από τα $B(A), C(A)$ είναι υποσύνολο του άλλου. Ανάλογα με το συγκεκριμένο A μπορεί να υπάρχουν συναρτήσεις φραγμένες στο A αλλά όχι συνεχείς στο A και συναρτήσεις συνεχείς στο A αλλά όχι φραγμένες στο A.
Όμως, *αν το A είναι συμπαγές*, τότε κάθε συνεχής συνάρτηση στο A είναι και φραγμένη στο A, οπότε

$$BC(A) = C(A) \subseteq B(A).$$

Τέλος, θα δούμε την γενίκευση του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Η f χαρακτηρίζεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $d(x', x'') < \delta$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.11. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $M \subseteq X$ και $f : M \to Y$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω ότι η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x', x'' \in M$ για τα οποία ισχύει $d(x', x'') < \delta$ και $\rho(f(x'), f(x'')) \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x'_n, x''_n \in M$ ώστε

$$d(x'_n, x''_n) < \tfrac{1}{n} \ \text{ και } \ \rho(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \epsilon.$$

Το M είναι συμπαγές, οπότε η (x'_n) έχει υποακολουθία (x'_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M, δηλαδή $x'_{n_k} \to x$ για κάποιο $x \in M$. Τότε, όμως,

$$d(x''_{n_k}, x) \leq d(x''_{n_k}, x'_{n_k}) + d(x'_{n_k}, x) < \tfrac{1}{n_k} + d(x'_{n_k}, x) \to 0$$

και, επομένως, $x''_{n_k} \to x$. Λόγω συνέχειας της f στο x, είναι $f(x'_{n_k}) \to f(x)$ και $f(x''_{n_k}) \to f(x)$. Άρα

$$\rho\big(f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k})\big) \leq \rho\big(f(x'_{n_k}), f(x)\big) + \rho\big(f(x), f(x''_{n_k})\big) \to 0.$$

Το τελευταίο αντιφάσκει με το ότι ισχύει $\rho\big(f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k})\big) \geq \epsilon$ για κάθε k.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο M, για κάθε $x \in M$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε να ισχύει

$$\rho(f(y), f(x)) < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } \ y \in M \ \text{ με } \ d(y, x) < \delta_x. \tag{11.22}$$

Τώρα, η συλλογή $\{N_x(\frac{\delta_x}{2}) \mid x \in M\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M και, επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in M$ ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\tfrac{\delta_{x_1}}{2}) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\tfrac{\delta_{x_n}}{2}). \tag{11.23}$$

Θέτουμε

$$\delta = \min\{\tfrac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \tfrac{\delta_{x_n}}{2}\} > 0 \tag{11.24}$$

και παίρνουμε οποιαδήποτε $x', x'' \in M$ με $d(x', x'') < \delta$. Το x' ανήκει στο M, οπότε, βάσει της (11.23), υπάρχει κάποιο $k = 1, \ldots, n$ ώστε $x' \in N_{x_k}(\frac{\delta_{x_k}}{2})$ και, επομένως,

$$d(x', x_k) < \tfrac{\delta_{x_k}}{2} < \delta_{x_k}. \tag{11.25}$$

Από τις (11.24) και (11.25) συνεπάγεται

$$d(x'', x_k) \leq d(x'', x') + d(x', x_k) < \delta + \tfrac{\delta_{x_k}}{2} \leq \delta_{x_k}. \tag{11.26}$$

Από τις (11.25), (11.26) και (11.22) συνεπάγεται $\rho(f(x'), f(x_k)) < \frac{\epsilon}{2}$ και $\rho(f(x''), f(x_k)) < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leq \rho(f(x'), f(x_k)) + \rho(f(x''), f(x_k)) < \epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $x', x'' \in M$ με $d(x', x'') < \delta$ ισχύει $\rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M. $\square$

Ασκήσεις.

11.6.1. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ότι το $\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq x_3 \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

11.6.2. Θεωρήστε το $(0, 1)$ στο $\mathbb{R}$ και τα σύνολα $A_x = (\frac{x}{2}, \frac{1+x}{2})$ για $0 < x < 1$. Αποδείξτε ότι η $\Sigma = \{A_x \,|\, 0 < x < 1\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$ και ότι δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του $(0, 1)$ μικρότερη ή ίση της Σ.
Θεωρήστε το $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$ και τα $A_x = (\frac{x}{2}, \frac{1+x}{2})$ για $0 < x < 1$. Έστω I και J δυο ανοικτά διαστήματα με $0 \in I$ και $1 \in J$. Αποδείξτε ότι η $\Sigma = \{I, J\} \cup \{A_x \,|\, 0 < x < 1\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $[0, 1]$ και ότι υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του $[0, 1]$ μικρότερη ή ίση της Σ. Μη χρησιμοποιήσετε ότι το $[0, 1]$ είναι συμπαγές.

11.6.3. Υπολογίστε τη διάμετρο στον $\mathbb{R}^d$ κάθε ανοικτής και κάθε κλειστής μπάλας και κάθε ανοικτού και κάθε κλειστού παραλληλεπιπέδου με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες.

11.6.4. Υπολογίστε τη διάμετρο του X στον (X, d_δ), όπου d_δ είναι η διακριτή μετρική στο μη-κενό X, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις: (i) το X είναι μονοσύνολο και (ii) το X περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία. Στη δεύτερη περίπτωση πάρτε οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και υπολογίστε τη διάμετρο της κλειστής περιοχής $\overline{N}_{x_0}(1)$. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με τον "κανόνα" *διάμετρος = δύο φορές η ακτίνα*;

11.6.5. Δείτε την άσκηση 11.1.3. Έστω $1 \leq p < q \leq +\infty$ και $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το M είναι φραγμένο στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^d, d_p)$ αν και μόνο αν είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}^d, d_q)$.

11.6.6. Η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$, ορισμένη στο σύνολο $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1\}$ έχει, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.10, μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Μπορείτε να τις υπολογίσετε;

11.6.7. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με $f(\mathrm{x}) \to 0$ καθώς $\|\mathrm{x}\|_2 \to +\infty$. Αυτό σημαίνει, εξ ορισμού, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $R > 0$ ώστε να ισχύει $|f(\mathrm{x})| < \epsilon$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathrm{x}\|_2 > R$.
Αν υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε $f(\mathrm{x}_0) \geq 0$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή.
Αν υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε $f(\mathrm{x}_0) \leq 0$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή.
Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x_1, x_2) = x_1 e^{-{x_1}^2 - {x_2}^2}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή και υπολογίστε τις τιμές αυτές.

11.6.8. Έστω μετρικός χώρος (X, d).

Αποδείξτε ότι το $\emptyset$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

11.6.9. Έστω μετρικός χώρος (X, d), ακολουθία (x_n) στο X, $x \in X$ ώστε να ισχύει $x_n \neq x$ για κάθε n και $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι το $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι συμπαγές ενώ το $\{x\} \cup \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

11.6.10. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M, M_1, \ldots, M_n \subseteq X$.

Αν τα $M_1, \ldots, M_n$ είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ είναι συμπαγές.

Βρείτε συμπαγή υποσύνολα $M_1, M_2, \ldots$ του $\mathbb{R}$ ώστε το $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n$ να μην είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

11.6.11. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το M είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\operatorname{diam} M < +\infty$.

11.6.12. Έστω μετρικός χώρος (X, d).

Αποδείξτε ότι το $\emptyset$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X.

Αν $M, N \subseteq X$ και τα M και N είναι φραγμένα, αποδείξτε ότι το $M \cup N$ είναι φραγμένο.

11.6.13. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $M \subseteq X$ και $x_0', x_0'' \in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει R' ώστε $M \subseteq N_{x_0'}(R')$ αν και μόνον αν υπάρχει R'' ώστε $M \subseteq N_{x_0''}(R'')$.

11.6.14. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη μετρική d που ορίζεται με τον τύπο $d(x, y) = \frac{|x-y|}{|x-y|+1}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με την άσκηση 11.2.25[β], η d και η Ευκλείδια μετρική είναι ισοδύναμες.

Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο με την μετρική d ενώ δεν είναι φραγμένο με την Ευκλείδια μετρική. Υπολογίστε τη διάμετρο του $\mathbb{R}$ με τη μετρική d και τη διάμετρο του $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδια μετρική.

11.6.15. Έστω μετρικός χώρος (X, d).

Αν $\emptyset \neq N \subseteq M \subseteq X$, αποδείξτε ότι $\operatorname{diam} N \leq \operatorname{diam} M$.

Αν $\emptyset \neq M, N \subseteq X$ και $M \cap N \neq \emptyset$, αποδείξτε ότι $\operatorname{diam}(M \cup N) \leq \operatorname{diam} M + \operatorname{diam} N$.

11.6.16. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\operatorname{diam} M = \operatorname{diam} \overline{M}$.

11.6.17. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$. Αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, αποδείξτε ότι το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

11.6.18. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x_0 \in X$ και μη-κενά M και N συμπαγή υποσύνολα του X.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x', y' \in M$ ώστε $d(x', y') = \operatorname{diam} M$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x' \in M$ ώστε $d(x_0, x') = \inf\{d(x_0, x) \,|\, x \in M\}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x' \in M$ και $y' \in N$ ώστε $d(x', y') = \inf\{d(x, y) \,|\, x \in M, y \in N\}$.

11.6.19. Έστω $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, μη-κενό κλειστό υποσύνολο M του $\mathbb{R}^d$ και μη-κενό συμπαγές υποσύνολο N του $\mathbb{R}^d$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathrm{x}' \in M$ ώστε $\|\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}'\|_2 = \inf\{\|\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}\|_2 \,|\, \mathrm{x} \in M\}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\mathrm{x}' \in M$ και $\mathrm{y}' \in N$ ώστε $\|\mathrm{x}' - \mathrm{y}'\|_2 = \inf\{\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2 \,|\, \mathrm{x} \in M, \mathrm{y} \in N\}$.

11.6.20. Έστω φραγμένο υποσύνολο M του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι τα $\overline{M}$, M' και ∂M είναι συμπαγή.

11.6.21. Φτιάξτε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με άπειρου αριθμήσιμου πλήθους σημεία συσσώρευσης.

11.6.22. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ και $f : M \to N$ η οποία είναι ένα-προς-ένα και επί. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι η αντίστροφη $f^{-1} : N \to M$ είναι συνεχής στο N.

11.6.23. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Το $G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **γράφημα** της f.

Έστω ότι η f είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι, αν το G_f είναι κλειστό, τότε η f είναι συνεχής.

Έστω ότι το A είναι κλειστό. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής, τότε το G_f είναι κλειστό.

Έστω ότι το A είναι συμπαγές. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνον αν το G_f είναι συμπαγές.

11.6.24. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $B \subseteq A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο B.

11.6.25. Έστω μετρικοί χώροι (X, d), (Y, ρ) και (Z, τ), $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $f : A \to B$ και $g : B \to Z$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχης στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to Z$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

11.6.26. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές και ότι η f είναι συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Υπάρχει συνεχής επέκταση της f στο $\overline{A}$, δηλαδή συνάρτηση $F : \overline{A} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\overline{A}$ ώστε να ισχύει $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

(ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

11.6.27. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμο $A \subseteq M$ ώστε $M \subseteq \overline{A}$.

11.6.28. [14] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$.

Το M χαρακτηρίζεται **ολικά φραγμένο** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία του X ώστε κάθε άλλο σημείο του X να έχει απόσταση μικρότερη από ϵ από τουλάχιστον ένα από αυτά.

Αποδείξτε ότι το M είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι πλήρες και ολικά φραγμένο.

11.6.29. [15] Δείτε τις ασκήσεις 11.1.6 και 11.2.26. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d) αν και μόνο αν το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (M, d).

11.6.30. Έστω μετρικός χώρος (X, d).

[α] Θεωρούμε το σύνολο

$$Z_b = \{A \,|\, A \text{ μη-κενό και φραγμένο υποσύνολο του } X\}.$$

Για κάθε $A, B \in Z_b$ ορίζουμε το

$$\widetilde{d}(A, B) = \inf\big\{\mu \in \mathbb{R} \,|\, A \subseteq \textstyle\bigcup_{b \in B} N_b(\mu) \text{ και } B \subseteq \textstyle\bigcup_{a \in A} N_a(\mu)\big\}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο του οποίου το infimum ορίζει το $\widetilde{d}(A, B)$ είναι μη-κενό με κάτω φράγμα το 0 και, επομένως, $0 \leq \widetilde{d}(A, B) < +\infty$.

Αποδείξτε ότι η $\widetilde{d}$ είναι **ψευδομετρική** στο Z_b. Δηλαδή, ότι ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μιας μετρικής εκτός της (ii), η οποία αντικαθίσταται από την: *για κάθε $A \in Z_b$ ισχύει $\widetilde{d}(A, A) = 0$.*

Αποδείξτε ότι για κάθε $A, B \in Z_b$ ισχύει $\widetilde{d}(A, B) = 0$ αν και μόνο αν $\overline{A} = \overline{B}$.

[β] Έστω

$$Z_{bc} = \{A \,|\, A \text{ μη-κενό, φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του } X\}.$$

[14] Μια πολύ σημαντική άσκηση. Όπως στο θεώρημα 11.7, ένας ακόμη χαρακτηρισμός της έννοιας της συμπάγειας με βάση, τώρα, την έννοια της πληρότητας.

[15] Η άσκηση αυτή μας λέει ότι το να είναι ή να μην είναι το σύνολο M συμπαγές εξαρτάται μόνο από το ίδιο το σύνολο M (και την μετρική του) και όχι από τον περιβάλλοντα χώρο.

Για κάθε $A, B \in Z_{bc}$ ορίζουμε με τον ίδιο τύπο το $\widetilde{d}(A, B)$.
Αποδείξτε ότι η $\widetilde{d}$ είναι μετρική στο Z_{bc}. Η $\widetilde{d}$ ονομάζεται **μετρική Hausdorff** στον χώρο Z_{bc} των μη-κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, d).
Τώρα, ως (X, d) θεωρούμε τον $\mathbb{R}^d$ με την Ευκλείδια μετρική. Έστω ακολουθία (A_n) μη-κενών, κλειστών και φραγμένων (δηλαδή, συμπαγών) υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ και έστω $\widetilde{d}(A_n, A) \to 0$, όπου το A είναι, επίσης, μη-κενό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι, αν όλα τα A_n είναι κυρτά, τότε και το A είναι κυρτό.
Προσπαθήστε να δείτε τί σημαίνει γεωμετρικά η σχέση $\widetilde{d}(A, B) \leq \epsilon$ ανάμεσα σε δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$.

11.7 Συνεκτικότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Λέμε ότι τα B, C αποτελούν* **διάσπαση** *του A αν (i) $B \cup C = A$, (ii) $B \cap C = \emptyset$, (iii) $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, (iv) κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.*

Όταν ισχύουν τα (i), (ii), (iii), λέμε ότι τα B, C αποτελούν *διαμέριση* του A.

Παράδειγμα 11.7.1. Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τους κλειστούς δίσκους $B = \overline{N_0}(1)$, $C = \overline{N_3}(1)$ και την ένωση $A = B \cup C$. Είναι σαφές ότι τα B, C αποτελούν διάσπαση του A.
Αν θεωρήσουμε τους ανοικτούς δίσκους $B = N_0(1)$, $C = N_2(1)$ και το $A = B \cup C$, τότε οι δίσκοι B, C εφάπτονται αλλά, και πάλι, αποτελούν διάσπαση του A.
Αν θεωρήσουμε τον κλειστό δίσκο $B = \overline{N_0}(1)$, τον ανοικτό δίσκο $C = N_2(1)$ και το $A = B \cup C$, τότε οι δίσκοι B, C εφάπτονται αλλά *δεν* αποτελούν διάσπαση του A: το B περιέχει το σημείο 1 το οποίο είναι οριακό σημείο του C.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το σύνολο A χαρακτηρίζεται* **συνεκτικό** *αν δεν υπάρχει καμιά διάσπασή του, δηλαδή αν δεν υπάρχει κανένα ζευγάρι συνόλων B, C με τις ιδιότητες (i) - (iv) του παραπάνω ορισμού*

Παράδειγμα 11.7.2. Τα πρώτα δύο σύνολα A του παραδείγματος 11.7.1 είναι μη-συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ διότι για το καθένα υπάρχει συγκεκριμένη διάσπαση.
Δεν μπορούμε, όμως, να αποφασίσουμε αυτή τη στιγμή αν το τρίτο σύνολο A του παραδείγματος 11.7.1 είναι συνεκτικό ή όχι. Γνωρίζουμε ότι τα συγκεκριμένα B, C που σχετίζονται με το συγκεκριμένο A δεν αποτελούν διάσπαση του A. *Όμως, για να είναι αποφασίσουμε ότι το A είναι συνεκτικό πρέπει να αποδείξουμε ότι, όχι μόνο το συγκεκριμένο ζευγάρι, αλλά ότι ένα οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων δεν αποτελεί διάσπαση του A.*

Παράδειγμα 11.7.3. Είναι προφανές ότι το $\emptyset$ αλλά και κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Τα σύνολα αυτά δεν έχουν καν διαμέριση αφού για να επιδέχεται ένα σύνολο διαμέριση πρέπει να έχει τουλάχιστον δυο στοιχεία.

ΛΗΜΜΑ 11.2. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B, C \subseteq X$ με $B \cap C = \emptyset$ και έστω ότι κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq B \cup C$, τότε είτε $A \subseteq B$ είτε $A \subseteq C$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε
$$B_1 = A \cap B, \qquad C_1 = A \cap C.$$
Προφανώς, είναι $B_1 \cup C_1 = A$ και $B_1 \cap C_1 = \emptyset$.
Τώρα, έστω $x \in B_1$. Τότε $x \in B$, οπότε το x δεν είναι οριακό σημείο του C. Άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε το C να μην τέμνει την περιοχή $N_x(r)$ και τότε, επειδή $C_1 \subseteq C$, ούτε το C_1 τέμνει την $N_x(r)$. Άρα το x δεν είναι οριακό σημείο ούτε του C_1. Καταλήγουμε στο ότι το B_1 δεν περιέχει οριακό σημείο του C_1. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το C_1 δεν περιέχει οριακό σημείο του B_1.

Αν ήταν $B_1 \neq \emptyset$ και $C_1 \neq \emptyset$, τότε τα B_1, C_1 θα αποτελούσαν διάσπαση του A αλλά αυτό είναι αδύνατο, αφού το A είναι συνεκτικό. Άρα είτε $B_1 = \emptyset$ είτε $C_1 = \emptyset$ και, επομένως, είτε $A \subseteq C$ είτε $A \subseteq B$, αντιστοίχως. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.25. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μια συλλογή Σ συνεκτικών υποσυνόλων του X και έστω ότι όλα τα σύνολα της συλλογής Σ έχουν ένα κοινό σημείο. Τότε η ένωση $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ είναι συνεκτική.*

Απόδειξη. Θέτουμε $U = \bigcup_{A\in\Sigma} A$ και θα αποδείξουμε ότι το U είναι συνεκτικό.
Ονομάζουμε, επίσης, x_0 το κοινό σημείο όλων των $A \in \Sigma$.
Έστω ότι το U δεν είναι συνεκτικό, οπότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = U$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Προφανώς, ισχύει $x_0 \in U$, οπότε $x_0 \in B$ ή $x_0 \in C$. Ας υποθέσουμε ότι $x_0 \in B$ (η απόδειξη είναι ίδια αν $x_0 \in C$).
Για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει $A \subseteq U$ και, επομένως, $A \subseteq B \cup C$. Σύμφωνα με το Λήμμα 11.2, κάθε σύνολο $A \in \Sigma$ περιέχεται είτε στο B είτε στο C. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται: αν ένα $A \in \Sigma$ περιείχετο στο C, δεν θα μπορούσε να περιέχει το κοινό σημείο x_0 το οποίο βρίσκεται στο B. Άρα, λοιπόν, κάθε $A \in \Sigma$ περιέχεται στο B. Άρα και η ένωση $U = \bigcup_{A\in\Sigma} A$ περιέχεται στο B. Δηλαδή $U \subseteq B$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι το C είναι μη-κενό υποσύνολο του U.
Άρα το U είναι συνεκτικό. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.26. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq D \subseteq \overline{A}$, τότε και το D είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το D δεν είναι συνεκτικό, οπότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = D$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Επειδή $A \subseteq D$, συνεπάγεται $A \subseteq B \cup C$. Επειδή το A είναι συνεκτικό, από το Λήμμα 11.2 συνεπάγεται $A \subseteq B$ ή $A \subseteq C$. Έστω $A \subseteq B$. (Η απόδειξη είναι ίδια αν $A \subseteq C$.)
Επειδή $D \subseteq \overline{A}$, κάθε σημείο του D είναι οριακό σημείο του A και, επομένως, οριακό σημείο και του B (αφού $A \subseteq B$). Άρα κανένα σημείο του D δεν ανήκει στο C (αφού το C δεν περιέχει οριακά σημεία του B). Αυτό είναι άτοπο διότι το C είναι μη-κενό υποσύνολο του D.
Άρα το D είναι συνεκτικό. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.12. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d), (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό.
Τότε υπάρχουν σύνολα B', C' ώστε $B' \cup C' = f(A)$, $B' \cap C' = \emptyset$, $B' \neq \emptyset$, $C' \neq \emptyset$ και κανένα από τα B', C' δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες των B', C' μέσα στο A, δηλαδή τα σύνολα

$$B = f^{-1}(B') = \{x \in A \,|\, f(x) \in B'\}, \qquad C = f^{-1}(C') = \{x \in A \,|\, f(x) \in C'\}.$$

Είναι φανερό ότι ισχύει $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$.
Τώρα, έστω ότι το B περιέχει οριακό σημείο του C, δηλαδή έστω $b \in B$ και b οριακό σημείο του C. Τότε υπάρχει ακολουθία (c_n) στο C ώστε $c_n \to b$. Επειδή η f είναι συνεχής στο b, συνεπάγεται $f(c_n) \to f(b)$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(f(c_n))$ είναι στο C' και, επομένως, το $f(b)$ είναι οριακό σημείο του C'. Όμως, $f(b) \in B'$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι το B' δεν περιέχει οριακό σημείο του C'. Άρα το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.
Τελείως συμμετρικά αποδεικνύεται ότι το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.
Άρα τα B, C αποτελούν διάσπαση του A. Αυτό είναι άτοπο διότι το A είναι συνεκτικό. Άρα το $f(A)$ είναι συνεκτικό. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x, y \in X$ και $r > 0$. Κάθε σύνολο $\{z_0, \dots, z_n\} \subseteq X$ με $z_0 = x$, $z_n = y$ και $d(z_k, z_{k-1}) < r$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ χαρακτηρίζεται* r-**αλληλουχία σημείων** *που συνδέει τα x, y. Αν, επιπλέον, ισχύει $z_k \in A$ για κάθε $k = 0, \dots, n$, τότε λέμε ότι η r-αλληλουχία σημείων είναι στο A.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.13. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και συμπαγές υποσύνολο K του X. Το K είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in K$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K η οποία συνδέει τα x, y.*

Απόδειξη. Έστω ότι το K είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε οποιαδήποτε $x, y \in K$ και οποιονδήποτε $r > 0$ και (για να καταλήξουμε σε άτοπο) υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα x, y.
Ορίζουμε τα σύνολα

$$B = \{b \in K \,|\, \text{υπάρχει } r\text{-αλληλουχία σημείων στο } K \text{ που συνδέει τα } x, b\},$$

$$C = \{c \in K \,|\, \text{δεν υπάρχει } r\text{-αλληλουχία σημείων στο } K \text{ που συνδέει τα } x, c\}.$$

Είναι φανερό ότι $B \cup C = K$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (διότι $x \in B$) και $C \neq \emptyset$ (διότι $y \in C$).
Ας υποθέσουμε ότι το B περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω b, του C. Τότε (επειδή $b \in B$) υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα x, b και, επίσης, (επειδή το b είναι οριακό σημείο του C) υπάρχει $c \in C$ ώστε $d(c, b) < r$. Αν στην r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο σημείο μετά το b) το c, τότε προκύπτει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.*
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το C περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω c, του B. Τότε (επειδή το c είναι οριακό σημείο του B) υπάρχει $b \in B$ ώστε $d(c, b) < r$ και (επειδή $b \in B$) υπάρχει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, b. Αν στην r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο σημείο μετά το b) το c, τότε προκύπτει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.*
Άρα τα B, C αποτελούν διάσπαση του K και αυτό είναι άτοπο διότι το K είναι συνεκτικό.
Άρα υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα x, y.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $x, y \in K$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K η οποία συνδέει τα x, y.
Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι το K δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = K$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Έστω x οριακό σημείο του B. Επειδή $B \subseteq K$, το x είναι οριακό σημείο και του K. Επειδή το K είναι κλειστό, συνεπάγεται $x \in K$. Επειδή $x \notin C$ (διότι το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B) συνεπάγεται $x \in B$. Άρα το B περιέχει όλα τα οριακά σημεία του και, επομένως, είναι κλειστό. Τέλος, επειδή $B \subseteq K$ και το K είναι συμπαγές, συνεπάγεται ότι και το B είναι συμπαγές.
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι και το C είναι συμπαγές.
Συμπεραίνουμε ότι τα B, C είναι συμπαγή και ξένα, οπότε, από την Πρόταση 11.22, υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $d(b, c) \geq r$ για κάθε $b \in B$ και $c \in C$. Αφού $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, θεωρούμε κάποιο $b' \in B$ και κάποιο $c' \in C$. Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που να συνδέει τα b', c', οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει r-αλληλουχία $\{z_0, \dots, z_n\}$ σημείων στο K ώστε $z_0 = b'$, $z_n = c'$ και $d(z_k, z_{k-1}) < r$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Επειδή $z_0 \in B$, $z_n \in C$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος k ώστε $z_{k-1} \in B$, $z_k \in C$. Τότε το $d(z_k, z_{k-1}) < r$ αντιφάσκει με το ότι ισχύει $d(b, c) \geq r$ για κάθε $b \in B$, $c \in C$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.27. *Ένα σύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω ότι το I είναι συνεκτικό. Αν το I δεν είναι διάστημα, υπάρχουν, σύμφωνα με την πρόταση 1.4, x_1, x_2, x ώστε $x_1 < x < x_2$ και $x_1, x_2 \in I$ και $x \notin I$. Τότε τα σύνολα $B = I \cap (-\infty, x)$ και $C = I \cap (x, +\infty)$ αποτελούν διάσπαση του I και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το I είναι διάστημα.

Αντιστρόφως, έστω ότι το I είναι διάστημα.

Αν το I είναι μονοσύνολο, τότε είναι συνεκτικό.

Αν $I = [a, b]$ με $a < b$, τότε το $[a, b]$ είναι συμπαγές και αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε σημεία x, y του $[a, b]$ και έναν οποιονδήποτε $r > 0$, είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε πεπερασμένου πλήθους διαδοχικά σημεία πάνω στο $[a, b]$, ξεκινώντας από το x και καταλήγοντας στο y, ώστε καθένα από αυτά να απέχει από τα γειτονικά του απόσταση $< r$. (Όσο μικρότερος είναι ο r τόσο περισσότερα σημεία πρέπει να πάρουμε.) Άρα το $[a, b]$ είναι συνεκτικό.

Αν το I είναι διάστημα οποιουδήποτε άλλου τύπου, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ τα οποία να αυξάνονται και η ένωσή τους να είναι το διάστημα I. Κάθε I_n είναι συνεκτικό, οπότε από την πρόταση 11.25 συνεπάγεται ότι το διάστημα I είναι κι αυτό συνεκτικό. □

Τώρα έχουμε το εξής πόρισμα του Θεωρήματος 11.12.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.28. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε η f έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο A.*

Απόδειξη. Το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και, επομένως, είναι διάστημα. Έστω, τώρα, ότι οι αριθμοί u_1, u_2 είναι τιμές της f στο A, δηλαδή οι u_1, u_2 ανήκουν στο διάστημα $f(A)$. Τότε κάθε αριθμός u με $u_1 < u < u_2$ ανήκει κι αυτός στο διάστημα $f(A)$. Δηλαδή, κάθε αριθμός ενδιάμεσος των τιμών u_1, u_2 της f στο A είναι τιμή της f στο A. □

Ειδική περίπτωση της πρότασης 11.28 είναι το γνωστό μας *θεώρημα ενδιάμεσης τιμής* που λέει ότι, *αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $I \subseteq R$, τότε έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο I.* Πράγματι, στην περίπτωση αυτή το διάστημα I είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση $\gamma : I \to X$ συνεχής στο I. Η γ χαρακτηρίζεται* **καμπύλη** *στον (X, d). Το σύνολο $\gamma^* = \gamma(I) = \{\gamma(t) \,|\, t \in I\}$ ονομάζεται* **τροχιά** *της καμπύλης γ.*

Αν $\gamma^* \subseteq A \subseteq X$, τότε λέμε ότι η καμπύλη είναι στο A.

Παράδειγμα 11.7.4. Από την πρόταση 11.27 και από το θεώρημα 11.12 συνεπάγεται ότι η τροχιά κάθε καμπύλης στον μετρικό χώρο (X, d) είναι συνεκτικό υποσύνολο του X. Επίσης, αν το διάστημα I (το πεδίο ορισμού της καμπύλης) είναι κλειστό και φραγμένο (και, επομένως, συμπαγές) υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε από το θεώρημα 11.9 συνεπάγεται ότι η τροχιά της καμπύλης είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

Για παράδειγμα, κάθε πολυγωνική γραμμή στο $\mathbb{R}^d$ είναι συνεκτικό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επίσης, κάθε τόξο κύκλου στο $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και, αν το τόξο περιέχει τα άκρα του, τότε είναι και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται* **κατά καμπύλες συνεκτικό** *αν για κάθε δυο σημεία του A υπάρχει καμπύλη στο A η οποία συνδέει τα δυο αυτά σημεία.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.29. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αν το A είναι κατά καμπύλες συνεκτικό, τότε είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in A$.

Για κάθε $x \in A$ υπάρχει καμπύλη γ_x στο A η οποία συνδέει το x_0 με το x. Δηλαδή, ${\gamma_x}^* \subseteq A$ και $x_0, x \in {\gamma_x}^*$. Τότε, κατ' αρχάς, $\bigcup_{x \in A} {\gamma_x}^* \subseteq A$. Αντιστρόφως, επειδή κάθε $x \in A$ περιέχεται στην

αντίστοιχη τροχιά ${\gamma_x}^*$ και, επομένως, και στην ένωσή τους, συνεπάγεται ότι $A \subseteq \bigcup_{x\in A} {\gamma_x}^*$.
Άρα

$$A = \bigcup_{x\in A} {\gamma_x}^*.$$

Τώρα, επειδή κάθε ${\gamma_x}^*$ είναι συνεκτικό και επειδή όλα τα ${\gamma_x}^*$ έχουν κοινό σημείο το x_0, συνεπάγεται ότι το A είναι συνεκτικό. $\square$

Παράδειγμα 11.7.5. Κάθε κυρτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κατά καμπύλες συνεκτικό και, επομένως, συνεκτικό. Πράγματι, αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε σημεία του A το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει περιέχεται ολόκληρο στο A.
Για παράδειγμα, κάθε μπάλα και κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Παράδειγμα 11.7.6. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται **αστρόμορφο** αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο σημείο $\mathrm{x}_0 \in A$ ώστε για κάθε $\mathrm{x} \in A$ το ευθ. τμήμα $[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}]$ να περιέχεται ολόκληρο στο A. Ένα τέτοιο x_0 χαρακτηρίζεται *κέντρο* του αστρόμορφου A. Το κέντρο μπορεί να μην είναι μοναδικό, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε σημείο του αστρόμορφου A είναι κέντρο του.
Είναι φανερό ότι ένα αστρόμορφο A είναι κατά καμπύλες συνεκτικό και, επομένως, συνεκτικό.
Πράγματι, δυο οποιαδήποτε σημεία του A μπορούν να συνδεθούν με μια πολυγωνική γραμμή στο A η οποία αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα: ένα ευθ. τμήμα από το ένα σημείο στο x_0 και ένα ευθ. τμήμα από το x_0 στο άλλο σημείο.

Παράδειγμα 11.7.7. Κάθε δακτύλιος είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 11.7.8. Το $A = \overline{N_0}(1) \cup N_2(1)$ που είδαμε στα παραδείγματα 11.7.1 και 11.7.2 είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, διότι είναι αστρόμορφο με κέντρο το σημείο 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.14. *Έστω ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$. Το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι κατά καμπύλες συνεκτικό.*

Απόδειξη. Αν το A είναι κατά καμπύλες συνεκτικό, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 11.29, είναι συνεκτικό.
Αντιστρόφως, έστω ότι το A είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε οποιαδήποτε $x, y \in A$ και (για να καταλήξουμε σε άτοπο) υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα x, y.
Ορίζουμε τα σύνολα

$$B = \{b \in A \,|\, \text{υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο } A \text{ που συνδέει τα } x, b\},$$

$$C = \{c \in A \,|\, \text{δεν υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο } A \text{ που συνδέει τα } x, c\}.$$

Είναι φανερό ότι $B \cup C = U$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (διότι $x \in B$) και $C \neq \emptyset$ (διότι $y \in C$).
Υποθέτουμε ότι το B περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω b, του C. Τότε (επειδή $b \in B$) υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα x, b. Επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_b(r) \subseteq A$ και (επειδή το b είναι οριακό σημείο του C) υπάρχει $c \in N_b(r) \cap C$. Αν στην πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο) το ευθ. τμήμα $[b, c]$ (το οποίο περιέχεται στην περιοχή $N_b(r)$, οπότε και στο A), προκύπτει πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.*
Υποθέτουμε, τώρα, ότι το C περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω c, του B. Επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_c(r) \subseteq A$. Τότε (επειδή το c είναι οριακό σημείο του B) υπάρχει $b \in N_c(r) \cap B$. Όπως πριν, (επειδή $b \in B$) υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, b και, αν σ' αυτήν επισυνάψουμε (ως τελευταίο) το ευθ. τμήμα $[b, c]$ (το οποίο περιέχεται στην περιοχή $N_c(r)$, οπότε και στο A), προκύπτει πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.*

Από τις ιδιότητες των B, C προκύπτει ότι αυτά αποτελούν διάσπαση του A και αυτό είναι άτοπο διότι το A είναι συνεκτικό.
Άρα υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, y. Όμως, μια πολυγωνική γραμμή είναι, προφανώς, τροχιά κάποιας καμπύλης. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Ένα $C \subseteq A$ χαρακτηρίζεται* **συνεκτική συνιστώσα** *του A αν το C είναι συνεκτικό με την εξής ιδιότητα: αν $C \subseteq C' \subseteq A$ και το C' είναι συνεκτικό, τότε $C = C'$.*

Με άλλα λόγια, το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A αν *είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και δεν υπάρχει γνησίως μεγαλύτερο συνεκτικό υποσύνολο του A.*

Ας δούμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα των συνεκτικών συνιστωσών. Έστω ότι το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A και έστω B οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A ώστε $C \cap B \neq \emptyset$. Τότε το $C \cup B$ είναι συνεκτικό σύνολο, ως ένωση συνεκτικών συνόλων με κοινό σημείο, και είναι $C \subseteq C \cup B \subseteq A$. Επειδή το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A, συνεπάγεται $C \cup B = C$ και, επομένως, $B \subseteq C$. Με άλλα λόγια:

Μια συνεκτική συνιστώσα του A "καταπίνει" οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A την τέμνει.

Έστω C_1, C_2 δυο *διαφορετικές* συνεκτικές συνιστώσες του A και ας υποθέσουμε ότι $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Επειδή το C_1 είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και τέμνει την συνεκτική συνιστώσα C_2 του A, συνεπάγεται $C_1 \subseteq C_2$. Με συμμετρικό τρόπο συνεπάγεται $C_2 \subseteq C_1$ και, επομένως, $C_1 = C_2$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι:

Διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του A είναι ξένες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.30. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A είναι ίσο με την ένωση των (ξένων ανά δύο) συνεκτικών συνιστωσών του.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο του A ανήκει σε μια συνεκτική συνιστώσα του A.
Παίρνουμε $x \in A$ και ορίζουμε C_x να είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων B του A που περιέχουν το x. (Ένα τέτοιο σύνολο είναι το μονοσύνολο $\{x\}$.) Δηλαδή

$$C_x = \bigcup \{B \mid B \text{ συνεκτικό } \subseteq A \text{ και } x \in B\}.$$

Το C_x είναι υποσύνολο του A, αφού είναι ένωση υποσυνόλων B του A. Το C_x περιέχει το x και είναι συνεκτικό, διότι είναι ένωση συνεκτικών συνόλων B με κοινό σημείο το x.
Τώρα, αν $C_x \subseteq C' \subseteq A$ και το C' είναι συνεκτικό σύνολο, τότε το C' είναι ένα από τα συνεκτικά υποσύνολα B του A που περιέχουν το x, οπότε από τον ορισμό του C_x συνεπάγεται $C' \subseteq C_x$ και, επομένως, $C_x = C'$.
Άρα το C_x είναι συνεκτική συνιστώσα του A και περιέχει το x. □

Είναι προφανές ότι το σύνολο A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το A είναι η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του A.

Παράδειγμα 11.7.9. Έστω $A = N_0(1) \cup N_3(1)$ στο $\mathbb{R}^2$.
Οι δίσκοι $N_0(1)$ και $N_3(1)$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του A.
Εφαρμόζοντας το Λήμμα 11.2 με $B = N_0(1)$ και $C = N_3(1)$, βλέπουμε ότι οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A περιέχεται είτε ολόκληρο στο $N_0(1)$ είτε ολόκληρο στο $N_3(1)$. Δηλαδή, δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του A γνησίως μεγαλύτερο είτε του $N_0(1)$ είτε του $N_3(1)$.
Άρα οι δίσκοι $N_0(1)$ και $N_3(1)$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του A.

Παράδειγμα 11.7.10. Θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbb{Z}$ του $\mathbb{R}$ και οποιοδήποτε μονοσύνολο $\{n\}$ με $n \in \mathbb{Z}$.
Το $\{n\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Έστω $\{n\} \subseteq C' \subseteq \mathbb{Z}$ και $C' \neq \{n\}$. Τότε $C' = \{n\} \cup \big(C' \setminus \{n\}\big)$. Τα $\{n\}$ και $C' \setminus \{n\}$ αποτελούν διάσπαση του C', αφού κανένα από τα δυο δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Άρα το C' δεν είναι συνεκτικό σύνολο. Επομένως, το $\{n\}$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{Z}$.
Άρα το $\mathbb{Z}$ έχει άπειρες συνεκτικές συνιστώσες, όλες μονοσύνολα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.31. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αν το A είναι κλειστό, τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα του A είναι κλειστή.*

Απόδειξη. Έστω συνεκτική συνιστώσα C του A.
Επειδή $C \subseteq A$ και το A είναι κλειστό και το $\overline{C}$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του C, συνεπάγεται $C \subseteq \overline{C} \subseteq A$.
Από την Πρόταση 11.26 συνεπάγεται ότι το $\overline{C}$ είναι συνεκτικό και επειδή το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A, συνεπάγεται $C = \overline{C}$. Άρα το C είναι κλειστό. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.32. *Έστω ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του A είναι ανοικτή.*

Απόδειξη. Έστω συνεκτική συνιστώσα C του A και έστω $x \in C$.
Τότε $x \in A$ και, επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$. Επειδή η περιοχή $N_x(r)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και τέμνει την συνεκτική συνιστώσα C του A, συνεπάγεται $N_x(r) \subseteq C$. Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του C.
Άρα το C είναι ανοικτό. $\square$

Άρα, σύμφωνα με τις Προτάσεις 11.30 και 11.32, κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών και συνεκτικών συνόλων.

Αν έχουμε μια συλλογή από ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα, τότε η ένωσή της είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο και θα έχουμε μια ικανοποιητική *εικόνα* των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.15. *Έστω μη-κενό ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Τότε το A είναι ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μια συλλογή Σ ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων ώστε $A = \bigcup_{I \in \Sigma} I$. Επίσης, η συλλογή Σ είναι αριθμήσιμη, δηλαδή είτε πεπερασμένη είτε άπειρη αριθμήσιμη.*

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι άμεση συνέπεια των προτάσεων 11.27, 11.30 και 11.32.
Για το δεύτερο μέρος, επιλέγουμε έναν ρητό αριθμό σε κάθε συνιστώσα του A. Επειδή οι συνιστώσες του A είναι ξένες ανά δύο, οι ρητοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε κάθε συνιστώσα είναι διαφορετικοί ανά δύο. Άρα υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στη συλλογή Σ των συνιστωσών του A και σε ένα υποσύνολο Λ του $\mathbb{Q}$. Το Λ είναι αριθμήσιμο, ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, οπότε η Σ είναι αριθμήσιμη. $\square$

Ασκήσεις.

11.7.1. Βρείτε ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικά και βρείτε τις συνεκτικές συνιστώσες τους. $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\mathrm{x} - (0,1)\|_e \neq 2\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \big([(1,0),(1,1)] \cup [(1,1),(0,2)]\big)$, $\mathbb{R}^2 \setminus \big([(1,0),(1,1)] \cup [(1,1),(0,2)] \cup [(0,2),(1,0)]\big)$, $N_{(0,0)}(1) \cup N_{(3,0)}(1) \cup [(1,0),(2,0)]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} N_{(0,n)}(1)$, $\{(\frac{1}{n},0) | n \in \mathbb{N}\}$, $\{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n},0) | n \in \mathbb{N}\}$, $[(0,0),(1,0)] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [(0,\frac{1}{n}),(1,\frac{1}{n})]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\mathrm{x}\|_e = 1 + \frac{1}{n}\}$, $\{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$, $\{(x,y) \,|\, x,y \in \mathbb{Q}\}$.

11.7.2. Αποδείξτε ότι είναι συνεκτικά τα σύνολα $\{(x, \sin x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\}$, $\{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\} \cup [(0,-1),(0,1)]$ στο $\mathbb{R}^2$.

11.7.3. Έστω $d \geq 2$, ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^d$ και $a_1, \ldots, a_n \in U$. Αποδείξτε ότι το $U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό. Τί από αυτά ισχύει αν $d = 1$;

11.7.4. Έστω υπερεπίπεδο L στον $\mathbb{R}^d$ και οι δυο ανοικτοί ημιχώροι του $\mathbb{R}^d$ που ορίζονται από το L. Αν μια καμπύλη γ στον $\mathbb{R}^d$ συνδέει ένα σημείο στον ένα ανοικτό ημιχώρο και ένα σημείο στον άλλο ανοικτό ημιχώρο, αποδείξτε ότι η τροχιά της γ τέμνει το L.

11.7.5. Δείτε την άσκηση 11.2.8 και αποδείξτε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του συνόλου C του Cantor είναι μονοσύνολο.

11.7.6. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και έστω ότι κάθε $A_n \subseteq X$ είναι συνεκτικό σύνολο και $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι συνεκτική.

11.7.7. Βρείτε απλό παράδειγμα δυο συνεκτικών συνόλων στο $\mathbb{R}^2$ των οποίων η τομή *δεν* είναι συνεκτική.

11.7.8. Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A στον $\mathbb{R}^2$ ώστε το ∂A να μην είναι συνεκτικό.

Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A στον $\mathbb{R}^2$ ώστε το A° να μην είναι συνεκτικό.

11.7.9. Έστω υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Αν το B είναι ανοικτό και, ταυτόχρονα, κλειστό, αποδείξτε ότι είτε $B = \emptyset$ είτε $B = \mathbb{R}^d$.

11.7.10. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U στον $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε δυο σημεία του U μπορούν να ενωθούν με πολυγωνική γραμμή στο U η οποία αποτελείται μόνο από ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι παράλληλα στους κύριους άξονες.

11.7.11. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$.

Αν το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C κλειστά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.

Αν το A είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C ανοικτά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.

11.7.12. Έστω ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του U είναι αριθμήσιμο (δηλαδή είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο).

11.7.13. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f : A \to \{0,1\}$ που είναι συνεχείς στο A είναι οι σταθερές συναρτήσεις. Τί γίνεται αν αντικαταστήσουμε το $\{0,1\}$ με το $\mathbb{Z}$;

11.7.14. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και συνεκτικό (όχι αναγκαστικά συμπαγές) $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ και για κάθε $x, y \in A$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο A η οποία συνδέει τα x, y.

11.7.15. Έστω μετρικός χώρος (X,d). Ο (X,d) χαρακτηρίζεται **τοπικά συνεκτικός** αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό U ώστε $x \in U \subseteq N_x(r)$.

Αποδείξτε ότι ο (X,d) είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό $A \subseteq X$ όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του A είναι ανοικτές.

11.7.16. Έστω μετρικός χώρος (X,d). Ο (X,d) χαρακτηρίζεται **τοπικά κατά καμπύλες συνεκτικός** αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ υπάρχει ανοικτό και κατά καμπύλες συνεκτικό U ώστε $x \in U \subseteq N_x(r)$.

Αν ο (X,d) είναι τοπικά κατά καμπύλες συνεκτικός, αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό $A \subseteq X$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι κατά καμπύλες συνεκτικό.

11.7.17. [16] Δείτε τις ασκήσεις 11.1.6 και 11.2.26. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και μη-κενό $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του (X,d) αν και μόνο αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του (A,d).

[16] Η άσκηση αυτή μας λέει ότι το να είναι ή να μην είναι το σύνολο A συνεκτικό εξαρτάται μόνο από το ίδιο το σύνολο A (και την μετρική του) και όχι από τον περιβάλλοντα χώρο.

Κεφάλαιο 12

Γενικευμένα ολοκληρώματα.

12.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Στο κεφάλαιο 6 εξετάσαμε πότε μια *φραγμένη* συνάρτηση ορισμένη σε *κλειστό και φραγμένο* διάστημα είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε αυτό. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι τμηματικά συνεχείς και οι τμηματικά μονότονες συναρτήσεις. Όμως, από τον ορισμό των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων δεν καλύπτονται δυο σημαντικές κατηγορίες συναρτήσεων: οι συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες και οι συναρτήσεις που ορίζονται σε μη-φραγμένα ή μη-κλειστά διαστήματα.

Περίπτωση 1. Έστω $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, b)$ και, ειδικώτερα, στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, b)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το σύμβολο $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ ονομάζεται* **γενικευμένο ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b)$ και η τιμή του, αν υπάρχει, καθορίζεται με την εξής διαδικασία.*
Αν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι η **τιμή** *του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ και γράφουμε*

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Αν το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** *και, αν $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt = \pm\infty$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$* **αποκλίνει** *στο $\pm\infty$.*
Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ **αποκλίνει** *και ότι* **δεν έχει τιμή**.

Παρατηρήστε ότι το σύμβολο $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός συμβολίζει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a, b)$, ανεξάρτητα από το αν αυτό έχει τιμή ή όχι. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει τιμή, συμβολίζει και την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Παράδειγμα 12.1.1. Είναι $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{x}) = 1$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 1.

Παράδειγμα 12.1.2. Είναι $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και έχει τιμή $+\infty$.

Παράδειγμα 12.1.3. Είναι $\int_0^{\to 1} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{1}{t-1}\,dt = \lim_{x\to 1-} \log(1 - x) = -\infty$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to 1} \frac{1}{x-1}\,dx$ αποκλίνει στο $-\infty$ και έχει τιμή $-\infty$.

Παράδειγμα 12.1.4. Είναι $\int_0^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \lim_{x\to 1-}(2-2\sqrt{1-x}) = 2$ και, επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 2.

Παράδειγμα 12.1.5. Το όριο $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \cos t\,dt = \lim_{x\to+\infty} \sin x$ δεν υπάρχει. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to+\infty} \cos x\,dx$ αποκλίνει και δεν έχει τιμή.

Η πρόταση 12.1 αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι γενίκευση του ολοκληρώματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ συγκλίνει και $\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ακόμη, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, στο $[a,x]$ για κάθε $x \in [a,b)$. Επίσης,

$$\Big| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \Big| = \Big| - \int_x^b f(t)\,dt \Big| \leq M(b-x)$$

για κάθε $x \in [a,b)$, οπότε $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. □

Περίπτωση 2. Έστω $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ και $f : (a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(a,b]$ και, ειδικώτερα, στο $[x,b]$ για κάθε $x \in (a,b]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το σύμβολο $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ ονομάζεται* **γενικευμένο ολοκλήρωμα** *της f στο $(a,b]$ και η τιμή του, αν υπάρχει, καθορίζεται με την εξής διαδικασία.*
Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι η **τιμή** *του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ και γράφουμε*

$$\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt.$$

Αν το $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει** *και, αν $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt = \pm\infty$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$* **αποκλίνει** *στο $\pm\infty$.*
Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ **αποκλίνει** *και ότι* **δεν έχει τιμή**.

Παράδειγμα 12.1.6. Είναι $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0+}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{x}) = 2\sqrt{2}$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή $2\sqrt{2}$.

Παράδειγμα 12.1.7. Είναι $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^2 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+}(\log 2 - \log x) = +\infty$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και έχει τιμή $+\infty$.

Παράδειγμα 12.1.8. Είναι $\int_{-\infty\leftarrow}^0 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{1}{(t-1)^2}\,dt = \lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{1-x}) = 1$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty\leftarrow}^0 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ συγκλίνει και η τιμή του είναι 1.

Παράδειγμα 12.1.9. Το όριο $\lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^2} \cos\frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+}(\sin\frac{1}{x} - \sin 1)$ δεν υπάρχει. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0\leftarrow}^1 \frac{1}{t^2} \cos\frac{1}{t}\,dt$ αποκλίνει και δεν έχει τιμή.

Ισχύει, επίσης, η πρόταση 12.1, καταλλήλως προσαρμοσμένη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ συγκλίνει και $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ακόμη, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, στο $[x,b]$ για κάθε $x \in (a,b]$. Επίσης,

$$\left| \int_x^b f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| -\int_a^x f(t)\,dt \right| \leq M(x-a)$$

για κάθε $x \in (a,b]$, οπότε $\lim_{x \to a+} \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. □

Περίπτωση 3. Έστω $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (a,b).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το σύμβολο* $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *ονομάζεται* **γενικευμένο ολοκλήρωμα** *της* f *στο* (a,b) *και η τιμή του, αν υπάρχει, καθορίζεται ως εξής. Θεωρούμε οποιονδήποτε* d *με* $a < d < b$. *Αν ένα τουλάχιστον από τα γενικευμένα ολοκληρώματα* $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx$ *και* $\int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *δεν έχει τιμή, τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ **δεν έχει τιμή**. *Επίσης, αν και τα δυο γενικευμένα ολοκληρώματα* $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx$, $\int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *έχουν τιμή και το άθροισμα των τιμών* $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ **δεν έχει τιμή**. *Τέλος, αν και τα δυο γενικευμένα ολοκληρώματα* $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx$, $\int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *έχουν τιμή και το* $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ **έχει τιμή** *η οποία ορίζεται να είναι*

$$\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx.$$

Αν η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** *και, αν η τιμή του είναι* $\pm\infty$, *τότε λέμε ότι* **αποκλίνει** *στο* $\pm\infty$, *αντιστοίχως.*

Το λήμμα 12.1 λέει ότι, αν γίνει διαφορετική επιλογή του ενδιάμεσου d, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση ή η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$.

ΛΗΜΜΑ 12.1. *Έστω* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *και* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του* (a,b). *Έστω* $a < d < d' < b$. *Αν ορίζεται το άθροισμα* $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$, *τότε ορίζεται και το άθροισμα* $\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\,dx + \int_{d'}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *και τα δυο αθροίσματα έχουν τις ίδιες τιμές.*

Απόδειξη. Ισχύει

$$\int_{d'}^{x} f(t)\,dt = \int_{d}^{x} f(t)\,dt + \int_{d'}^{d} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in (a,b)$ και το $\int_{d'}^{d} f(t)\,dt$ είναι αριθμός. Επειδή υπάρχει το $\lim_{x \to b-} \int_d^x f(t)\,dt$, συνεπάγεται ότι υπάρχει και το $\lim_{x \to b-} \int_{d'}^x f(t)\,dt$ και ισχύει

$$\lim_{x \to b-} \int_{d'}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x \to b-} \int_{d}^{x} f(t)\,dt + \int_{d'}^{d} f(t)\,dt.$$

Δηλαδή,

$$\int_{d'}^{\rightarrow b} f(x)\,dx = \int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx + \int_{d'}^{d} f(x)\,dx. \tag{12.1}$$

Ομοίως, ισχύει

$$\int_{x}^{d'} f(t)\,dt = \int_{x}^{d} f(t)\,dt - \int_{d'}^{d} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in (a,b)$ και το $\int_{d'}^{d} f(t)\,dt$ είναι αριθμός. Επειδή υπάρχει το $\lim_{x \to a+} \int_x^d f(t)\,dt$, συνεπάγεται ότι υπάρχει και το $\lim_{x \to a+} \int_x^{d'} f(t)\,dt$ και ισχύει

$$\lim_{x \to a+} \int_{x}^{d'} f(t)\,dt = \lim_{x \to a+} \int_{x}^{d} f(t)\,dt - \int_{d'}^{d} f(t)\,dt.$$

Δηλαδή,
$$\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx - \int_{d'}^{d} f(x)\,dx. \tag{12.2}$$
Το $\int_{d'}^{d} f(x)\,dx$ είναι αριθμός, οπότε, προσθέτοντας τις ισότητες (12.1) και (12.2), συμπεραίνουμε ότι
$$\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\,dx + \int_{d'}^{\rightarrow b} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx.$$
□

Η πρόταση 12.3 είναι ανάλογη των προτάσεων 12.1, 12.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ συγκλίνει και $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Έστω $a < d < b$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, d]$ και στο $[d, b]$. Από τις προτάσεις 12.1, 12.2 συνεπάγεται $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx = \int_{a}^{d} f(x)\,dx$ και $\int_{d}^{\rightarrow b} f(x)\,dx = \int_{d}^{b} f(x)\,dx$ και, προσθέτοντας, $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$. □

Παράδειγμα 12.1.10. Είναι $\int_{0}^{\rightarrow+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} \frac{t}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\log(x^2+1) = +\infty$ και $\int_{-\infty\leftarrow}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{0} \frac{t}{t^2+1}\,dt = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\log(x^2+1) = -\infty$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty\leftarrow}^{\rightarrow+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ αποκλίνει και δεν ορίζεται τιμή του.

Παράδειγμα 12.1.11. Είναι $\int_{0}^{\rightarrow+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ και $\int_{-\infty\leftarrow}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{0} \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\lim_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. Άρα
$$\int_{-\infty\leftarrow}^{\rightarrow+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi.$$

Στο εξής, τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$, $\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$, που εξετάσαμε στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις, θα τα συμβολίζουμε όλα
$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$
Δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης του γενικευμένου ολοκληρώματος με το ολοκλήρωμα, διότι, σύμφωνα με τις προτάσεις 12.1, 12.2 και 12.3, αν ορίζεται το ολοκλήρωμα (δηλαδή, αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη) τότε ορίζεται και το γενικευμένο ολοκλήρωμα και οι τιμές τους συμπίπτουν. Εξυπακούεται, φυσικά, και θεωρείται δεδομένο ότι, ανάλογα με τη συγκεκριμένη συνάρτηση και το συγκεκριμένο διάστημα, μπορούμε να διακρίνουμε αν πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα ή για ολοκλήρωμα.

Περίπτωση 4. Η περίπτωση αυτή συνδυάζει όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις.
Έστω $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και f ορισμένη στο διάστημα (a, b) εκτός, ίσως, από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ ώστε
$$f : (a, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi_2) \cup \cdots \cup (\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) \cup (\xi_{n-1}, b) \to \mathbb{R}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν τα γεν. ολοκληρώματα $\int_{a}^{\xi_1} f(x)\,dx, \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx, \ldots, \int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} f(x)\,dx, \int_{\xi_{n-1}}^{b} f(x)\,dx$ συγκλίνουν, λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα της f στο (a, b)* **συγκλίνει** *και η* **τιμή** *του είναι*
$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{\xi_1} f(x)\,dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{\xi_{n-1}}^{b} f(x)\,dx.$$
Αν όλα τα γεν. ολοκληρώματα έχουν τιμή και ένα τουλάχιστον από αυτά αποκλίνει στο $+\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $-\infty$, τότε λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα της f στο (a, b) **αποκλίνει** *στο $+\infty$ και γράφουμε $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = +\infty$. Ομοίως, αν όλα τα γεν. ολοκληρώματα έχουν τιμή και ένα τουλάχιστον από αυτά αποκλίνει στο $-\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $+\infty$, τότε λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα της f στο (a, b)* **αποκλίνει** *στο $-\infty$ και γράφουμε $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\infty$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα της f στο (a, b)* **αποκλίνει** *και ότι* **δεν έχει τιμή**.

Στη θεωρητική μας συζήτηση από εδώ και πέρα θα περιοριστούμε στην πρώτη περίπτωση. Δηλαδή, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ θα είναι το $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$. Μάλιστα, θα περιοριστούμε ακόμη περισσότερο στην περίπτωση $b = +\infty$, δηλαδή στα γεν. ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ θα είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, +\infty)$ και

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{\to+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt,$$

αν το όριο υπάρχει. Σε κάθε άλλη περίπτωση τα θεωρητικά μας αποτελέσματα είναι ανάλογα και αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.4. *Έστω $a < c$. Τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή και $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Ισχύει

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Το $\int_a^c f(t)\,dt$ είναι αριθμός, οπότε το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ υπάρχει αν και μόνο αν το $\lim_{x\to+\infty} \int_c^x f(t)\,dt$ υπάρχει και, σ' αυτήν την περίπτωση, είναι

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.5. *Αν οι f, g ταυτίζονται κοντά στο $+\infty$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχει τιμή. Ακόμη, οι τιμές των δυο γεν. ολοκληρωμάτων είναι είτε και οι δυο αριθμοί είτε και οι δυο $+\infty$ είτε και οι δυο $-\infty$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $c \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [c, +\infty)$. Τότε, προφανώς, το $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_c^{+\infty} g(x)\,dx$ έχει τιμή και είναι $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \int_c^{+\infty} g(x)\,dx$. Τα υπόλοιπα είναι συνέπεια της πρότασης 12.4. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.6. *Αν τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμή και το $\int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το $\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\,dx$ έχει τιμή και*

$$\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Ισχύει

$$\int_a^x (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt$$

για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και, επομένως,

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\,dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x (f(t) + g(t))\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)\,dt \\ &= \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.7. *Αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή και το $\lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx$ έχει τιμή και*

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Ισχύει
$$\int_a^x \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^x f(t)\,dt$$
για κάθε $x \in [a, +\infty)$, οπότε
$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \lambda f(t)\,dt = \lambda \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$
□

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.8. *Έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.*
[α] *Αν τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμή, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.*
[β] *Αν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$.*
[γ] *Αν $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = -\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και, επομένως,
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt \leq \lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$
[β] Ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)\,dt = +\infty$.
[γ] Όπως στο [β]. □

Τα δύο αποτελέσματα της πρότασης 12.9 είναι πολύ χρήσιμα. Ο ρόλος τους είναι ο ίδιος με τον ρόλο των ανάλογων αποτελεσμάτων για τα συνήθη ολοκληρώματα: χρησιμεύουν σε υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.9. [α] *Έστω f, g με συνεχή παράγωγο στο $[a, +\infty)$. Αν το $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ έχει τιμή, αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ και αν το $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx$ έχει τιμή και είναι:*
$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.$$
[β] *Έστω $\phi : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[a, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$ και f συνεχής στο $\phi([a, +\infty))$. Τότε το $\int_{\phi(a)}^{+\infty} f(y)\,dy$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_a^{+\infty} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ έχει τιμή και, σ' αυτήν την περίπτωση,*
$$\int_{\phi(a)}^{+\infty} f(y)\,dy = \int_a^{+\infty} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx.$$

Απόδειξη. [α] Για κάθε $x \in [a, +\infty)$ ισχύει
$$\int_a^x f(t)g'(t)\,dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\,dt.$$
Άρα
$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)g'(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f'(t)g(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$
[β] Για κάθε $x \in [a, +\infty)$ ισχύει
$$\int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds.$$
Άρα
$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds \\ &= \lim_{y\to+\infty} \int_{\phi(a)}^{y} f(s)\,ds = \int_{\phi(a)}^{+\infty} f(y)\,dy.\end{aligned}$$
□

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω* $f:[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του* $[a,c)$ *και σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του* $(c,b]$. *Ονομάζουμε* **πρωτεύουσα τιμή** *του γενικευμένου ολοκληρώματος* $\int_a^b f(x)\,dx$ *το όριο, αν υπάρχει,* $\lim_{\epsilon\to 0+}\big(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx\big)$ *και τη συμβολίζουμε* P.V. $\int_a^b f(x)\,dx$. *Δηλαδή,*

$$\text{P.V.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\Big(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx\Big).$$

Υπάρχουν παραδείγματα όπου το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν έχει τιμή ενώ έχει πρωτεύουσα τιμή.

Παράδειγμα 12.1.12. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ δεν έχει τιμή.
Πράγματι, αφ' ενός είναι $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx=\lim_{x\to 0+}\int_x^1\frac{1}{t}\,dt=\lim_{x\to 0+}(-\log x)=+\infty$ αφ' ετέρου $\int_{-1}^0\frac{1}{x}\,dx=\lim_{x\to 0-}\int_{-1}^x\frac{1}{t}\,dt=\lim_{x\to 0-}\log|x|=-\infty$.
Επομένως, το $\int_{-1}^0\frac{1}{x}\,dx+\int_0^1\frac{1}{x}\,dx=(-\infty)+(+\infty)$ είναι απροσδιόριστη μορφή.
Από την άλλη μεριά, P.V. $\int_{-1}^1\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\big(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\,dx+\int_\epsilon^1\frac{1}{x}\,dx\big)=\lim_{\epsilon\to 0+}0=0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.10. *Έστω* $f:[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του* $[a,c)$ *και σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του* $(c,b]$. *Αν το γεν. ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)\,dx$ *έχει τιμή, τότε η πρωτεύουσα τιμή* P.V. $\int_a^b f(x)\,dx$ *υπάρχει και είναι ίση με την τιμή του* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Απόδειξη. Επειδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ έχει τιμή, συνεπάγεται ότι και τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ έχουν τιμή. Επομένως,

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx,\qquad \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx.$$

Επειδή το $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\text{P.V.}\int_a^b f(x)\,dx&=\lim_{\epsilon\to 0+}\big(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx\big)\\&=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Ασκήσεις.

12.1.1. Ποιά από τα $\int_1^3\frac{1}{x}\,dx$, $\int_{-1}^7\frac{1}{x^2-x}\,dx$, $\int_1^3\frac{2}{x-2}\,dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$, $\int_2^7\log\frac{x}{x-1}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\log x\,dx$ είναι γενικευμένα ολοκληρώματα;

12.1.2. Είναι σαφές ότι τα $\int_0^1 x\log x\,dx$, $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_1^5\frac{\log x}{x-1}\,dx$, $\int_0^1\log x\log(1+x)\,dx$ είναι γενικευμένα ολοκληρώματα. Πώς πρέπει να χειριστούμε τις ολοκληρωτέες συναρτήσεις ώστε αυτά να μπορούν να θεωρηθούν (απλά) ολοκληρώματα;

12.1.3. Μπορούν να θεωρηθούν τα $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sin x}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\log|\cos x|\,dx$, $\int_0^1\frac{1}{\sin(1/x)}\,dx$ γενικευμένα ολοκληρώματα;

12.1.4. Βρείτε τα $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x^2+1)}dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx$, $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$, $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

12.1.5. Βρείτε τα $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$, $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}\,dx$.

12.1.6. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx=n!$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.

12.1.7. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx=\frac{\theta}{\sin\theta}$ για κάθε $\theta\in(0,\pi)$.

12.1.8. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^p \log x\,dx = -\frac{1}{(p+1)^2}$, αν $p > -1$, και $\int_1^{+\infty} x^p \log x\,dx = \frac{1}{(p+1)^2}$, αν $p < -1$.

12.1.9. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}\,dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

12.1.10. Βρείτε το $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx$.

12.1.11. Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση το $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x]}\,dx$.

12.1.12. Έστω f ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(0,+\infty)$ και $0 < A \le B < +\infty$.
[α] Ορίζουμε την $g(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ για $0 < x < +\infty$ και έστω ότι το όριο $L = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx = g(B) - g(A) + \int_A^B \frac{g(x)}{x}\,dx$.
(ii) $\lim_{T\to+\infty} \int_{AT}^{BT} \frac{f(x)}{x}\,dx = L\log\frac{B}{A}$.
(iii) $\int_1^{+\infty} \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = -L\log\frac{B}{A} + \int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx$.
[β] Ορίζουμε την $h(x) = x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$ για $0 < x < +\infty$ και έστω ότι το όριο $l = \lim_{x\to 0+} h(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx = h(A) - h(B) + \int_A^B \frac{h(x)}{x}\,dx$.
(ii) $\lim_{t\to 0+} \int_{At}^{Bt} \frac{f(x)}{x}\,dx = l\log\frac{B}{A}$.
(iii) $\int_0^1 \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = l\log\frac{B}{A} - \int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx$.
[γ] Με τις υποθέσεις των [α], [β], αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = (L-l)\log\frac{A}{B}$.
Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(Ax)-\cos(Bx)}{x}\,dx = \log\frac{B}{A}$ και $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-Ax}-e^{-Bx}}{x}\,dx = \log\frac{B}{A}$.

12.2 Μη-αρνητικές συναρτήσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.1. *Αν ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή και αυτή είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le +\infty$.*
Ειδικότερα, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, αν η $\int_a^x f(x)\,dx$ είναι, ως συνάρτηση του x στο $[a,+\infty)$, άνω φραγμένη, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν η ίδια συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Αν $a \le x_1 < x_2$, συνεπάγεται

$$\int_a^{x_2} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \ge \int_a^{x_1} f(t)\,dt.$$

Άρα η $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι, ως συνάρτηση του x, αύξουσα στο $[a,+\infty)$. Άρα το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt \ge 0$.
Τέλος, αν η συνάρτηση $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι άνω φραγμένη, το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ είναι αριθμός, ενώ αν δεν είναι άνω φραγμένη, το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ είναι $+\infty$. $\square$

Βλέπουμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα μη-αρνητικής συνάρτησης έχει πάντοτε τιμή, η οποία είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι η σύγκλιση του $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ισοδυναμεί με $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ ενώ η απόκλισή του ισοδυναμεί με $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.11. [α] *Έστω ότι ισχύει $0 \le f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Τότε $0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.*
Αν, επιπλέον, το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.
[β] *Έστω ότι ισχύει $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Βάσει του θεωρήματος 12.1, τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμή, οπότε από την πρόταση 12.8 συνεπάγεται $0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, συνεπάγεται $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$, οπότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ και, επομένως, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

[β] Υπάρχουν M και $c \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ για κάθε $x \in [c, +\infty)$. Το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, οπότε και το $\int_c^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει. Άρα

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_c^{+\infty} Mg(x)\,dx = M \int_c^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty.$$

Άρα το $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και, επομένως, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. □

Ας δούμε, τώρα, μερικά παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνότατα ως *συναρτήσεις σύγκρισης* στο πλαίσιο είτε της πρότασης 12.11 είτε, αργότερα, της πρότασης 12.12.

Παράδειγμα 12.2.1. Θα μελετήσουμε το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$.
Αν $p \neq 1$, τότε $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-p}-1}{1-p}$. Άρα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$, αν $p < 1$, και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$, αν $p > 1$.
Τέλος, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$.
Συνοψίζουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{αν } p > 1 \\ +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 12.2.2. Όπως πριν, θα μελετήσουμε το $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$.
Αν $p \neq 1$, τότε $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{x\to0+} \int_x^1 \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to0+} \frac{1-x^{1-p}}{1-p}$. Άρα $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}$, αν $p < 1$, και $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$, αν $p > 1$.
Τέλος, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to0+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\lim_{x\to0+} \log x = +\infty$.
Συνοψίζουμε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{αν } p < 1 \\ +\infty, & \text{αν } p \geq 1 \end{cases}$$

Από τα παραδείγματα 12.2.1 και 12.2.2 βλέπουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty \qquad \text{για κάθε } p.$$

Παράδειγμα 12.2.3. Έστω $c, q > 0$. Θα μελετήσουμε το $\int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\,dx$.
Θεωρούμε $n > \frac{p+1}{q}$. Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $e^x \geq \frac{x^n}{n!}$. Αντικαθιστούμε το x με το cx^q και βρίσκουμε $e^{cx^q} \geq \frac{c^n}{n!} x^{qn}$. Άρα ισχύει $0 < x^p e^{-cx^q} \leq \frac{n!}{c^n} \frac{1}{x^{qn-p}}$ για κάθε $x > 0$. Επειδή $qn - p > 1$, βάσει του παραδείγματος 12.2.1, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{qn-p}}\,dx$ συγκλίνει. Άρα και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\,dx$ συγκλίνει:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\,dx < +\infty \qquad \text{για } c, q > 0.$$

Η θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων μοιάζει πολύ με τη θεωρία των σειρών. Αυτό πρέπει να έχει ήδη φανεί και θα το δούμε και με τα παρακάτω σχόλια, τα οποία είναι παρόμοια με κάποια ανάλογα σχόλια για την πρόταση 8.7.

Το αποτέλεσμα της πρότασης 12.11[β] λέει, ισοδύναμα, ότι: *αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$, τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$.*

Κατόπιν, αν ισχύει $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$, όπου ο ρ είναι ένας θετικός αριθμός, δηλαδή $0 < \rho < +\infty$, τότε το συμπέρασμα για τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ είναι το εξής: *είτε και τα δυο γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν είτε και τα δυο αποκλίνουν στο* $+\infty$. Διότι, από το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$ και το ότι ο ρ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι, αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. Αλλά και από το $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\rho}$ και το ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι, αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει. Επίσης, αν ισχύει $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, συμπεραίνουμε, σύμφωνα με την πρόταση 12.11[β], ότι αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Παράδειγμα 12.2.4. Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x^2}{1/x} = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$ και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$.

Βέβαια, αν ισχύει $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει. Και πάλι αυτό προκύπτει από το $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ και την πρόταση 12.11[β].

Και μια τελευταία παρατήρηση για τον τρόπο που εφαρμόζεται πολλές φορές η "σύγκριση" γεν. ολοκληρωμάτων στο πλαίσιο της πρότασης 12.11. Αν έχουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα με περίπλοκη ολοκληρωτέα συνάρτηση, προσπαθούμε να το συγκρίνουμε με ένα γεν. ολοκλήρωμα με απλούστερη ολοκληρωτέα συνάρτηση ώστε να είναι πιο εύκολο να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση του απλούστερου γεν. ολοκληρώματος. Η μετάβαση από την περίπλοκη στην απλούστερη συνάρτηση γίνεται πολλές φορές με την αναγνώριση "κύριων όρων". Δείτε, πάλι, την ενότητα 5.8.

Παράδειγμα 12.2.5. Θεωρούμε το $\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2}\,dx$.
Οι κύριοι όροι στον αριθμητή και τον παρονομαστή του $\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2}$ είναι οι e^{2x} και e^{3x}, αντιστοίχως. Οπότε γράφουμε

$$\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2} = \frac{e^{2x}}{e^{3x}} \frac{1+3e^{-x}+e^{-2x}}{1+x^2e^{-3x}}$$

για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και βλέπουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2}\right)/\left(\frac{e^{2x}}{e^{3x}}\right) = 1.$$

Τώρα συγκρίνουμε το αρχικό γεν. ολοκλήρωμα με το

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{3x}}\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx.$$

Το δεύτερο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει, οπότε συγκλίνει και το πρώτο.

Παράδειγμα 12.2.6. Θεωρούμε το $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{2x^4+x+1}\,dx$.
Οι κύριοι όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{x^3+3}{2x^4+x+1}$ είναι οι x^3 και $2x^4$, αντιστοίχως. Γράφουμε

$$\frac{x^3+3}{2x^4+x+1} = \frac{x^3}{2x^4} \frac{1+3x^{-3}}{1+(1/2)x^{-3}+(1/2)x^{-4}}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3}{2x^4+x+1}\right)/\left(\frac{x^3}{2x^4}\right) = 1.$$

Επειδή ό 1 είναι *θετικός* και

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{2x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty,$$

προκύπτει ότι $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{2x^4+x+1} = +\infty$.

Παράδειγμα 12.2.7. Έστω το $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$.
Έχουμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\tfrac{1}{x})/(\tfrac{1}{x}) = 1.$$

Ο 1 είναι *θετικός* και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$, οπότε το ίδιο ισχύει για το $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές αριθμών μπορεί να αναδιατυπωθεί ως αποτέλεσμα που συνδυάζει σειρές και γενικευμένα ολοκληρώματα. Επομένως, να μια ακόμη ομοιότητα ανάμεσα στα γεν. ολοκληρώματα και στις σειρές.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ. *Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Έστω ότι υπάρχει $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) = x_n$ για κάθε n. Τότε το $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ έχει τιμή, η οποία είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$ και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$.
Επιπλέον,

$$\int_1^{n+1} f(u)\,du \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\,du \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Ασκήσεις.

12.2.1. Αποδείξτε ότι $\int_1^{+\infty} (\sin \frac{1}{x})^2\,dx \leq 1$ και $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2}\,dx \leq 2$.

12.2.2. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p, q < 1$.

12.2.3. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p(x^q+1)}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $1 - q < p < 1$.

12.2.4. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} e^{-(x+x^{-1})}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ συγκλίνουν.

12.2.5. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} x^x e^{-x^p}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 0$.

12.2.6. Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p(\log x)^q}\,dt$ συγκλίνει αν και μόνο αν είτε (i) $p > 1$ είτε (ii) $p = 1$ και $q > 1$.

12.2.7. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^8(\sin x)^2}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4(\sin x)^2}\,dx$ συγκλίνουν.
Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^8(\sin x)^2}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2(\sin x)^2}\,dx$ αποκλίνουν στο $+\infty$.

12.2.8. Εδώ εξετάζουμε μια διαφορά ανάμεσα σε γεν. ολοκληρώματα και σε σειρές.
Βρείτε $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ ώστε να συγκλίνει το $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ και να μην υπάρχει το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ και συγκλίνει το $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

12.2.9. Έστω $f, g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχείς στο $[a, +\infty)$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αν $\int_a^{+\infty} (f(x))^p\,dx < +\infty$ και $\int_a^{+\infty} (g(x))^q\,dx < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder** για γεν. ολοκληρώματα:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \leq \Big(\int_a^{+\infty} (f(x))^p\,dx\Big)^{1/p} \Big(\int_a^{+\infty} (g(x))^q\,dx\Big)^{1/q}.$$

Ειδική περίπτωση είναι η **ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky** για γεν. ολοκληρώματα:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \leq \Big(\int_a^{+\infty} (f(x))^2\,dx\Big)^{1/2} \Big(\int_a^{+\infty} (g(x))^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Hölder ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s(f(x))^p = t(g(x))^q$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
[β] Αν $\int_a^{+\infty} (f(x))^p dx < +\infty$, $\int_a^{+\infty} (g(x))^p dx < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για γεν. ολοκληρώματα:

$$\Big(\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))^p\,dx\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_a^{+\infty} (f(x))^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^{+\infty} (g(x))^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Minkowski ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sf(x) = tg(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

12.3 Κριτήρια σύγκλισης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\big|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\big| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in (c_0, +\infty)$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
Τότε είναι $F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt$ και, επομένως, το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή στη συνάρτηση F του κριτηρίου του Cauchy για όρια συναρτήσεων. □

Απόλυτη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$* **συγκλίνει απολύτως** *αν το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.*

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ. *Αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\Big| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Πρώτη απόδειξη. Έστω ότι το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, υπάρχει $c_0 \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt < \epsilon$ και, επομένως,

$$\Big|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\Big| \le \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt < \epsilon$$

για κάθε $x', x'' \in (c_0, +\infty)$. Άρα το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.
Τέλος, επειδή για κάθε $x \in [a, +\infty)$ ισχύει $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, συνεπάγεται

$$-\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_a^{+\infty} (-|f(x)|)\,dx \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Άρα $\big|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\big| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.
Δεύτερη απόδειξη. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f^+, f^- : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f^+(x) = (f(x))^+, \qquad f^-(x) = (f(x))^-.$$

Ισχύει

$$0 \le f^+(x) \le |f(x)|,\ \ 0 \le f^-(x) \le |f(x)|,\ \ f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|,\ \ f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
Επειδή $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$, συνεπάγεται ότι τα $\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx$ συγκλίνουν.
Επειδή $f = f^+ - f^-$, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} (f^+(x) - f^-(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\Big| &= \Big|\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx\Big| \le \Big|\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx\Big| + \Big|\int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx\Big| \\ &= \int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx = \int_a^{+\infty} (f^+(x) + f^-(x))\,dx \\ &= \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.12. [α] *Αν ισχύει $|f(x)| \le g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει. Επίσης, $\big|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\big| \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.*
[β] *Έστω $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Επειδή το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει, οπότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και

$$\big|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\big| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

[β] Άμεση συνέπεια της πρότασης 12.11 και του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης. □

Τα σχόλια που έγιναν μετά από την πρόταση 12.11 ισχύουν και εδώ, μόνο που εφαρμόζονται στο $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ αντί του $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Δηλαδή, τα ίδια σχόλια διατυπώνονται σε σχέση με την *απόλυτη σύγκλιση* του $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Παράδειγμα 12.3.1. Το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως, διότι ισχύει $|\frac{\sin x}{x^2}| \le \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$ και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.3.2. Θα αποδείξουμε ότι $\int_\pi^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|\,dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$, δηλαδή ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ δεν συγκλίνει απολύτως.
Είναι

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Επειδή $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \to +\infty$, συνεπάγεται $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \to +\infty$, οπότε $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$.
Σε λίγο θα δούμε ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Υπό συνθήκη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει υπό συνθήκη** *αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.2. *Έστω* $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *και* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *για κάθε* $x \in [a,+\infty)$ *και έστω ότι η* f *είναι συνεχής στο* $[a,+\infty)$ *και η* g *έχει συνεχή παράγωγο στο* $[a,+\infty)$.
[α] *Έστω ότι η* g *είναι φθίνουσα στο* $[a,+\infty)$, *ότι* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ *και ότι η* F *είναι φραγμένη στο* $[a,+\infty)$. *Τότε το* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *συγκλίνει.*
[β] *Έστω ότι η* g *είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη στο* $[a,+\infty)$ *και ότι το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει. Τότε το* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|F(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής, ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Επίσης, ισχύει $g'(x) \le 0$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$.
Ισχύει

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = \int_a^x F'(t)g(t)\,dt = F(x)g(x) - \int_a^x F(t)g'(t)\,dt \tag{12.3}$$

για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Το $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} |F(x)g'(x)|\,dx &\le M\int_a^{+\infty} |g'(x)|\,dx = -M\int_a^{+\infty} g'(x)\,dx = -M\lim_{x\to+\infty}\int_a^x g'(t)\,dt \\ &= -M\lim_{x\to+\infty}(g(x)-g(a)) = Mg(a) < +\infty.\end{aligned}$$

Άρα το $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ συγκλίνει, οπότε το $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x F(t)g'(t)\,dt$ υπάρχει και είναι αριθμός. Επειδή ισχύει $|F(x)g(x)| \le Mg(x)$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)g(x) = 0.$$

Τώρα, από την (12.3) συνεπάγεται ότι το

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)g(t)\,dt = -\lim_{x\to+\infty} \int_a^x F(t)g'(t)\,dt$$

υπάρχει και είναι αριθμός, οπότε το $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει.
[β] Το $l = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Σύμφωνα με το [α], το $\int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-l)\,dx$ συγκλίνει. Τότε

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx &= \int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-l)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)l\,dx\\ &= \int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-l)\,dx + l\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

οπότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 12.3.3. Θα δούμε ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή, βάσει του παραδείγματος 12.3.2, ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.
Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα με συνεχή παράγωγο στο $[\pi,+\infty)$ και είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Η συνάρτηση $\sin x$ είναι συνεχής στο $[\pi,+\infty)$ και ισχύει

$$\left|\int_\pi^x \sin t\,dt\right| = |\cos\pi - \cos x| \le 2$$

για κάθε $x \ge \pi$. Άρα το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.3.4. Για το $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$ η κατάσταση είναι πιο απλή.
Παρατηρούμε ότι η $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{αν } 0 < x \le \pi\\ 1, & \text{αν } x = 0\end{cases}$ είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi]$. Άρα το *γενικευμένο* ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi g(x)\,dx$ έχει τιμή ίση με την τιμή του *απλού* ολοκληρώματος $\int_0^\pi g(x)\,dx$.

Παράδειγμα 12.3.5. Συνδυάζοντας τα δυο προηγούμενα παραδείγματα, βλέπουμε ότι το

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

συγκλίνει. Για τον υπολογισμό της τιμής του $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ δείτε την άσκηση 12.3.12 καθώς και το τέλος της ενότητας 12.4. Προς το παρόν θα δούμε ότι η τιμή αυτή είναι θετικός αριθμός.
Με ολοκλήρωση κατά μέρη, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos x)'}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x} - \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_{\pi/4}^{7\pi/4} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_{7\pi/4}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \ge \int_{\pi/4}^{7\pi/4} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Επειδή ισχύει $1-\cos x \ge 1-\cos\frac{\pi}{4}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$, συνεπάγεται

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \ge \left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\int_{\pi/4}^{7\pi/4} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{12(2-\sqrt{2})}{7\pi} > 0.$$

Τα σχόλια που είχαμε κάνει για την έννοια της σύγκλισης μιας σειράς στην ενότητα 8.3 μετά από το παράδειγμα 8.3.8 ισχύουν σε μεγάλο βαθμό και για την έννοια της σύγκλισης ενός γεν. ολοκληρώματος.
Έστω κατ' αρχάς ένα γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ με *μη-αρνητική* ολοκληρωτέα συνάρτηση $f : [a,+\infty) \to [0,+\infty)$. Το να συγκλίνει το γεν. ολοκλήρωμα ισοδυναμεί με το ότι τα ολοκληρώματα $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι φραγμένα και αυτό συνεπάγεται ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι μικρή:

"μικρότερη συνάρτηση έχει μικρότερα ολοκληρώματα". Το να ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ είναι κάτι το οποίο διευκολύνει τη σύγκλιση του γεν. ολοκληρώματος, αλλά δεν είναι αρκετό. Για παράδειγμα, και στα δυο γεν. ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει όριο 0 στο $+\infty$, αλλά το πρώτο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει ενώ το δεύτερο δεν συγκλίνει. Βλέπουμε ότι οι τιμές της $\frac{1}{x^2}$ είναι *πολύ μικρότερες* από τις αντίστοιχες τιμές της $\frac{1}{x}$. Πράγματι: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x^2)}{1/x} = 0$. Δηλαδή, το μέγεθος των τιμών της $\frac{1}{x^2}$ είναι αρκετά μικρό ώστε το γεν. ολοκλήρωμά της συγκλίνει ενώ το μέγεθος των τιμών της $\frac{1}{x}$ δεν είναι τόσο μικρό όσο θα έπρεπε για να συγκλίνει και το δικό της γεν. ολοκλήρωμα. Αυτό φαίνεται καθαρά και στην πρόταση 12.11. Το βασικό της συμπέρασμά της είναι ότι, αν ένα γεν. ολοκλήρωμα με μεγαλύτερη συνάρτηση συγκλίνει, τότε και το γεν. ολοκλήρωμα με τη μικρότερη συνάρτηση συγκλίνει.
Όλα τα προηγούμενα έχουν ως βασική προϋπόθεση ότι αναφερόμαστε σε γεν. ολοκληρώματα με μη-αρνητικές συναρτήσεις.
Η κατάσταση είναι διαφορετική για τα γεν. ολοκληρώματα των οποίων οι συναρτήσεις έχουν μεταβαλλόμενο πρόσημο. Για να συγκλίνει το γεν. ολοκλήρωμα, πρέπει οι τιμές της ολοκληρωτέας συνάρτησης να έχουν και πάλι μικρό μέγεθος. Όμως, το μέγεθος των τιμών της συνάρτησης δεν παίζει πια τον καθοριστικό ρόλο. Δείτε, για παράδειγμα τα γεν. ολοκληρώματα $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ και $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$. Οι τιμές των δυο συναρτήσεων έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος. Όμως, ενώ το μέγεθος αυτό δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει το δεύτερο γεν. ολοκλήρωμα, είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει το πρώτο γεν. ολοκλήρωμα. Ο λόγος είναι ότι από τα διαφορετικά πρόσημα προκαλείται αλληλοαναίρεση των τιμών κατά την ολοκλήρωσή τους. Αυτό ακριβώς το φαινόμενο παρατηρείται σε οποιοδήποτε γεν. ολοκλήρωμα που συγκλίνει υπό συνθήκη. Το μέγεθος των τιμών της ολοκληρωτέας συνάρτησης δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει το γεν. ολοκλήρωμα απολύτως αλλά είναι αρκετά μικρό ώστε, *μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων*, το γεν. ολοκλήρωμα να συγκλίνει.
Αυτή η διαφορά ανάμεσα στα γεν. ολοκληρώματα με μη-αρνητικές συναρτήσεις και στα γεν. ολοκληρώματα με γενικές συναρτήσεις αντανακλάται στην διαφορά ανάμεσα στις χρησιμοποιούμενες μεθόδους μελέτης της σύγκλισής τους. Η "σύγκριση" αντίστοιχων τιμών συναρτήσεων όπως αυτή εκφράζεται στις προτάσεις 12.11 και 12.12 δεν εφαρμόζεται σε γεν. ολοκληρώματα που συγκλίνουν υπό συνθήκη, ακριβώς επειδή πρόκειται για σύγκριση των *μεγεθών* των αντίστοιχων τιμών. Η μέθοδος της "σύγκρισης" εφαρμόζεται μόνο για τη μελέτη της σύγκλισης γεν. ολοκληρωμάτων μη-αρνητικών συναρτήσεων ή της απόλυτης σύγκλισης γεν. ολοκληρωμάτων. Η μελέτη της σύγκλισης γεν. ολοκληρωμάτων, τα οποία δεν συγκλίνουν απολύτως, γίνεται κυρίως με τις μεθόδους του θεωρήματος 12.2.

Ασκήσεις.

12.3.1. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ αν $x \in [n-1, n)$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

12.3.2. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ συγκλίνουν απολύτως.

12.3.3. Αποδείξτε ότι, αν $p > 1$, το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ συγκλίνει απολύτως ενώ, αν $0 < p \le 1$, το ίδιο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.

12.3.4. Αποδείξτε ότι τα $\int_1^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x+x^2}dx$, $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\log x}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{x\cos(x^2)}{1+\log x}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{x(\sqrt{x}+1)\sin(x^2)}{x+\sin x}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x+1)(x+\sin x)}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \cos x\sin\frac{1}{x}\,dx$ συγκλίνουν υπό συνθήκη.

12.3.5. Έστω ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ δεν έχουν κοινούς διαιρέτες.
Αποδείξτε ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $Q(x)$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα και $\deg Q(x) \ge \deg P(x) + 2$.
Αποδείξτε ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin x\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν όλες οι πραγματικές ρίζες του $Q(x)$ ανήκουν στο σύνολο $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ και έχουν πολλαπλότητα 1 και $\deg Q(x) \ge \deg P(x) + 1$.

12.3.6. Δείτε την άσκηση 7.3.16.

Έστω ότι η $\phi : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει μονότονη παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, +\infty)$ και ότι $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty} \sin(\phi(x))\, dx$ συγκλίνει.

Αποδείξτε ότι τα $\int_1^{+\infty} \sin(x^a)\, dx$, $\int_1^{+\infty} \cos(x^a)\, dx$ συγκλίνουν, αν $|a| > 1$, και αποκλίνουν, αν $|a| \leq 1$. Ειδικώτερα, τα $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$, $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ συγκλίνουν.[1]

12.3.7. Αν $1 < x < +\infty$ ορίζουμε $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Δείτε τις ασκήσεις 10.1.26 και 7.3.20.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\zeta(x) = x \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}}\, dt$ και $\frac{1}{x-1} \leq x \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}}\, dt \leq \frac{x}{x-1}$ για κάθε $x > 1$, βρίσκοντας έτσι με δεύτερο τρόπο τις ήδη γνωστές ανισότητες $\frac{1}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{x}{x-1}$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x \int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^{x+1}}\, dt$ για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι το τελευταίο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > 0$. Συμβολίστε $\zeta_0(x)$ τη συνάρτηση που ορίζεται από το δεξιό μέλος του τελευταίου τύπου και παρατηρήστε ότι η $\zeta_0(x)$ ορίζεται στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ και ταυτίζεται με την $\zeta(x)$ στο $(1, +\infty)$. Επομένως, η συνάρτηση $\zeta(x)$ επεκτείνεται, μέσω του τύπου αυτού, και στο διάστημα $(0, 1)$.

Θεωρήστε την $\phi(x)$ του [η] της άσκησης 7.3.20 και, βάσει της άσκησης 7.1.8, δημιουργήστε συναρτήσεις $\phi_n(x)$ ώστε να είναι $\phi_1(x) = \phi(x)$ και $\phi_{n+1}(x) = \int_1^x (\phi_n(t) - \mu_n)\, dt$, όπου $\mu_n = \int_1^2 \phi_n(t)\, dt$, για κάθε n. Αποδείξτε ότι, για κάθε n, η $\phi_n(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 1, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\phi_n(1) = 0$. Ειδικώτερα, η $\phi_n(x)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Κατόπιν, ξεκινώντας με τον τύπο στο [β], αποδείξτε επαγωγικά ότι ισχύει

$$\begin{aligned} \zeta(x) = {} & \tfrac{x+1}{x-1} - \mu_1 x - \mu_2 x(x+1) - \cdots - \mu_{n-1} x(x+1)\cdots(x+n-2) \\ & - x(x+1)\cdots(x+n) \int_1^{+\infty} \tfrac{\phi_n(t)}{t^{x+n+1}}\, dt \end{aligned}$$

για κάθε $x > 1$ και κάθε n. Αποδείξτε ότι το τελευταίο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > -n$. Συμβολίστε $\zeta_{-n}(x)$ τη συνάρτηση που ορίζεται από το δεξιό μέλος του τελευταίου τύπου και παρατηρήστε ότι η $\zeta_{-n}(x)$ ορίζεται στο $(-n, 1) \cup (1, +\infty)$ και ταυτίζεται με την $\zeta(x)$ στο $(1, +\infty)$. Επομένως, η συνάρτηση $\zeta(x)$ επεκτείνεται, μέσω του τύπου αυτού, και στο διάστημα $(-n, 1)$.

Τώρα, παρατηρήστε ότι, αν $n < m$, οι συναρτήσεις $\zeta_{-n}(x)$ και $\zeta_{-m}(x)$ ταυτίζονται στο $(-n, 1) \cup (1, +\infty)$, δηλαδή στο κοινό μέρος των πεδίων ορισμού τους. Να συμπεράνετε ότι ορίζεται μια συνάρτηση στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ η οποία, για κάθε n, ταυτίζεται με την $\zeta_{-n}(x)$ στο $(-n, 1) \cup (1, +\infty)$.

Η συνάρτηση που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται, επίσης, ζ-συνάρτηση του Riemann και συμβολίζεται $\zeta : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και είναι επέκταση της $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία είχε οριστεί στην άσκηση 10.1.26.[2]

12.3.8. [3] [α] Έστω $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } 0 \leq x \leq n \\ 0, & \text{αν } x > n \end{cases}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στην 0 ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$ αλλά ότι $\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \not\to \int_0^{+\infty} 0\, dx$.

[β] Έστω $f, f_n : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ για κάθε n και $g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $|f_n(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, ότι για κάθε $c > a$ η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a, c]$ και ότι το $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει και ότι $\int_a^{+\infty} f_n(x)\, dx \to \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

12.3.9. Έστω ότι η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ότι $f(0) = 0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον 0. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 f(x) x^{-\frac{3}{2}}\, dx$ συγκλίνει απολύτως.

[1] Τα δυο αυτά γεν. ολοκληρώματα ονομάζονται **ολοκληρώματα Fresnel**.

[2] Συνέχεια στις ασκήσεις 12.4.2 και 12.5.4.

[3] Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων και γενικευμένο ολοκλήρωμα.

12.3.10. Για ποιές τιμές των p, q τα $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{x-1}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^p)}{x^q}\,dx$ συγκλίνουν είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη;

12.3.11. Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]-(1/2)}{x^p}\,dx$ συγκλίνει για κάθε $p > 0$.

12.3.12. Με τους τύπους (6.40) στο παράδειγμα 6.5.1, αποδείξτε ότι:
(i) $\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+(1/2))x)}{\sin(x/2)}\,dx = \pi$ για κάθε n,
(ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx = \pi$ ή 0, αν ο n είναι περιττός ή άρτιος, αντιστοίχως,
(iii) $\int_0^{\pi} \big(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\big)^2\,dx = n\pi$ για κάθε n.
Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{2}{x}, & \text{αν } 0 < x \le \pi \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$. Από την άσκηση 7.3.22[α] συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(x)\sin((n+\frac{1}{2})x)\,dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{2}{x}\sin((n+\frac{1}{2})x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+(1/2))x)}{\sin(x/2)}\,dx = \pi$. Συμπεράνατε ότι[4]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

12.3.13. Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, +\infty)$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αν $\int_a^{+\infty} |f(x)|^p\,dx < +\infty$ και $\int_a^{+\infty} |g(x)|^q\,dx < +\infty$, αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως και ότι ισχύει η **ανισότητα του Hölder** για γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\big|\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx\big| \le \big(\int_a^{+\infty} |f(x)|^p\,dx\big)^{1/p}\big(\int_a^{+\infty} |g(x)|^q\,dx\big)^{1/q}.$$

Ειδική περίπτωση είναι η **ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky**:

$$\big|\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx\big| \le \big(\int_a^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\big)^{1/2}\big(\int_a^{+\infty} |g(x)|^2\,dx\big)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Hölder ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \ge 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s|f(x)|^p = t|g(x)|^q$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και είτε $f(x)g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ είτε $f(x)g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
[β] Αν $\int_a^{+\infty} |f(x)|^p dx < +\infty$, $\int_a^{+\infty} |g(x)|^p dx < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\big(\int_a^{+\infty} |f(x)+g(x)|^p\,dx\big)^{1/p} \le \big(\int_a^{+\infty} |f(x)|^p\,dx\big)^{1/p} + \big(\int_a^{+\infty} |g(x)|^p\,dx\big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Minkowski ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \ge 0$ όχι και οι δυο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s|f(x)| = t|g(x)|$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και είτε $f(x)g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ είτε $f(x)g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

12.3.14. Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $w : [a, +\infty) \to (0, +\infty)$ ώστε $\int_a^{+\infty} w(x)\,dx = 1$ και ώστε να έχει τιμή το $\int_a^{+\infty} f(x)w(x)\,dx$. Συμβολίζουμε $E_w(f; a, +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)w(x)\,dx$.[5]
Αποδείξτε την εξής *γενικευμένη ανισότητα του Jensen*.[6] Έστω $f : [a, +\infty) \to (c, d)$ συνεχής στο $[a, +\infty)$ και $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο (c, d). Έστω, επίσης, $w : [a, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής στο $[a, +\infty)$ ώστε $\int_a^{+\infty} w(x)\,dx = 1$. Αν το $E_w(f; a, +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)w(x)\,dx$ είναι αριθμός, αποδείξτε ότι $g\big(E_w(f; a, +\infty)\big) \le E_w(g \circ f; a, +\infty)$ ή, ισοδύναμα,

$$g\big(\int_a^{+\infty} f(x)w(x)\,dx\big) \le \int_a^{+\infty} g(f(x))w(x)\,dx.$$

Αν η g είναι κοίλη στο (c, d), τότε ισχύει η αντίστροφη της ανισότητας αυτής.

Αν η g είναι, επιπλέον, γνησίως κυρτή (κοίλη) στο (c, d), αποδείξτε ότι η ανισότητα Jensen ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a, +\infty)$.

[4]Θα δούμε κι άλλες αποδείξεις αυτής της ισότητας στο παράδειγμα 12.4.10 και στην άσκηση 12.4.4.

[5]Το $E_w(f; a, +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)w(x)\,dx$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f ως προς την w στο $[a, +\infty)$ και σ' αυτό το πλαίσιο, η συνάρτηση w ονομάζεται **συνάρτηση βάρους**.

[6]Δείτε τις ασκήσεις 6.4.19[α,γ] και 8.3.24.

12.4 Ολοκληρώματα και γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο.

Ολοκληρώματα με παράμετρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω διάστημα I και συνάρτηση δυο μεταβλητών $f : I \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Αν για κάποιον $x \in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c,d]$, είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$, τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$. Αν αυτό ισχύει για κάθε $x \in I$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ με **παράμετρο** *$x \in I$.*
Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$, τότε για κάθε $x \in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c,d]$, είναι συνεχής στο $[c,d]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$.

Στα θεωρήματα 12.3, 12.4 θα δούμε ότι, με κατάλληλες υποθέσεις, η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη, αντιστοίχως, στο I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.3. *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$, τότε η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $\xi \in I$. Θεωρούμε διάστημα $[a,b] \subseteq I$ ώστε: αν ο ξ είναι δεξιό ή αριστερό άκρο του I, τότε ο ξ να είναι, ομοίως, δεξιό ή αριστερό άκρο του $[a,b]$ και, αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε ο ξ να είναι, ομοίως, εσωτερικό σημείο του $[a,b]$. Άρα για να αποδείξουμε ότι η g είναι συνεχής στον ξ αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ είναι συνεχής στον ξ.
Έστω $\epsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| < \tfrac{\epsilon}{d-c+1} \tag{12.4}$$

για κάθε $(x',y'), (x'',y'') \in [a,b] \times [c,d]$ με $|(x',y') - (x'',y'')| < \delta$.
Τότε για κάθε $x \in [a,b]$ με $|x-\xi| < \delta$ και κάθε $y \in [c,d]$ ισχύει $(x,y), (\xi,y) \in [a,b] \times [c,d]$ και $|(x,y) - (\xi,y)| = |x-\xi| < \delta$, οπότε η (12.4) συνεπάγεται

$$|f(x,y) - f(\xi,y)| < \tfrac{\epsilon}{d-c+1}. \tag{12.5}$$

Άρα για κάθε $x \in [a,b]$ με $|x-\xi| < \delta$, η (12.5) συνεπάγεται

$$|g(x) - g(\xi)| = \big| \int_c^d (f(x,y) - f(\xi,y))\,dy \big| \leq \tfrac{\epsilon}{d-c+1}(d-c) < \epsilon.$$

Άρα ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ είναι συνεχής στον ξ. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x,\eta)-f(\xi,\eta)}{x-\xi}$, αν υπάρχει, ονομάζεται* **μερική παράγωγος** *ως προς x της f στο σημείο (ξ,η). Ομοίως, το όριο $\lim_{y\to\eta} \frac{f(\xi,y)-f(\xi,\eta)}{y-\eta}$, αν υπάρχει, ονομάζεται* **μερική παράγωγος** *ως προς y της f στο σημείο (ξ,η). Συμβολίζουμε*

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x,\eta)-f(\xi,\eta)}{x-\xi}, \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) = \lim_{y\to\eta} \tfrac{f(\xi,y)-f(\xi,\eta)}{y-\eta}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.4. *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$ και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι, επίσης, συνεχής στο $I \times [c,d]$. Τότε η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ για κάθε $x \in I$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει*

$$g'(x) = \int_c^d \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Απόδειξη. Έστω $\xi \in I$. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 12.3, θεωρούμε διάστημα $[a,b] \subseteq I$ που περιέχει τον ξ στο εσωτερικό του, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I, ή ως άκρο του, αν ο ξ είναι άκρο του I. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ έχει παράγωγο

στον ξ ίση με $g'(\xi) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\, dy$.
Έστω $\epsilon > 0$. Η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχής στο $[a, b] \times [c, d]$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\big|\tfrac{\partial f}{\partial x}(x', y') - \tfrac{\partial f}{\partial x}(x'', y'')\big| < \tfrac{\epsilon}{d-c+1} \tag{12.6}$$

για κάθε $(x', y'), (x'', y'') \in [a, b] \times [c, d]$ με $|(x', y') - (x'', y'')| < \delta$.
Έστω $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ και $|x - \xi| < \delta$. Τότε υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε

$$\tfrac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} = \tfrac{\partial f}{\partial x}(\zeta, y)$$

και, επειδή $|\zeta - \xi| \leq |x - \xi| < \delta$, από την (12.6) συνεπάγεται

$$\big|\tfrac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} - \tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\big| = \big|\tfrac{\partial f}{\partial x}(\zeta, y) - \tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\big| < \tfrac{\epsilon}{d-c+1}. \tag{12.7}$$

Άρα για κάθε $x \in [a, b]$ με $|x - \xi| < \delta$, από την (12.7) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\big|\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} - \int_c^d \tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\, dy\big| = \big|\int_c^d \big(\tfrac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} - \tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\big)\, dy\big| \leq \tfrac{\epsilon}{d-c+1}(d - c) < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\, dy$ και, επομένως, ο περιορισμός της g στο $[a, b]$ έχει παράγωγο στον ξ ίση με $g'(\xi) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\, dy$. □

Παράδειγμα 12.4.1. Έστω $f(x) = \big(\int_0^x e^{-s^2}\, ds\big)^2$ και $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}\, dy$.
Τότε, κατ' αρχάς, ισχύει $f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2}\, ds$ για κάθε x.
Η $\frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}$ έχει μερική παράγωγο ως προς x την $-2xe^{-x^2(y^2+1)}$ και αυτή είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0, 1]$, οπότε από το θεώρημα 12.4 συνεπάγεται

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(y^2+1)}\, dy = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2y^2}\, dy = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2}\, ds = -f'(x)$$

για κάθε x. Άρα η $f + g$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει

$$f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = 0 + \int_0^1 \tfrac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan 1 - \arctan 0 = \tfrac{\pi}{4} \tag{12.8}$$

για κάθε x. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \tfrac{e^{-x^2}}{1+y^2}\, dy = \tfrac{\pi}{4} e^{-x^2}$$

για κάθε x και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα η (12.8) συνεπάγεται

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \tfrac{\pi}{4} - \lim_{x\to+\infty} g(x) = \tfrac{\pi}{4}.$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Τέλος, επειδή η e^{-x^2} είναι άρτια, εύκολα βλέπουμε ότι $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και καταλήγουμε, επομένως, στο πάρα πολύ σημαντικό **ολοκλήρωμα του Gauss**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c, +\infty) \to \mathbb{R}$. Έστω ότι για κάποιον $x \in I$ η $f(x, y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c, +\infty)$, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[c, +\infty)$ και ότι το $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy$ συγκλίνει. Αν αυτό ισχύει για κάθε $x \in I$, τότε ορίζεται, και πάλι, συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$g(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy \qquad \text{για κάθε } x \in I$$

και λέμε ότι πρόκειται για **γεν. ολοκλήρωμα με παράμετρο** $x \in I$ *και ότι το* $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy$ **συγκλίνει** *στην $g(x)$* **κατά σημείο** *στο διάστημα I.*

Θα δούμε κάτω από ποιές υποθέσεις η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη στο διάστημα I.

Παράδειγμα 12.4.2. Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$ με παράμετρο x.
Για κάθε $y \geq 0$ είναι $\int_0^y e^{-xt}\, dt = \begin{cases} -(e^{-xy} - 1)/x, & \text{αν } x \neq 0 \\ y, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ οπότε, θεωρώντας το $\lim_{y\to+\infty}$, βρίσκουμε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1/x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Άρα το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$.
Βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής και, μάλιστα, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 12.4.3. Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy$ με παράμετρο x.
Κατ' αρχάς, αν $x = 0$, το γεν. ολοκλήρωμα έχει τιμή 0.
Έστω, τώρα, ότι $x > 0$. Με αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$.
Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$ συγκλίνει και έστω A η τιμή του. Άρα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = A$ για κάθε $x > 0$.
Αν $x < 0$, τότε $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-|x|y)}{y}\, dy = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(|x|y)}{y}\, dy = -A$.
Άρα το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} A, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -A, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
Έχουμε, επίσης, δει ότι $A > 0$ και, επομένως, η g δεν είναι συνεχής στον 0 ενώ είναι συνεχής και, μάλιστα, παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy$* **συγκλίνει** *στη συνάρτηση $g(x)$* **ομοιόμορφα** *στο διάστημα I αν*

$$\lim_{y\to+\infty} \sup\left\{\left|g(x) - \int_c^y f(x, t)\, dt\right| \,\middle|\, x \in I\right\} = 0$$

ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 \in [c, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\left|g(x) - \int_c^y f(x, t)\, dt\right| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $y \in (c_0, +\infty)$.

Για να τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην κατά σημείο σύγκλιση και στην ομοιόμορφη σύγκλιση γεν. ολοκληρώματος, καμιά φορά χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x) \quad \text{στο } I \qquad\qquad \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x) \quad \text{στο } I$$

ακριβώς όπως και για τη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων. Το πρώτο σύμβολο, με την κατά σημείο σύγκλιση, απλώς σημαίνει ότι ισχύει $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy = g(x)$ για κάθε $x \in I$ ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει $\lim_{y\to+\infty} \int_c^y f(x, t)\, dt = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

Τώρα, για κάθε $y \in [c, +\infty)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_y : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g_y(x) = \int_c^y f(x, t)\, dt \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\sup\left\{\left|g(x)-\int_c^y f(x,t)\,dt\right| \mid x\in I\right\} = \sup\{|g(x)-g_y(x)| \mid x\in I\} = \|g_y-g\|_I.$$

Άρα ο παραπάνω ορισμός αναδιατυπώνεται ως εξής: *το* $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ *συγκλίνει στη συνάρτηση* $g(x)$ *ομοιόμορφα στο διάστημα* I *αν*

$$\lim_{y\to+\infty}\|g_y-g\|_I = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.13. *Αν το* $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ *συγκλίνει στη συνάρτηση* $g(x)$ *ομοιόμορφα στο διάστημα* I*, τότε συγκλίνει στην* $g(x)$ *και κατά σημείο στο* I.

Απόδειξη. Έστω $\xi\in I$. Τότε

$$\left|g(\xi)-\int_c^y f(\xi,t)\,dt\right| \leq \sup\left\{\left|g(x)-\int_c^y f(x,t)\,dt\right| \mid x\in I\right\} = \|g_y-g\|_I,$$

οπότε $\lim_{y\to+\infty}\int_c^y f(\xi,t)\,dt = g(\xi)$.
Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\xi\in I$, συμπεραίνουμε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I. □

Παράδειγμα 12.4.4. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$. Δηλαδή

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} \frac{1}{x} \qquad \text{στο } (0,+\infty).$$

Θα δούμε, τώρα, ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0,+\infty)$.
Είναι $\left|\frac{1}{x}-\int_0^y e^{-xt}\,dt\right| = \frac{e^{-xy}}{x}$ για κάθε $x>0$ και $y\geq 0$. Άρα

$$\sup\left\{\left|\tfrac{1}{x}-\int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \mid x\in(0,+\infty)\right\} = \sup\{\tfrac{e^{-xy}}{x} \mid x>0\} = +\infty$$

για κάθε $y\geq 0$. Άρα δεν ισχύει ότι $\lim_{y\to+\infty}\sup\left\{\left|\frac{1}{x}-\int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \mid x\in(0,+\infty)\right\} = 0$, οπότε το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ δεν συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$.
Από την άλλη μεριά, θεωρώντας οποιονδήποτε $a>0$, θα αποδείξουμε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Δηλαδή,

$$\text{για κάθε } a>0: \qquad \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy \overset{\text{ομ}}{=} \frac{1}{x} \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Πράγματι,

$$\sup\left\{\left|\tfrac{1}{x}-\int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \mid x\in[a,+\infty)\right\} = \sup\{\tfrac{e^{-xy}}{x} \mid x\geq a\} = \frac{e^{-ay}}{a}$$

για κάθε $y>0$ και, επομένως,

$$\lim_{y\to+\infty}\sup\left\{\left|\tfrac{1}{x}-\int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \mid x\in[a,+\infty)\right\} = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-ay}}{a} = 0.$$

Έστω ακολουθία (y_n) στο $[c,+\infty)$ ώστε $y_n\to+\infty$. Έχουμε ήδη ορίσει τις συναρτήσεις $g_{y_n}: I\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt \qquad \text{για κάθε } x\in I \text{ και κάθε } n.$$

Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τους ορισμούς, αν το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο ή ομοιόμορφα στο I, τότε, αντιστοίχως, $g_{y_n}\overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ ή $g_{y_n}\overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I. Αυτή η παρατήρηση θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε τις ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας της g, διότι θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε τα σχετικά αποτελέσματα για ακολουθίες συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.5. *Έστω διάστημα I και $f : I\times[c,+\infty) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $I\times[c,+\infty)$ και το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο I, τότε η $g : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ακολουθία (y_n) στο $[c,+\infty)$ ώστε $y_n \to +\infty$. Κατόπιν, ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{y_n} : I \to \mathbb{R}$ με τύπους $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$. Τότε $g_{y_n} \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I. Η f είναι συνεχής στο $I\times[c,y_n]$, αφού αυτό είναι υποσύνολο του $I\times[c,+\infty)$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 12.3, για κάθε n, η g_{y_n} είναι συνεχής στο I. Άρα η g είναι συνεχής στο I. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.6. *Έστω διάστημα I και $f : I\times[c,+\infty) \to \mathbb{R}$. Έστω ότι οι f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχείς στο $I\times[c,+\infty)$, ότι το $\int_c^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο I και ότι το $\int_c^{+\infty} f(\xi,y)\,dy$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi\in I$. Τότε το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x\in I$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στο $[c,+\infty)$ ώστε $y_n \to +\infty$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{y_n} : I\to\mathbb{R}$ με τύπους $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$.
Σύμφωνα με το θεώρημα 12.4, ισχύει ${g_{y_n}}'(x) = \int_c^{y_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ για κάθε $x\in I$. Λόγω της υπόθεσης, ισχύει ${g_{y_n}}' \overset{\text{ομ}}{\to} h$ στο I. Επίσης, λόγω της υπόθεσης, η ακολουθία $(g_{y_n}(\xi))$ συγκλίνει.
Από το θεώρημα 9.3 συνεπάγεται ότι η (g_{y_n}) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση g κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x\in I$. Ειδικώτερα, ισχύει

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_{y_n}(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_c^{y_n} f(x,t)\,dt = \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

για κάθε $x\in I$. Άρα το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I.
Μένει να αποδείξουμε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ *ομοιόμορφα* σε κάθε $[a,b]\subseteq I$.
Ορίζουμε την $F : [c,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $F(y) = \|g_y - g\|_{[a,b]}$.
Σύμφωνα με τον ορισμό, το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ αν και μόνο αν $\lim_{y\to+\infty} F(y) = 0$. Τώρα, θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στο $[c,+\infty)$ ώστε $y_n\to+\infty$ και τις αντίστοιχες συναρτήσεις $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$ για κάθε $x\in I$. Επειδή η (g_{y_n}) συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $[a,b]$, συνεπάγεται $F(y_n) = \|g_{y_n} - g\|_{[a,b]} \to 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty} F(y) = 0$. □

Για την εφαρμογή των θεωρημάτων 12.5 και 12.6 χρειαζόμαστε ένα κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Θα δούμε, τώρα, ένα σημαντικό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων, το οποίο είναι το ανάλογο του κριτηρίου Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.7. *Έστω διάστημα I και $f : I\times[c,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $F : [c,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|f(x,y)| \le F(y)$ για κάθε $y\in[c,+\infty)$, $x\in I$. Αν το $\int_c^{+\infty} F(y)\,dy$ συγκλίνει, τότε το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Βάσει της πρότασης 12.12, για κάθε $x\in I$ το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει. Άρα ορίζεται η $g : I\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$. Ορίζουμε, επίσης, και τις $g_y : I\to\mathbb{R}$ με τύπους $g_y(x) = \int_c^y f(x,t)\,dt$.
Μένει να δούμε αν το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ *ομοιόμορφα* στο I ή, ισοδύναμα, αν $\lim_{y\to+\infty}\|g_y - g\|_I = 0$.
Για κάθε $y\in[c,+\infty)$, $x\in I$ είναι

$$\begin{aligned}|g(x) - g_y(x)| &= \Big|\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dt - \int_c^y f(x,t)\,dt\Big| = \Big|\int_y^{+\infty} f(x,t)\,dt\Big| \le \int_y^{+\infty} |f(x,t)|\,dt\\ &\le \int_y^{+\infty} F(t)\,dt,\end{aligned}$$

οπότε
$$\|g_y - g\|_I \le \int_y^{+\infty} F(t)\,dt = \int_c^{+\infty} F(t)\,dt - \int_c^y F(t)\,dt.$$
Επειδή $\lim_{y\to+\infty}\int_c^y F(t)\,dt = \int_c^{+\infty} F(t)\,dt$, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty}\|g_y - g\|_I = 0$. $\square$

Παράδειγμα 12.4.5. Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ με παράμετρο x.
Ισχύει $|e^{-y}\sin(xy)| \le e^{-y}$ για κάθε $y\in[0,+\infty)$, $x\in\mathbb{R}$ και το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy$ συγκλίνει.
Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 12.7, το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή,
$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x) \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$
Από το θεώρημα 12.5 συνεπάγεται ότι η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Ειδικότερα, ισχύει $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x)$ στο $\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα,
$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy \qquad \text{για κάθε } x.$$
Η συνάρτηση $e^{-y}\sin(xy)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 12.5, η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Η μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης $e^{-y}\sin(xy)$ είναι η $ye^{-y}\cos(xy)$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Επίσης, ισχύει $|ye^{-y}\cos(xy)| \le ye^{-y}$ για κάθε $y\in[0,+\infty)$, $x\in\mathbb{R}$ και το $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy$ συγκλίνει.
Άρα το $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή,
$$\int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy \overset{\text{ομ}}{=} h(x) \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$
Και, επειδή το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$, από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει
$$g'(x) = h(x) = \int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy \qquad \text{για κάθε } x.$$
Παρεμπιπτόντως, μπορούμε να υπολογίσουμε το $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ με ολοκληρώσεις κατά μέρη:
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy &= -\int_0^{+\infty} \tfrac{d\,e^{-y}}{dy}\sin(xy)\,dy\\ &= -\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\sin(xy) + x\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(xy)\,dy\\ &= -x\int_0^{+\infty} \tfrac{d\,e^{-y}}{dy}\cos(xy)\,dy\\ &= -x\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cos(xy) + x - x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)dy\\ &= x - x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)dy.\end{aligned}$$
Χρησιμοποιήσαμε τα όρια $\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\sin(xy) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cos(xy) = 0$, τα οποία ισχύουν διότι $|e^{-y}\sin(xy)| \le e^{-y}$ και $|e^{-y}\cos(xy)| \le e^{-y}$.
Άρα
$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy = \tfrac{x}{1+x^2}.$$
Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε κατ' ευθείαν τους τύπους στο παράδειγμα 7.3.7.

Παράδειγμα 12.4.6. Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ με παράμετρο $x>0$.
Ισχύει $\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right| \le e^{-xy}$ για κάθε $y\in(0,+\infty)$ και κάθε $x\in(0,+\infty)$ και το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει.
Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 12.12, το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και ορίζει συνάρτηση
$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy \qquad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Μπορούμε, δηλαδή, να πούμε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x)$ στο $(0,+\infty)$.
Έστω $a > 0$. Παρατηρούμε ότι $\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right| \leq e^{-xy} \leq e^{-ay}$ για κάθε $y \in (0,+\infty)$ και $x \in [a,+\infty)$. Το $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy$ συγκλίνει, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 12.7, το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Με άλλα λόγια,

$$\text{για κάθε } a > 0: \qquad \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x) \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Η συνάρτηση $e^{-xy}\frac{\sin y}{y}$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)\times(0,+\infty)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 12.5, η g είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $a > 0$, συνεπάγεται ότι η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.
Η μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης $e^{-xy}\frac{\sin y}{y}$ είναι η $-e^{-xy}\sin y$, η οποία είναι συνεχής στο $[a,+\infty)\times(0,+\infty)$. Επίσης, ισχύει $|-e^{-xy}\sin y| \leq e^{-xy} \leq e^{-ay}$ για κάθε $y \in (0,+\infty)$, $x \in [a,+\infty)$ και το $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy$ συγκλίνει. Άρα το $-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Δηλαδή,

$$\text{για κάθε } a > 0: \qquad -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy \overset{\text{ομ}}{=} h(x) \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty)$ και ισχύει

$$g'(x) = h(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy \qquad \text{για κάθε } x \in [a,+\infty).$$

Μετά από αλλαγή μεταβλητής, $g'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(\frac{y}{x})\,dy$, οπότε από το παράδειγμα 12.4.5 συνεπάγεται ότι ισχύει

$$g'(x) = -\tfrac{1}{x^2+1} \qquad \text{για κάθε } x \in [a,+\infty).$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $a > 0$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$g'(x) = -\tfrac{1}{x^2+1} = -\arctan' x \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει

$$g(x) = -\arctan x + c \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Τώρα, είναι

$$|g(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy}\left|\tfrac{\sin y}{y}\right|dy \leq \int_0^{-\infty} e^{-xy}\,dy = \tfrac{1}{x}$$

για κάθε $x > 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα $0 = -\lim_{x\to+\infty}\arctan x + c$, οπότε $c = \frac{\pi}{2}$. Άρα ισχύει

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy = \tfrac{\pi}{2} - \arctan x \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(y) = \int_0^y \frac{\sin t}{t}\,dt$.
Σύμφωνα με το παράδειγμα 12.3.5, το $A = \lim_{y\to+\infty} F(y) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ υπάρχει και είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy = A$.
Κατ' αρχάς, είναι σαφές ότι ισχύει $F'(y) = \frac{\sin y}{y}$ για κάθε $y > 0$.
Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} A - \int_0^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy &= \int_0^{+\infty}(1-e^{-xy})\tfrac{\sin y}{y}\,dy = \int_0^{+\infty}(1-e^{-xy})\tfrac{d(F(y)-A)}{dy}\,dy \\ &= -x\int_0^{+\infty} e^{-xy}(F(y)-A)\,dy, \end{aligned}$$

οπότε

$$\left|A - \int_0^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy\right| \leq x\int_0^{+\infty} e^{-xy}|F(y)-A|\,dy.$$

Η συνάρτηση F είναι φραγμένη στο $[0,+\infty)$ διότι είναι συνεχής και το $\lim_{y\to+\infty} F(y)=A$ είναι αριθμός. Άρα υπάρχει $M\geq 0$ ώστε να ισχύει $|F(y)-A|\leq M$ για κάθε $y\geq 0$.
Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $y_0>0$ ώστε να ισχύει $|F(y)-A|<\frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $y\geq y_0$. Επειδή $\lim_{x\to 0+} e^{-xy_0}=1$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $1-e^{-xy_0}<\frac{\epsilon}{4M+1}$ για κάθε $x\in(0,\delta)$. Τότε, για κάθε $x\in(0,\delta)$ ισχύει

$$\begin{aligned}\left|A-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy\right| &\leq x\int_0^{y_0} e^{-xy}|F(y)-A|\,dy + x\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}|F(y)-A|\,dy\\ &\leq Mx\int_0^{y_0} e^{-xy}\,dy+\tfrac{\epsilon}{4}x\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\,dy\\ &= M(1-e^{-xy_0})+\tfrac{\epsilon}{4}e^{-xy_0}\leq\tfrac{\epsilon}{4}+\tfrac{\epsilon}{4}<\epsilon\end{aligned}$$

και, επομένως, αποδείξαμε ότι $\lim_{x\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy=A$.
Άρα $A=\lim_{x\to 0+}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)=\frac{\pi}{2}$, οπότε

$$\int_0^{+\infty}\tfrac{\sin y}{y}\,dy=\tfrac{\pi}{2}.^7$$

Ασκήσεις.

12.4.1. Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos(2xy)\,dy$ με παράμετρο x.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos(2xy)\,dy\overset{\text{ομ}}{=}g(x)$ στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $g'(x)+2xg(x)=0$ για κάθε x. Κατόπιν, αποδείξτε ότι ισχύει $g(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$ για κάθε x.

12.4.2. Συνέχεια της άσκησης 12.3.7.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, το $\int_1^{+\infty}\frac{\phi_n(t)}{t^{x+n+1}}\,dt$ με παράμετρο x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $(-n,+\infty)$ και, για κάθε $a>-n$, ομοιόμορφα στο διάστημα $[a,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\zeta(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και ότι η $(x-1)\zeta(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$.

12.4.3. Με βάση το $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$, αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\,dx=\frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^4}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^4}{x^4}\,dx=\frac{\pi}{3}$.

12.4.4. Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\sin y}{y}\,dy$ με παράμετρο $x\geq 0$.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$. Δηλαδή, $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\sin y}{y}\,dy\overset{\text{κ.σ.}}{=}g(x)$ στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$. Δηλαδή, $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\sin y}{y}\,dy\overset{\text{ομ}}{=}g(x)$ στο $[0,a]$ για κάθε $a>0$.
Αποδείξτε ότι η $g(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και ότι ισχύει $g''(x)-g(x)=-\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x\geq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $g(x)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-x})$ για κάθε $x\geq 0$.
Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy=\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{\pi}{2}$.

12.4.5. [α] Έστω ότι η $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη στο $[0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} x\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(y)\,dy=l$.
[β] Έστω ότι η $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη στο $(0,1]$ και $\lim_{x\to 0+} f(x)=l$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x\int_0^1 y^{x-1}f(y)\,dy=l$.

[7] Δυο ακόμη υπολογισμοί αυτού του ολοκληρώματος είναι στις ασκήσεις 12.3.12 και 12.4.4. Παρόμοιοι υπολογισμοί, αλλά με άλλη αφορμή, υπάρχουν στην άσκηση 12.4.5. Όμως, η βαθύτερη “αρχή” πίσω από αυτούς τους υπολογισμούς εκτίθεται στην άσκηση 12.4.12 και δεν είναι άλλη από τις ιδέες των κριτηρίων του Dirichlet και του Abel.

12.4.6. Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy$ με παράμετρο x.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο $(-\infty, a]$ και στο $[a, +\infty)$.
Ποιά είναι η $g(x)$;

12.4.7. Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} \frac{\cos y}{y+\sin x}\,dy$ με παράμετρο x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{x+y}\,dy$ με παράμετρο $x \geq 0$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin \frac{y}{x}\,dy$ με παράμετρο $x > 0$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$.

12.4.8. [α] Έστω η $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}\,, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}\,, & \text{αν } 0 \leq y < x \leq 1 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\,dy \big)\,dx \neq \int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\,dx \big)\,dy$.
[β] Έστω $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$. Γνωρίζουμε ότι η $\int_c^d f(x,y)\,dy$ είναι, ως συνάρτηση του x, συνεχής στο $[a,b]$. Άρα ορίζεται το $\int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\,dy \big)\,dx$. "Συμμετρικά", η $\int_a^b f(x,y)\,dx$ είναι, ως συνάρτηση του y, συνεχής στο $[c,d]$. Άρα ορίζεται και το $\int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx \big)\,dy$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

[γ] Έστω $f : [a,b] \times [c,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b] \times [c,+\infty)$ και έστω ότι το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Γνωρίζουμε ότι η $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ είναι, ως συνάρτηση του x, συνεχής στο $[a,b]$. Άρα ορίζεται το $\int_a^b \big(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \big)\,dx$. "Συμμετρικά", η $\int_a^b f(x,y)\,dx$ είναι, ως συνάρτηση του y, συνεχής στο $[c,+\infty)$. Αποδείξτε ότι το $\int_c^{+\infty} \big(\int_a^b f(x,y)\,dx \big)\,dy$ συγκλίνει και ότι

$$\int_a^b \Big(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_c^{+\infty} \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

[δ] Αν $0 < a < b$, αποδείξτε ότι $\int_a^b \big(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy \big)\,dx = \int_0^{+\infty} \big(\int_a^b e^{-xy}\,dx \big)\,dy$.
Υπολογίστε το $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}\,dy$.
[ε] Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \big(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dy \big)\,dx = \int_0^{+\infty} \big(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx \big)\,dy$.
Αποδείξτε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\sin t)}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2} \log(1+\sqrt{2})$.

12.4.9. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin y)\,dy$ με παράμετρο x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, ότι η $g(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης[8] $xy'' + y' + xy = 0$ στο $\mathbb{R}$.

12.4.10. Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cosh(xy)\,dy$ με παράμετρο x.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και, για κάθε $a > 0$, ομοιόμορφα στο $[-a, a]$.
Αποδείξτε ότι η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $2g'(x) - xg(x) = 0$ για κάθε x.
Βρείτε τον τύπο της $g(x)$.

[8] Αυτή η διαφορική εξίσωση ονομάζεται **διαφορική εξίσωση του Bessel** τάξης 0.

12.4.11. Θεωρήστε το $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)\arctan(yt)}{t^2}\,dt$ με δυο παραμέτρους $x,y>0$.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x,y)$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $g(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη και ως προς τις δυο μεταβλητές και ότι η μικτή παράγωγος της g είναι $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}\,dt=\frac{1}{x+y}$ για κάθε $x,y>0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $g(x,y)=(x+y)\log(x+y)-x\log x-y\log y$ για κάθε $x,y>0$.

12.4.12. Έστω διάστημα I, $f,g:I\times[c,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $F(x,y)=\int_c^y f(x,t)\,dt$ για κάθε $x\in I$ και $y\in[c,+\infty)$ και έστω ότι οι f, $\frac{\partial g}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο $I\times[c,+\infty)$.
[α] Αν για κάθε $x\in I$ η $g(x,y)$ είναι, ως συνάρτηση του y, φθίνουσα στο $[c,+\infty)$, αν ισχύει $\lim_{y\to+\infty}g(x,y)=0$ ομοιόμορφα στο I και αν η F είναι φραγμένη στο $I\times[c,+\infty)$, αποδείξτε ότι το $\int_c^{+\infty}f(x,y)g(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I.
[β] Αν για κάθε $x\in I$ η $g(x,y)$ είναι, ως συνάρτηση του y, φθίνουσα στο $[c,+\infty)$, αν η $g(x,y)$ είναι κάτω φραγμένη στο $I\times[c,+\infty)$ και αν το $\int_c^{+\infty}f(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I, αποδείξτε ότι το $\int_c^{+\infty}f(x,y)g(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I.

12.4.13. Για την απόδειξη του $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}$ χρειαστήκαμε το $\lim_{x\to0+}\int_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy=A$, όπου $A=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy$. Αποδείξτε το όριο αυτό χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 12.4.12[β] και τις $f(x,y)=\frac{\sin y}{y}$ και $g(x,y)=e^{-xy}$ στο $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

12.4.14. Μερικά ακόμη συμπεράσματα για τις συναρτήσεις Hermite στην άσκηση 5.5.22.
Θεωρούμε, προσωρινά, τις συναρτήσεις $\phi_n(x)=H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}=(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}\psi_n(x)$.
Βάσει της άσκησης 5.5.22 αποδείξτε ότι ισχύει

$$(i)\quad \phi_{n+1}(x)=x\phi_n(x)-\phi_n{}'(x),\qquad (ii)\quad \phi_n{}''(x)=(x^2-2n-2)\phi_n(x)$$

για κάθε x και κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.
Από την (ii) αποδείξτε ότι $\frac{d}{dx}\big(\phi_m(x)\phi_n{}'(x)-\phi_m{}'(x)\phi_n(x)\big)=2(m-n)\phi_m(x)\phi_n(x)$ για κάθε x και κάθε $m,n\in\mathbb{Z}$, $m,n\geq 0$. Να συμπεράνετε ότι $2(m-n)\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx=0$ για κάθε $m,n\in\mathbb{Z}$, $m,n\geq 0$ και, επομένως, ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\psi_n(x)\,dx=0,\qquad \text{αν }\ m,n\in\mathbb{Z},\ \ m,n\geq 0,\ \ m\neq n.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη, αποδείξτε ότι $2\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi_n(x)\phi_n{}'(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_n(x))^2\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.
Από τα προηγούμενα αποδείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_{n+1}(x))^2\,dx=2(n+1)\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_n(x))^2\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$ και συμπεράνατε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_{n+1}(x))^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_n(x))^2\,dx$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα του Gauss, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_n(x))^2\,dx=1,\qquad \text{αν }\ n\in\mathbb{Z},\ \ n\geq 0.$$

12.5 Η συνάρτηση Γ.

Θεωρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα[9]

$$\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}\,dy$$

[9] Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται **δεύτερο ολοκλήρωμα του Euler**. Για το πρώτο ολοκλήρωμα του Euler δείτε την άσκηση 12.5.8.

με παράμετρο $x \in (0, +\infty)$.

Αν $x > 1$, η $y^{x-1}e^{-y}$ ως συνάρτηση του y είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Στο παράδειγμα 12.2.3 αποδείξαμε ότι το $\int_1^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ συγκλίνει. Επίσης, το $\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,dy$ υφίσταται ως απλό ολοκλήρωμα. Επομένως, το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ συγκλίνει και η τιμή του είναι το άθροισμα των δυο προηγουμένων.

Αν $x \leq 1$, η $y^{x-1}e^{-y}$ ως συνάρτηση του y είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Το $\int_1^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ συγκλίνει και πάλι. Το $\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,dy$ είναι, τώρα, κι αυτό γεν. ολοκλήρωμα (μη-αρνητικής συνάρτησης) και βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,dy \leq \int_0^1 y^{x-1}\,dy < +\infty$$

όταν $0 < x \leq 1$. Άρα, αν $0 < x \leq 1$, το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ συγκλίνει και η τιμή του είναι το άθροισμα των δυο προηγουμένων.
Άρα, σε κάθε περίπτωση, αν $x > 0$, το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ συγκλίνει.

Θεωρούμε, επίσης, για κάθε n, το

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy.$$

Τώρα, η $y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}$, ως συνάρτηση του y, είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και χωρίζουμε το γεν. ολοκλήρωμα σε δυο γεν. ολοκληρώματα. Αφ' ενός είναι

$$\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \leq \int_1^{+\infty} y^{x+n-1}e^{-y}\,dy < +\infty.$$

Αφ' ετέρου,

$$\int_0^1 y^{x-1}|\log y|^n e^{-y}\,dy \leq \int_0^1 y^{x-1}|\log y|^n\,dy = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,dt = \tfrac{1}{x^{n+1}}\int_0^{+\infty} s^n e^{-s}\,ds < +\infty$$

όταν $x > 0$. Άρα τα $\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ και $\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνουν όταν $x > 0$, οπότε και το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει.

ΛΗΜΜΑ 12.2. *Τα* $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ *και* $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ *συγκλίνουν για κάθε* $x > 0$ *και* $n \in \mathbb{N}$. *Επίσης, τα γενικευμένα αυτά ολοκληρώματα συγκλίνουν σε αντίστοιχες συναρτήσεις ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα* $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.

Απόδειξη. Είδαμε προηγουμένως ότι τα δυο γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν για κάθε $x > 0$. Για συντομία, εδώ θα θεωρήσουμε το πρώτο γεν. ολοκλήρωμα ως ειδική περίπτωση του δεύτερου με $n = 0$. Έχουμε, λοιπόν, ότι το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$. Δηλαδή,

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x) \qquad \text{στο } (0, +\infty). \tag{12.9}$$

Θεωρούμε a, b ώστε $0 < a \leq b < +\infty$ και $x \in [a, b]$.
Αν $y \geq 1$, τότε

$$|y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}| \leq y^{n+x-1}e^{-y} \leq y^{n+b-1}e^{-y}$$

και, επειδή $\int_1^{+\infty} y^{n+b-1}e^{-y}\,dy < +\infty$, το $\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Δηλαδή,

$$\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \overset{\text{ομ}}{=} h(x) \qquad \text{στο } [a, b]. \tag{12.10}$$

Αν $0 < y \leq 1$, τότε

$$|y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}| \leq y^{a-1}|\log y|^n$$

και, επειδή $\int_0^1 y^{a-1}|\log y|^n\,dy < +\infty$, το $\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $q(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \overset{\text{ομ}}{=} q(x) \qquad \text{στο } [a, b]. \tag{12.11}$$

Από τις (12.10) και (12.11) συνεπάγεται ότι

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \overset{\text{ομ}}{=} q(x)+h(x) \qquad \text{στο } [a,b].$$

Άρα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} q(x)+h(x)$ στο $[a,b]$, οπότε η (12.9) συνεπάγεται $q(x)+h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και, επομένως,

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x) \qquad \text{στο } [a,b].$$

$\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η συνάρτηση που ορίζεται από το* $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ *συμβολίζεται* $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *και ονομάζεται* **συνάρτηση** Γ. *Δηλαδή,*

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy \qquad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Η συνάρτηση Γ είναι εξαιρετικά σημαντική.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.14. *Η* Γ *είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο* $(0,+\infty)$ *και*

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \qquad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty),\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Έστω $\xi\in(0,+\infty)$. Θεωρούμε a,b ώστε $0<a<\xi<b<+\infty$ και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y^{x-1}e^{-y}$ και η μερική παράγωγός της ως προς x, δηλαδή η $y^{x-1}(\log y)e^{-y}$, είναι συνεχείς στο $[a,b]\times(0,+\infty)$.
Σύμφωνα με το Λήμμα 12.2, τα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)e^{-y}\,dy$ συγκλίνουν σε κάποιες συναρτήσεις - το πρώτο στην $\Gamma(x)$ - ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Άρα από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι η Γ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και, ειδικότερα,

$$\Gamma'(\xi)=\int_0^{+\infty} y^{\xi-1}(\log y)e^{-y}\,dy.$$

Επαναλαμβάνουμε με τη συνάρτηση $y^{x-1}(\log y)e^{-y}$ και τη μερική της παράγωγο ως προς x, δηλαδή την $y^{x-1}(\log y)^2e^{-y}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a,b]\times(0,+\infty)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 12.2, τα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)e^{-y}\,dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^2e^{-y}\,dy$ συγκλίνουν σε κάποιες συναρτήσεις ομοιόμορφα στο $[a,b]$, οπότε από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι

$$\Gamma''(\xi)=\int_0^{+\infty} y^{\xi-1}(\log y)^2e^{-y}\,dy.$$

Η επαγωγική γενίκευση για παραγώγους ανώτερης τάξης είναι προφανής. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.15. *Η συνάρτηση* Γ *έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*
(i) *Ισχύει* $\Gamma(x)>0$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$.
(ii) $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$ *και* $\lim_{x\to0+}\Gamma(x)=+\infty$.
(iii) *Ισχύει* $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$.
(iv) $\Gamma(1)=1$ *και ισχύει* $\Gamma(n)=(n-1)!$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.
(v) *Η* $\log\Gamma$ *είναι κυρτή στο* $(0,+\infty)$.

Απόδειξη. (i) Επειδή ισχύει $y^{x-1}e^{-y}>0$ για κάθε $y>0$, συνεπάγεται

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy\geq 0.$$

Για τη γνήσια ανισότητα, παρατηρούμε ότι η τιμή της $y^{x-1}e^{-y}$ για $y=1$ είναι $\frac{1}{e}>0$, οπότε, λόγω συνέχειας, υπάρχουν c,d ώστε $0<c<1<d<+\infty$ και ώστε να ισχύει $y^{x-1}e^{-y}\geq\frac{1}{2e}$ για κάθε $y\in[c,d]$. Συνεπάγεται

$$\Gamma(x)\geq\int_c^d \frac{1}{2e}\,dy=\frac{d-c}{2e}>0.$$

(ii) Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\Gamma(x) \geq \int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,dy \geq e^{-1}\int_0^1 y^{x-1}\,dy = \tfrac{1}{ex}.$$

Άρα $\lim_{x\to 0+}\Gamma(x) = +\infty$.
Επίσης, για κάθε $x \geq 1$ ισχύει

$$\Gamma(x) \geq \int_2^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy \geq 2^{x-1}\int_2^{+\infty} e^{-y}\,dy = 2^{x-1}e^{-2}.$$

Άρα $\lim_{x\to +\infty}\Gamma(x) = +\infty$.
(iii) Με ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ότι

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} y^x e^{-y}\,dy = x\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy = x\Gamma(x).$$

(iv) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 1$. Από την $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, με την αρχή της επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3!$ και, γενικότερα, ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$.
(v) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και κάθε t έχουμε

$$t^2\Gamma''(x) + 2t\Gamma'(x) + \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}(t\log y + 1)^2 e^{-y}\,dy \geq 0.$$

Άρα ισχύει $\Gamma''(x)\Gamma(x) \geq (\Gamma'(x))^2$ και, επομένως, $(\log\Gamma)''(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. $\square$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση Γ είναι ορισμένη σε ολόκληρο το διάστημα $(0,+\infty)$ και στα σημεία του $\mathbb{N}$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση *παραγοντικό*:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Στις επόμενες ασκήσεις μελετώνται διάφορες σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης Γ. Για παράδειγμα, στην άσκηση 12.5.9 αποδεικνύεται ένας τύπος για τον όγκο μιας μπάλας ακτίνας 1 στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$ συναρτήσει της Γ.

Ασκήσεις.

12.5.1. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 (\log\frac{1}{y})^{x-1}\,dy = \Gamma(x)$ για κάθε $x > 0$.

12.5.2. Στην απόδειξη της πρότασης 12.15 υπάρχει η ανισότητα $\Gamma''(x)\Gamma(x) \geq (\Gamma'(x))^2$ η οποία είναι ισοδύναμη με την κυρτότητα της $\log\Gamma(x)$. Αποδείξτε την ανισότητα αυτή με δεύτερο τρόπο χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky της άσκησης 12.3.13.

12.5.3. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα του Gauss, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, και κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής αποδείξτε ότι $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$. Αποδείξτε ότι

$$\Gamma\big(n + \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} \qquad \text{για κάθε } \ n \in \mathbb{Z},\ \ n \geq 0.$$

12.5.4. Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι $x > 1$.
Αποδείξτε ότι, αν $a > 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}$ συγκλίνει, ως σειρά συναρτήσεων του y, ομοιόμορφα στη συνάρτηση $\frac{y^{x-1}}{e^y-1}$ στο $[a,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b e^{-ny}y^{x-1}\,dy \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy$, αν $0 < a < b < +\infty$. Να συμπεράνετε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy$.
Αποδείξτε ότι για κάθε n ισχύει $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} e^{-ky}y^{x-1}\,dy \leq \int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy$. Να συμπεράνετε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy \leq \int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy$.
Από τα προηγούμενα συνεπάγεται αμέσως ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy = \int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy \qquad \text{για κάθε } \ x > 1.$$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy=\frac{\Gamma(x)}{n^x}$.
Συνέχεια των ασκήσεων 12.4.2 και 12.3.7. Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\zeta(x)\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy \qquad \text{για κάθε } x>1.$$

12.5.5. Αποδείξτε ότι $\int_0^n y^{x-1}(1-\frac{y}{n})^n\,dy\to\Gamma(x)$ για κάθε $x>0$.
Αποδείξτε με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη ότι $\int_0^n y^{x-1}(1-\frac{y}{n})^n\,dy=\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ και, επομένως, ότι ισχύει ο **τύπος του Gauss**:[10]

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\to\Gamma(x) \qquad \text{για κάθε } x>0.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss με $x=\frac{1}{2}$ βρίσκουμε με δεύτερο τρόπο τον τύπο του Wallis στην άσκηση 7.3.11.
Αποδείξτε ότι ισχύει ο λεγόμενος **τύπος διπλασιασμού**:

$$\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}\,2^{1-2x}\Gamma(2x) \qquad \text{για κάθε } x>0.$$

Βάσει του τύπου του Gauss, αποδείξτε ότι

$$\log\Gamma(x)=-\gamma x-\log x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{x}{n}-\log(1+\tfrac{x}{n})\right) \qquad \text{για κάθε } x>0$$

όπου $\gamma=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$ είναι η σταθερά του Euler στις ασκήσεις 2.4.6, 6.4.11 και 7.3.20.

12.5.6. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: (i) ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, (ii) $f(1)=1$, (iii) ισχύει $f(x+1)=xf(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και (iv) η $\log f$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\to f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Συμπεράνατε ότι μια συνάρτηση f με τις παραπάνω ιδιότητες είναι μοναδική και, επειδή η Γ έχει τις ιδιότητες αυτές, ισχύει $f=\Gamma$ και έχουμε αυτομάτως μια δεύτερη απόδειξη του τύπου του Gauss της άσκησης 12.5.5.

12.5.7. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)} \qquad \text{για κάθε } x>0,$$

όπου $\gamma=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$ είναι η σταθερά του Euler στις ασκήσεις 2.4.6, 6.4.11 και 7.3.20.

12.5.8. Ορίζουμε τη συνάρτηση δυο μεταβλητών[11]

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad \text{για κάθε } x,y>0.$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση B**.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$ για κάθε $x,y>0$ και ότι ισχύει $\mathrm{B}(x,1)=\frac{1}{x}$ και $\mathrm{B}(1,y)=\frac{1}{y}$ για κάθε $x,y>0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\mathrm{B}(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\,\mathrm{B}(x,y)$ για κάθε $x,y>0$ με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής και ολοκληρώσεις κατά μέρη.
Αποδείξτε ότι, θεωρώντας τον $y>0$ σταθερό και παραγωγίζοντας ως προς τον x, είναι $\mathrm{B}'(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\log t\,dt$ και $\mathrm{B}''(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\log t)^2\,dt$. Κατόπιν, μιμηθείτε την απόδειξη του ότι η $\log\Gamma$ είναι κυρτή και αποδείξτε ότι, με σταθερό $y>0$, η $\log\mathrm{B}(x,y)$ είναι, ως

[10] Δεύτερη απόδειξη του τύπου του Gauss στην άσκηση 12.5.6.
[11] Το ολοκλήρωμα ονομάζεται **πρώτο ολοκλήρωμα του Euler**.

συνάρτηση του x, κυρτή στο $(0, +\infty)$.
Για κάθε $y > 0$, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\Gamma(y)}\,\mathrm{B}(x,y)\Gamma(x+y)$ για $x \in (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η f έχει τις εξής ιδιότητες: (i) ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, (ii) $f(1) = 1$, (iii) ισχύει $f(x+1) = xf(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και (iv) η $\log f$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. Βάσει της άσκησης 12.5.6, συμπεράνατε ότι $f = \Gamma$, οπότε

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \text{για κάθε } \ x, y > 0.$$

Ξαναδείτε την άσκηση 7.3.13.

12.5.9. Έστω V_d ο όγκος μιας μπάλας με ακτίνα 1 στον d-διάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$. Για παράδειγμα: $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4\pi}{3}$.
Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Γνωρίζουμε ότι, αν μια μπάλα στον $\mathbb{R}^k$ έχει ακτίνα $r > 0$, τότε ο όγκος της είναι $r^k V_k$. Θεωρήστε την μπάλα στον $\mathbb{R}^k$ με κέντρο την αρχή των αξόνων 0 και ακτίνα 1 και παρατηρήστε ότι για κάθε $x_1 \in [-1, 1]$ η διατομή της η οποία είναι κάθετη στον x_1-άξονα στο σημείο x_1 είναι μια μπάλα στον $\mathbb{R}^{k-1}$ με ακτίνα $\sqrt{1 - {x_1}^2}$, οπότε ο όγκος αυτής της διατομής είναι $(1 - {x_1}^2)^{\frac{k-1}{2}} V_{k-1}$. Επομένως, αποδείξτε ότι

$$V_k = V_{k-1} \int_{-1}^{1} (1 - {x_1}^2)^{\frac{k-1}{2}}\, dx_1 = V_{k-1} \int_{0}^{1} (1 - t)^{\frac{k-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Βάσει της άσκησης 12.5.8 και, κατόπιν, του $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ από την άσκηση 12.5.3, ισχύει

$$V_k = V_{k-1} B(\tfrac{k+1}{2}, \tfrac{1}{2}) = V_{k-1} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = \sqrt{\pi} V_{k-1} \frac{\Gamma(\frac{k-1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}.$$

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο, αποδείξτε ότι $V_d = \pi^{\frac{d-1}{2}} V_1 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ και συμπεράνατε ότι

$$V_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}.$$

Κεφάλαιο 13

Η αξιωματική θεμελίωση.

13.1 Οι φυσικοί και τα αξιώματα του Peano.

Θεωρούμε δεδομένο ένα σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{N}$ και του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε **φυσικούς**. Δεχόμαστε, επίσης, ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει τις εξής πρωταρχικές ιδιότητες, οι οποίες δεν αποδεικνύονται και γι αυτό ονομάζονται **αξιώματα**, τα αξιώματα του **Peano**, και από τις οποίες αποδεικνύονται (σύμφωνα με τους στοιχειώδεις κανόνες της λογικής) όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbb{N}$.

Τα Αξιώματα του Peano:

1. *Το $\mathbb{N}$ έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, το οποίο συμβολίζουμε* 1.
2. *Σε κάθε $n \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένας $n' \in \mathbb{N}$, ο οποίος ονομάζεται* **επόμενος** *του n.*
3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n' \neq 1$.*
   Δηλαδή, ο 1 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού.
4. *Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n' = m'$, τότε $n = m$.*
   Ισοδύναμα, αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \neq m$, τότε $n' \neq m'$.
5. *Έστω ότι ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{N}$ έχει τις ιδιότητες: (i) $1 \in K$ και (ii) αν $n \in K$, τότε $n' \in K$.*
   Τότε $K = \mathbb{N}$.

Το Αξίωμα 2 λέει ότι η απεικόνιση $n \mapsto n'$ είναι *συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και σύνολο τιμών υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τώρα, το Αξίωμα 3 λέει ότι ο 1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής και το Αξίωμα 4 λέει ότι η συνάρτηση αυτή είναι ένα-προς-ένα. Το Αξίωμα 5 ονομάζεται και **Αξίωμα της Επαγωγής** ή **Αρχή της Επαγωγής**.

Πρόσθεση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n' \neq n$.*

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ για τους οποίους ισχύει $n' \neq n$. Από τα Αξιώματα 1 και 3 συνεπάγεται $1 \in K$. Έστω $n \in K$. Τότε $n \in \mathbb{N}$ και $n' \neq n$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται $(n')' \neq n'$ και, επομένως, $n' \in K$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής συνεπάγεται $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.2. *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ υπάρχει ακριβώς ένας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$.*

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο με στοιχεία τον 1 και κάθε $m \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$. Τότε, κατ' αρχάς, $1 \in K$. Έστω $m \in K$. Τότε $m' \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ (συγκεκριμένα: ο m) ώστε $n' = m'$. Άρα $m' \in K$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής συνεπάγεται $K = \mathbb{N}$. Άρα κάθε $m \in \mathbb{N}$ ανήκει στο K, οπότε, αν $m \neq 1$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται ότι ο $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $n' = m$ είναι μοναδικός. □

Η πρόταση 13.2 λέει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $n \mapsto n'$ είναι ακριβώς το $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, οπότε, σύμφωνα και με τα προηγούμενα συμπεράσματα, η συνάρτηση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.1. *Υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με τις εξής ιδιότητες:* (i) *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $\phi(n, 1) = n'$ *και* (ii) *για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $\phi(n, m') = (\phi(n, m))'$.

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$.
Κατ' αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_1(m) = m'$. Τότε (i) $f_1(1) = 1'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_1(m') = (m')' = (f_1(m))'$.
Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = (f_n(m))'$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = (f_n(1))' = (n')'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_{n'}(m') = (f_n(m'))' = ((f_n(m))')' = (f_{n'}(m))'$. Άρα $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$.
Τώρα, ορίζουμε $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $\phi(n, m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n, 1) = f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m') = f_n(m') = (f_n(m))' = (\phi(n, m))'$.
Τώρα θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση ϕ με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, 1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, m') = (\psi(n, m))'$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n, 1) = n' = \psi(n, 1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $\phi(n, m') = (\phi(n, m))' = (\psi(n, m))' = \psi(n, m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το στοιχείο* $\phi(n, m) \in \mathbb{N}$ *που, σύμφωνα με το θεώρημα 13.1, αντιστοιχίζεται στους* $n, m \in \mathbb{N}$ *ονομάζεται* ***άθροισμα*** *των* n, m *και συμβολίζεται*

$$n + m.$$

Δηλαδή, $n + m = \phi(n, m)$. *Η πράξη που σε κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *αντιστοιχίζει το άθροισμά τους ονομάζεται* ***πρόσθεση*** *στο* $\mathbb{N}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα 13.1 και με την απόδειξή του, η πρόσθεση έχει τις εξής ιδιότητες: $n+1 = \phi(n, 1) = n'$, $1+n = \phi(1, n) = f_1(n) = n'$, $n+m' = \phi(n, m') = (\phi(n, m))' = (n+m)'$ και $n' + m = \phi(n', m) = f_{n'}(m) = (f_n(m))' = (\phi(n, m))' = (n + m)'$. Συνοπτικά:

$$n + 1 = n' = 1 + n, \qquad n + m' = (n + m)' = n' + m.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.3. *Για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $n + m = m + n$.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n + m = m + n$.
Ισχύει $n + 1 = n' = 1 + n$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, οπότε $n + m = m + n$. Τότε $n + m' = (n + m)' = (m + n)' = m' + n$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.4. *Για κάθε* $n, m, k \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $(n + m) + k = n + (m + k)$.

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $(n + m) + k = n + (m + k)$.
Ισχύει $(n + m) + 1 = (n + m)' = n + m' = n + (m + 1)$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $(n + m) + k = n + (m + k)$. Τότε $(n + m) + k' = ((n + m) + k)' = (n + (m + k))' = n + (m + k)' = n + (m + k')$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Βάσει της μεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας, οι οποίες εκφράζονται στις προτάσεις 13.3 και 13.4, αντιστοίχως, αποδεικνύεται ότι το τελικό αποτέλεσμα διαδοχικών προσθέσεων δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία γίνονται αυτές οι προσθέσεις. Για παράδειγμα: $(m+n)+(k+l) = ((n+l)+m)+k$, διότι $(m+n)+(k+l) = (n+m)+(l+k) = ((n+m)+l)+k = (n+(m+l))+k = (n+(l+m))+k = ((n+l)+m)+k$. Επομένως, στο εξής θα ακολουθούμε τη συνήθη πρακτική να παραλείπουμε τις παρενθέσεις σε παραστάσεις με αθροίσματα καθώς και να αλλάζουμε τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων. Για παράδειγμα: τα δυο ίσα αθροίσματα $(m+n)+(k+l)$, $((n+l)+m)+k$ θα τα γράφουμε $n+m+k+l$ (ή $n+l+k+m$ ή $k+m+l+n$ κλπ).

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.5. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $m \neq n+m$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $m \neq n+m$.
Ισχύει $1 \neq n' = n+1$, οπότε $1 \in K$. Τώρα, έστω $m \in K$, οπότε $m \neq n+m$. Τότε $m' \neq (n+m)' = n+m'$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.6. *Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$. Αν $m \neq k$, τότε $n+m \neq n+k$.*

Απόδειξη. Έστω $m, k \in \mathbb{N}$, $m \neq k$ και έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n+m \neq n+k$.
Ισχύει $1+m = m' \neq k' = 1+k$, οπότε $1 \in K$. Τώρα, έστω $n \in K$, οπότε $n+m \neq n+k$. Τότε $n'+m = (n+m)' \neq (n+k)' = n'+k$, οπότε $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.7. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: (i) $n = m$, (ii) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$ και (iii) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n+k$. Ο k στα (ii), (iii) είναι μοναδικός.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$.
Κατ' αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, αν $n = 1$, τότε ισχύει το (i) για τον 1. Και, αν $n \neq 1$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = k' = 1+k$, οπότε ισχύει το (ii) για τον 1.
Έστω $m \in K$, οπότε ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$ για τον m. Αν ισχύει το (i) για τον m, τότε $n = m$, οπότε $n+1 = n' = m'$ και, επομένως, ισχύει το (iii) για τον m'. Έστω ότι ισχύει το (ii) για τον m, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$. Αν $k = 1$, τότε $n = m+1 = m'$, οπότε ισχύει το (i) για τον m'. Αν $k \neq 1$, τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $k = l'$, οπότε $n = m+l' = (m+l)' = m'+l$ και, επομένως, ισχύει το (ii) για τον m'. Τέλος, έστω ότι ισχύει το (iii) για τον m, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n+k$. Τότε $m' = (n+k)' = n+k'$, οπότε ισχύει το (iii) για τον m'. Άρα, σε κάθε περίπτωση, για τον m' ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$ και, επομένως, $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$.
Το ότι ο k στα (ii), (iii) είναι μοναδικός είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 13.6.
Τα (i), (ii) δε μπορούν να ισχύουν συγχρόνως λόγω της πρότασης 13.5. Για τον ίδιο λόγο, τα (i), (iii) δε μπορούν να ισχύουν συγχρόνως. Αν ίσχυαν συγχρόνως τα (ii), (iii), δηλαδή αν $n = m+k$ και $m = n+l$ για κάποιους $k, l \in \mathbb{Z}$, τότε θα ήταν $n = m+k = n+l+k = (l+k)+n$, που απαγορεύεται από την πρόταση 13.5. Άρα ισχύει ακριβώς ένα από τα $(i)-(iii)$. □

Διάταξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$, τότε λέμε ότι ο n είναι **μεγαλύτερος από** τον m και γράφουμε $n > m$ ή, ισοδύναμα, ότι ο m είναι **μικρότερος από** τον n και γράφουμε $m < n$.*

Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $n > m$, τότε ο $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $n = m + k$ ονομάζεται ***διαφορά*** *των n, m και συμβολίζεται*

$$n - m.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ αντιστοιχίζει τον $n - m$ ονομάζεται ***αφαίρεση*** *στο $\mathbb{N}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.8. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $n = m$, $n > m$, $n < m$.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της πρότασης 13.7. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $n > m$ ή $n = m$ ή, ισοδύναμα, αν $m < n$ ή $m = n$, τότε λέμε ότι ο n είναι* ***μεγαλύτερος από ή ίσος με*** *τον m και γράφουμε $n \geq m$ ή, ισοδύναμα, ότι ο m είναι* ***μικρότερος από ή ίσος με*** *τον n και γράφουμε $m \leq n$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.9. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$.*
[α] *Αν $n < m$ και $m < k$, τότε $n < k$.*
[β] *Αν $n \leq m$ και $m < k$ ή αν $n < m$ και $m \leq k$, τότε $n < k$.*
[γ] *Αν $n \leq m$ και $m \leq k$, τότε $n \leq k$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $n < m$ και $m < k$. Τότε υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + p$ και $k = m + q$. Συνεπάγεται $k = m + q = n + p + q = n + (p + q)$, οπότε $n < k$.
[β], [γ] Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.10. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $n + m > n$.*

Απόδειξη. Προφανής. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.11. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$. Ισχύει $n < m$ αν και μόνο αν $n + k < m + k$. Επίσης, ισχύει $n = m$ αν και μόνο αν $n + k = m + k$.*

Απόδειξη. Έστω $n < m$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + l$. Άρα $m + k = n + l + k = (n + k) + l$ και, επομένως, $n + k < m + k$.
Έστω $n + k < m + k$. Αν $n = m$, τότε $n + k = m + k$ και, αν $m < n$, τότε $m + k < n + k$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n < m$.
Προφανώς, αν $n = m$, τότε $n + k = m + k$. Έστω $n + k = m + k$. Αν $n < m$, τότε $n + k < m + k$ και, αν $m < n$, τότε $m + k < n + k$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n = m$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.12. *Έστω $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.*
[α] *Αν $n < m$ και $k < l$, τότε $n + k < m + l$.*
[β] *Αν $n \leq m$ και $k < l$ ή αν $n < m$ και $k \leq l$, τότε $n + k < m + l$.*
[γ] *Αν $n \leq m$ και $k \leq l$, τότε $n + k \leq m + l$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $n < m$ και $k < l$. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση 13.11, $n + k < m + k < m + l$.
[β], [γ] Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.13. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n \geq 1$.*

Απόδειξη. Αν $n = 1$, τότε $n \geq 1$. Αν $n \neq 1$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m' = m + 1 > 1$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.14. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$.*
[α] *Αν $n > m$, τότε $n \geq m + 1$.*
[β] *Αν $n < m + 1$, τότε $n \leq m$.*

Απόδειξη. [α] Αν $n > m$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m + k$. Επειδή $k \geq 1$, ισχύει $n \geq m + 1$.
[β] Προφανές, λόγω του [α]. $\square$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΚΑΛΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ. *Κάθε μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό $M \subseteq \mathbb{N}$ και έστω $m_0 \in M$. Θεωρούμε το σύνολο K των $n \in \mathbb{N}$ οι οποίοι είναι $\leq m$ για κάθε $m \in M$.
Προφανώς, $1 \in K$. Επειδή $m_0 + 1 > m_0$ και $m_0 \in M$, ο $m_0 + 1$ δεν ανήκει στο K. Άρα το K είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, οπότε, σύμφωνα με το Αξίωμα της Επαγωγής, υπάρχει $n_0 \in K$ ώστε $n_0 + 1 = {n_0}' \notin K$.
Κατ' αρχάς, ισχύει (i) $n_0 \leq m$ για κάθε $m \in M$. Αυτό είναι προφανές, διότι $n_0 \in K$. Κατόπιν, έστω $n_0 \notin M$. Τότε για κάθε $m \in M$ ισχύει $n_0 < m$ και, επομένως, $n_0 + 1 \leq m$. Άρα $n_0 + 1 \in K$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα (ii) $n_0 \in M$.
Από τα (i), (ii) συνεπάγεται ότι ο n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του M. $\square$

Πολλαπλασιασμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.2. *Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, 1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m') = \phi(n, m) + n$.*

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = f_n(m) + n$.
Κατ' αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_1(m) = m$. Τότε (i) $f_1(1) = 1$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_1(m') = m' = m + 1 = f_1(m) + 1$.
Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = f_n(m) + n$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = f_n(m) + m$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = f_n(1) + 1 = n + 1 = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_{n'}(m') = f_n(m') + m' = f_n(m) + n + m' = f_n(m) + n' + m = f_{n'}(m) + n'$. Άρα $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = f_n(m) + n$.
Τώρα, ορίζουμε $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $\phi(n, m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n, 1) = f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m') = f_n(m') = f_n(m) + n = \phi(n, m) + n$.
Τώρα θα αποδείξουμε η συνάρτηση ϕ με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, 1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, m') = \psi(n, m) + n$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n, 1) = n = \psi(n, 1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $\phi(n, m') = \phi(n, m) + n = \psi(n, m) + n = \psi(n, m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το στοιχείο $\phi(n, m) \in \mathbb{N}$ που, σύμφωνα με το θεώρημα 13.2, αντιστοιχίζεται στους $n, m \in \mathbb{N}$ ονομάζεται **γινόμενο** των n, m και συμβολίζεται*

$$n \cdot m.$$

*Δηλαδή, $n \cdot m = \phi(n, m)$. Η πράξη που σε κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζει το γινόμενό τους ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{N}$.*

Σύμφωνα με το θεώρημα 13.2 και με την απόδειξή του, ο πολλαπλασιασμός έχει τις εξής ιδιότητες: $n \cdot 1 = \phi(n, 1) = n$, $1 \cdot n = \phi(1, n) = f_1(n) = n$, $n \cdot m' = \phi(n, m') = \phi(n, m) + n = n \cdot m + n$ και $n' \cdot m = \phi(n', m) = f_{n'}(m) = f_n(m) + m = \phi(n, m) + m = n \cdot m + m$. Συνοπτικά:

$$n \cdot 1 = n = 1 \cdot n, \qquad n \cdot m' = n \cdot m + n, \qquad n' \cdot m = n \cdot m + m.$$

Το $n \cdot m$ θα το γράφουμε πιο συνοπτικά nm και οι παραπάνω ιδιότητες γράφονται

$$n1 = n = 1n, \qquad nm' = nm + n, \qquad n'm = nm + m.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.15. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $nm = mn$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $nm = mn$.
Ισχύει $n1 = n = 1n$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, οπότε $nm = mn$. Τότε $nm' = nm + n = mn + n = m'n$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.16. *Για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$ ισχύει $n(m + k) = nm + nk$.*

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n(m + k) = nm + nk$.
Ισχύει $n(m + 1) = nm' = nm + n = nm + n1$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $n(m+k) = nm+nk$. Τότε $n(m+k') = n(m+k)' = n(m+k)+n = nm+nk+n = nm+nk'$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.17. *Για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$ ισχύει $(nm)k = n(mk)$.*

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $(nm)k = n(mk)$.
Ισχύει $(nm)1 = nm = n(m1)$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $(nm)k = n(mk)$. Τότε $(nm)k' = (nm)k + nm = n(mk) + nm = n(mk + m) = n(mk')$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση της πρόσθεσης, η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, οι οποίες εκφράζονται στις προτάσεις 13.15 και 13.17, αντιστοίχως, μας επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.18. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$. Ισχύει $n < m$ αν και μόνο αν $nk < mk$. Επίσης, ισχύει $n = m$ αν και μόνο αν $nk = mk$.*

Απόδειξη. Έστω $n < m$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + l$. Άρα $mk = nk + lk$ και, επομένως, $nk < mk$.
Έστω $nk < mk$. Αν $n = m$, τότε $nk = mk$ και, αν $m < n$, τότε $mk < nk$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n < m$.
Προφανώς, αν $n = m$, τότε $nk = mk$. Έστω $nk = mk$. Αν $n < m$, τότε $nk < mk$ και, αν $m < n$, τότε $mk < nk$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n = m$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.19. *Έστω $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.*
[α] *Αν $n < m$ και $k < l$, τότε $nk < ml$.*
[β] *Αν $n \leq m$ και $k < l$ ή αν $n < m$ και $k \leq l$, τότε $nk < ml$.*
[γ] *Αν $n \leq m$ και $k \leq l$, τότε $nk \leq ml$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $n < m$ και $k < l$. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση 13.18, $nk < mk < ml$.
[β], [γ] Προφανή, λόγω του [α]. □

13.2 Οι θετικοί ρητοί.

Θεωρούμε όλα τα ζεύγη φυσικών (n_1, n_2), δηλαδή τα στοιχεία του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Λέμε ότι δυο τέτοια ζεύγη (n_1, n_2), (m_1, m_2) είναι **ισοδύναμα** και γράφουμε

$$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$$

αν $n_1m_2 = m_1n_2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.20. *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
[α] $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$.
[β] *Αν* $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, *τότε* $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.
[α] *Αν* $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ *και* $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, *τότε* $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$.

Απόδειξη. [α] Ισχύει $n_1n_2 = n_1n_2$, οπότε $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$.
[β] Έστω $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, οπότε $n_1m_2 = m_1n_2$. Συνεπάγεται $m_1n_2 = n_1m_2$, οπότε $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.
[γ] Έστω $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, οπότε $n_1m_2 = m_1n_2$ και $m_1k_2 = k_1m_2$. Συνεπάγεται $n_1m_2m_1k_2 = m_1n_2k_1m_2$, οπότε $n_1k_2 = k_1n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Άρα η σχέση $\sim$ ανάμεσα στα ζεύγη φυσικών είναι **σχέση ισοδυναμίας** και, επομένως, το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ διαμερίζεται σε ξένες ανά δύο κλάσεις ισοδυναμίας: κάθε δυο ζεύγη φυσικών, τα οποία είναι ισοδύναμα, ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και κάθε δυο ζεύγη φυσικών, τα οποία δεν είναι ισοδύναμα, ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας ονομάζεται **θετικός ρητός** και το σύνολο των θετικών ρητών συμβολίζεται $\mathbb{Q}_+$. Αν r είναι οποιοσδήποτε θετικός ρητός (δηλαδή, κλάση ισοδυναμίας), τότε κάθε ζεύγος φυσικών που ανήκει στον r ονομάζεται **αντιπρόσωπος** του r. Επομένως, δυο ισοδύναμα ζεύγη φυσικών είναι αντιπρόσωποι του ίδιου θετικού ρητού και δυο μη-ισοδύναμα ζεύγη φυσικών είναι αντιπρόσωποι διαφορετικών θετικών ρητών.*

Διάταξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Λέμε ότι το (n_1, n_2) είναι **μεγαλύτερο από** το (m_1, m_2) και γράφουμε $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι το (m_1, m_2) είναι **μικρότερο από** το (n_1, n_2) και γράφουμε $(m_1, m_2) \prec (n_1, n_2)$ αν ισχύει $n_1m_2 > m_1n_2$ ή, ισοδύναμα, $m_1n_2 < n_1m_2$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.21. *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Αν* $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$, $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, *τότε* $(k_1, k_2) \succ (l_1, l_2)$.

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1m_2 > m_1n_2$, $n_1k_2 = k_1n_2$ και $m_1l_2 = l_1m_2$. Τότε $k_1n_2m_1l_2 = l_1m_2n_1k_2 > l_1k_2n_2m_1$. Άρα $k_1l_2 > l_1k_2$ και, επομένως, $(k_1, k_2) \succ (l_1, l_2)$. □

Η πρόταση 13.21 λέει ότι αν κάποιος αντιπρόσωπος ενός θετικού ρητού r είναι μεγαλύτερος από κάποιον αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s, τότε κάθε αντιπρόσωπος του r είναι μεγαλύτερος από κάθε αντιπρόσωπο του s. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Λέμε ότι ο r είναι **μεγαλύτερος από** τον s και γράφουμε $r > s$ ή, ισοδύναμα, ότι ο s είναι **μικρότερος από** τον r και γράφουμε $s < r$ αν ισχύει $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$ για οποιονδήποτε (και, επομένως, για κάθε) αντιπρόσωπο (n_1, n_2) του r και για οποιονδήποτε (και, επομένως, για κάθε) αντιπρόσωπο (m_1, m_2) του s.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.22. *Για κάθε* $r, s \in \mathbb{Q}_+$ *ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό:* $r = s$, $r > s$, $r < s$.

Απόδειξη. Έστω οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2) των r, s, αντιστοίχως. Βάσει των ορισμών, το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $r = s$, $r > s$, $r < s$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ και αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $n_1 m_2 = m_1 n_2$, $n_1 m_2 > m_1 n_2$, $n_1 m_2 < m_1 n_2$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Επίσης, λέμε ότι ο r είναι* ***μεγαλύτερος από ή ίσος με*** *τον s και γράφουμε $r \geq s$ ή, ισοδύναμα, ότι ο s είναι* ***μικρότερος από ή ίσος με*** *τον r και γράφουμε $s \leq r$ αν ισχύει $r > s$ ή $r = s$ ή, ισοδύναμα, αν ισχύει $s < r$ ή $s = r$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.23. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$.*
[α] *Αν $r < s$ και $s < t$, τότε $r < t$.*
[β] *Αν $r \leq s$ και $s < t$ ή αν $r < s$ και $s \leq t$, τότε $r < t$.*
[γ] *Αν $r \leq s$ και $s \leq t$, τότε $r \leq t$.*

α. Έστω $r < s$ και $s < t$. Έστω οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ και $(m_1, m_2) \prec (k_1, k_2)$, οπότε $n_1 m_2 < m_1 n_2$ και $m_1 k_2 < k_1 m_2$. Συνεπάγεται $n_1 m_2 m_1 k_2 < m_1 n_2 k_1 m_2$ και, επομένως, $n_1 k_2 < k_1 n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \prec (k_1, k_2)$, οπότε $r < t$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.24. [α] *Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s > r$.*
[β] *Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s < r$.*
[γ] *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ υπάρχει $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r < t < s$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$ και οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (n_1, n_2) του r. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1 + n_1, n_2)$ και τον $s \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1 + n_1, n_2)$ ως αντιπρόσωπο. Ισχύει $(n_1 + n_1, n_2) \succ (n_1, n_2)$ διότι $(n_1 + n_1) n_2 = n_1 n_2 + n_1 n_2 > n_1 n_2$. Άρα $s > r$.
[β] Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$ και οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (n_1, n_2) του r. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1, n_2 + n_2)$ και τον $s \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1, n_2 + n_2)$ ως αντιπρόσωπο. Ισχύει $(n_1, n_2 + n_2) \prec (n_1, n_2)$ διότι $n_1(n_2 + n_2) = n_1 n_2 + n_1 n_2 > n_1 n_2$. Άρα $s < r$.
[γ] Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ και οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2) και (m_1, m_2) των r, s, αντιστοίχως. Επομένως, ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$, οπότε $n_1 m_2 < m_1 n_2$. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ και τον $t \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ ως αντιπρόσωπο.
Από την $n_1 m_2 < m_1 n_2$ συνεπάγεται $n_1 n_2 + n_1 m_2 < n_1 n_2 + m_1 n_2$, οπότε $n_1(n_2 + m_2) < (n_1 + m_1) n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \prec (n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ και, επομένως, $r < t$.
Από την $n_1 m_2 < m_1 n_2$ συνεπάγεται $n_1 m_2 + m_1 m_2 < m_1 n_2 + m_1 m_2$, οπότε $(n_1 + m_1) m_2 < m_1(n_2 + m_2)$. Άρα $(n_1 + m_1, n_2 + m_2) \prec (m_1, m_2)$ και, επομένως, $t < s$. □

Πρόσθεση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ορίζουμε ως* ***άθροισμα*** *των ζευγών αυτών και το συμβολίζουμε $(n_1, n_2) + (m_1, m_2)$ το ζεύγος $(n_1 m_2 + m_1 n_2, n_2 m_2)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.25. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Αν $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, τότε $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) + (l_1, l_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1 k_2 = k_1 n_2$ και $m_1 l_2 = l_1 m_2$. Για να αποδείξουμε ότι $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) + (l_1, l_2)$ ή, ισοδύναμα, $(n_1 m_2 + m_1 n_2, n_2 m_2) \sim (k_1 l_2 + l_1 k_2, k_2 l_2)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1 m_2 + m_1 n_2) k_2 l_2 = (k_1 l_2 + l_1 k_2) n_2 m_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια των $n_1 k_2 = k_1 n_2$ και $m_1 l_2 = l_1 m_2$. □

Η πρόταση 13.25 λέει το εξής. Έστω ότι προσθέτουμε έναν αντιπρόσωπο ενός θετικού ρητού r και έναν αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s και βρίσκουμε κάποιο άθροισμα. Το άθροισμα αυτό είναι αντιπρόσωπος κάποιου τρίτου θετικού ρητού t. Αν προσθέσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο του r και έναν άλλο αντιπρόσωπο του s, τότε το νέο άθροισμα θα είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο άθροισμα, οπότε θα είναι αντιπρόσωπος του ίδιου t. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των r, s και το συμβολίζουμε*

$$r + s$$

*τον θετικό ρητό ο οποίος έχει αντιπρόσωπο το άθροισμα $(n_1, n_2) + (m_1, m_2)$ οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (n_1, n_2) του r και οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (m_1, m_2) του s. Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $r + s$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbb{Q}_+$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.26. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $r + s = s + r$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Ο $(n_1, n_2)+(m_1, m_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + s$ και ο $(m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1n_2 + n_1m_2, m_2n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $s+r$. Άρα αρκεί να αποδειχθεί ότι $(n_1m_2+m_1n_2, n_2m_2) \sim (m_1n_2 + n_1m_2, m_2n_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο αυτά ζεύγη είναι ίδια. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.27. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $(r + s) + t = r + (s + t)$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) και (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s και t, αντιστοίχως. Τότε ο $((n_1, n_2) + (m_1, m_2)) + (k_1, k_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) + (k_1, k_2) = (n_1m_2k_2 + m_1n_2k_2 + k_1n_2m_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $(r + s) + t$ και ο $(n_1, n_2) + ((m_1, m_2) + (k_1, k_2)) = (n_1, n_2) + (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2) = (n_1m_2k_2 + m_1k_2n_2 + k_1m_2n_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + (s + t)$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2k_2 + m_1n_2k_2 + k_1n_2m_2, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_2k_2 + m_1k_2n_2 + k_1m_2n_2, n_2m_2k_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. □

Η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, οι οποίες εκφράζονται στις προτάσεις 13.26 και 13.27, αντιστοίχως, επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικές προσθέσεις καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.28. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $r + s > r$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Ο $(n_1, n_2)+(m_1, m_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + s$, οπότε, για να αποδείξουμε ότι $r + s > r$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) \succ (n_1, n_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2n_2 + m_1n_2n_2 > n_1n_2m_2$, το οποίο είναι σωστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.29. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$. Ισχύει $r < s$ αν και μόνο αν $r + t < s + t$. Επίσης, ισχύει $r = s$ αν και μόνο αν $r + t = s + t$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Οι $(n_1, n_2) + (k_1, k_2) = (n_1k_2 + k_1n_2, n_2k_2)$, $(m_1, m_2) + (k_1, k_2) = (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των $r + t$, $s + t$, αντιστοίχως. Επομένως, για να αποδείξουμε ότι $r + t < s + t$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1k_2 + k_1n_2, n_2k_2) \prec (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι $n_1k_2m_2k_2 + k_1n_2m_2k_2 < m_1k_2n_2k_2 + k_1m_2n_2k_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 < m_1n_2$.
Έστω $r + t < s + t$. Αν $r = s$, τότε $r + t = s + t$ και, αν $s < r$, τότε $s + t < r + t$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r < s$.
Προφανώς, αν $r = s$, τότε $r + t = s + t$. Έστω $r + t = s + t$. Αν $r < s$, τότε $r + t < s + t$ και, αν $s < r$, τότε $s + t < r + t$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r = s$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.30. *Έστω $r, s, t, u \in \mathbb{Q}_+$.*
[α] *Αν $r < s$ και $t < u$, τότε $r + t < s + u$.*
[β] *Αν $r \leq s$ και $t < u$ ή αν $r < s$ και $t \leq u$, τότε $r + t < s + u$.*
[γ] *Αν $r \leq s$ και $t \leq u$, τότε $r + t \leq s + u$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r < s$ και $t < u$. Τότε, $r + t < s + t < s + u$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.31. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Αν $r < s$, τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r + t = s$. Αντιθέτως, αν $r \geq s$, τότε δεν υπάρχει κανένας $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r + t = s$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n_1m_2 + k = m_1n_2$. Θεωρούμε τον $t \in \mathbb{Q}_+$ ο οποίος έχει ως αντιπρόσωπο το ζεύγος (k, n_2m_2). Τότε ο $r + t$ έχει ως αντιπρόσωπο το $(n_1, n_2) + (k, n_2m_2) = (n_1n_2m_2 + kn_2, n_2n_2m_2)$ και, για να αποδείξουμε ότι $r+t = s$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1n_2m_2+kn_2, n_2n_2m_2) \sim (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1n_2m_2m_2 + kn_2m_2 = m_1n_2n_2m_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 + k = m_1n_2$.
Το ότι ο t είναι μοναδικός είναι συνέπεια της πρότασης 13.29.
Γνωρίζουμε ότι από $r + t = s$ συνεπάγεται $s > r$. Άρα, αν $r \geq s$, τότε δεν υπάρχει κανένας $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r + t = s$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$, τότε ο μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ που ικανοποιεί την $r+t = s$ ονομάζεται **διαφορά** των s, r και συμβολίζεται*

$$s - r.$$

*Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ αντιστοιχίζει τον $s - r$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{Q}_+$.*

Πολλαπλασιασμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των ζευγών αυτών και το συμβολίζουμε $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2)$ το ζεύγος (n_1m_1, n_2m_2).*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.32. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Αν $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, τότε $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) \cdot (l_1, l_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1k_2 = k_1n_2$ και $m_1l_2 = l_1m_2$. Συνεπάγεται $n_1k_2m_1l_2 = k_1n_2l_1m_2$ και, επομένως, $(n_1m_1, n_2m_2) \sim (k_1l_1, k_2l_2)$, δηλαδή $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) \cdot (l_1, l_2)$. □

Η πρόταση 13.32 λέει το εξής. Έστω ότι πολλαπλασιάζουμε έναν αντιπρόσωπο ενός θετικού ρητού r και έναν αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s και βρίσκουμε κάποιο γινόμενο. Το γινόμενο αυτό είναι αντιπρόσωπος κάποιου τρίτου θετικού ρητού t. Αν πολλαπλασιάσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο του r και έναν άλλο αντιπρόσωπο του s, τότε το νέο γινόμενο θα είναι αντιπρόσωπος του ίδιου t. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των r, s και το συμβολίζουμε*

$$r \cdot s$$

*τον θετικό ρητό ο οποίος έχει αντιπρόσωπο το γινόμενο $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2)$ οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (n_1, n_2) του r και οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (m_1, m_2) του s. Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $r \cdot s$ ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{Q}_+$.*

Στο εξής, θα γράφουμε rs αντί $r \cdot s$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.33. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $rs = sr$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Ο $(n_1, n_2)(m_1, m_2) = (n_1m_1, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του rs και ο $(m_1, m_2)(n_1, n_2) = (m_1n_1, m_2n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του sr. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1, n_2m_2) \sim (m_1n_1, m_2n_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.34. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $(rs)t = r(st)$.*

Απόδειξη. Έστω αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), αντιστοίχως, των r, s, t.
Ο $((n_1, n_2)(m_1, m_2))(k_1, k_2) = (n_1m_1, n_2m_2)(k_1, k_2) = (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $(rs)t$ και ο $(n_1, n_2)((m_1, m_2)(k_1, k_2)) = (n_1, n_2)(m_1k_1, m_2k_2) = (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r(st)$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $(n_1m_1k_1, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. □

Η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα που εκφράζονται από τις προτάσεις 13.33 και 13.34, αντιστοίχως, επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.35. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $r(s + t) = rs + rt$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι, αντιστοίχως, των r, s, t.
Ο $(n_1, n_2)((m_1, m_2)+(k_1, k_2)) = (n_1m_1k_2+n_1k_1m_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r(s+t)$ και ο $(n_1, n_2)(m_1, m_2) + (n_1, n_2)(k_1, k_2) = (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2, n_2m_2n_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $rs + rt$. Άρα, για να αποδείξουμε ότι $r(s + t) = rs + rt$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2, n_2m_2n_2k_2)$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με $(n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2)n_2m_2n_2k_2 = (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2)n_2m_2k_2$, που είναι προφανές. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.36. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$. Ισχύει $r < s$ αν και μόνο αν $rt < st$. Επίσης, ισχύει $r = s$ αν και μόνο αν $rt = st$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Οι $(n_1, n_2)(k_1, k_2) = (n_1k_1, n_2k_2)$, $(m_1, m_2)(k_1, k_2) = (m_1k_1, m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των rt, st, αντιστοίχως. Άρα για να αποδείξουμε ότι $rt < st$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1k_1, n_2k_2) \prec (m_1k_1, m_2k_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι $n_1k_1m_2k_2 < m_1k_1n_2k_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 < m_1n_2$.
Έστω $rt < st$. Αν $r = s$, τότε $rt = st$ και, αν $s < r$, τότε $st < rt$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r < s$.
Προφανώς, αν $r = s$, τότε $rt = st$. Έστω $rt = st$. Αν $r < s$, τότε $rt < st$ και, αν $s < r$, τότε $st < rt$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r = s$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.37. *Έστω $r, s, t, u \in \mathbb{Q}_+$.*
[α] *Αν $r < s$ και $t < u$, τότε $rt < su$.*
[β] *Αν $r \le s$ και $t < u$ ή αν $r < s$ και $t \le u$, τότε $rt < su$.*
[γ] *Αν $r \le s$ και $t \le u$, τότε $rt \le su$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r < s$ και $t < u$. Τότε $rt < st < su$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.38. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $rt = s$.*

Απόδειξη. Έστω οι αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), αντιστοίχως, των r, s. Θεωρούμε τον $t \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει ως αντιπρόσωπο το ζεύγος (m_1n_2, n_1m_2). Τότε το $(n_1, n_2)(m_1n_2, n_1m_2) = (n_1m_1n_2, n_2n_1m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του rt. Άρα, για να αποδείξουμε ότι $rt = s$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1n_2, n_2n_1m_2) \sim (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_1n_2m_2 = m_1n_2n_1m_2$, το οποίο είναι προφανές.
Το ότι ο t είναι μοναδικός είναι συνέπεια της πρότασης 13.36. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $r, s \in \mathbb{Q}_+$, τότε ο μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ που ικανοποιεί την $rt = s$ ονομάζεται **λόγος** των s, r και συμβολίζεται*

$$\frac{s}{r}.$$

*Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $\frac{s}{r}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbb{Q}_+$.*

Οι θετικοί ακέραιοι και οι φυσικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον θετικό ρητό με αντιπρόσωπο το ζεύγος $(n, 1)$ και τον συμβολίζουμε $\overline{n}$. Κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος γράφεται $r = \overline{n}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται **θετικός ακέραιος**. Το σύνολο των θετικών ακεραίων συμβολίζεται $\mathbb{Z}_+$. Δηλαδή, $\mathbb{Z}_+ = \{\overline{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και είναι $\mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{Q}_+$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.39. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει $n < m$ αν και μόνο αν $\overline{n} < \overline{m}$. Επίσης, ισχύει $n = m$ αν και μόνο αν $\overline{n} = \overline{m}$.*

Απόδειξη. Οι $\overline{n}$ και $\overline{m}$ έχουν αντιπροσώπους τους $(n, 1)$ και $(m, 1)$, αντιστοίχως. Άρα το $\overline{n} < \overline{m}$ είναι ισοδύναμο με το $(n, 1) \prec (m, 1)$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $n1 < m1$. Ομοίως, το $\overline{n} = \overline{m}$ είναι ισοδύναμο με το $(n, 1) \sim (m, 1)$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $n1 = m1$. □

Μια άμεση συνέπεια της πρότασης 13.39 είναι ότι για κάθε θετικό ακέραιο $r \in \mathbb{Z}_+$ υπάρχει *ακριβώς* ένας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \overline{n}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.40. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\overline{n}r > s$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $t = \frac{s}{r} \in \mathbb{Q}_+$, για τον οποίο ισχύει $tr = s$. Έστω (n_1, n_2) οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος του t και έστω $n = n_1 + 1$. Επειδή $n_2 \geq 1$, ισχύει $nn_2 \geq n > n_1 = n_11$, οπότε $(n, 1) \succ (n_1, n_2)$. Άρα $\overline{n} > t$ και, επομένως, $\overline{n}r > tr = s$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.41. *Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$. Ειδικώτερα, το ζεύγος (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του r αν και μόνο αν $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιονδήποτε αντιπρόσωπο (n_1, n_2) του $r \in \mathbb{Q}_+$. Οι $(n_1, 1)$ και $(n_2, 1)$ είναι αντιπρόσωποι των $\overline{n_1}$ και $\overline{n_2}$, αντιστοίχως. Άρα ο $(n_2, 1)(n_1, n_2) = (n_2n_1, n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n_2}\, r$ και, επειδή, $(n_2n_1, n_2) \sim (n_1, 1)$, συνεπάγεται ότι $\overline{n_2}\, r = \overline{n_1}$. Άρα $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.
Αντιστρόφως, έστω $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$ και, επομένως $\overline{n_2}\, r = \overline{n_1}$. Αν (m_1, m_2) είναι οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος του r, τότε το $(n_2, 1)(m_1, m_2) = (n_2m_1, m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n_2}\, r$, οπότε ισχύει $(n_2m_1, m_2) \sim (n_1, 1)$ ή, ισοδύναμα, $n_2m_1 = n_1m_2$ ή, ισοδύναμα, $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$. Άρα το (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του r. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.42. *Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$.*
[α] *Ισχύει $n + m = k$ αν και μόνο αν $\overline{n} + \overline{m} = \overline{k}$.*
[β] *Ισχύει $nm = k$ αν και μόνο αν $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{k}$.*

Απόδειξη. [α] Οι $(n, 1)$, $(m, 1)$, $(k, 1)$ είναι αντιπρόσωποι των $\overline{n}$, $\overline{m}$, $\overline{k}$. Άρα ο $(n, 1) + (m, 1) = (n1 + m1, 11) = (n + m, 1)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n} + \overline{m}$. Άρα ισχύει $\overline{n} + \overline{m} = \overline{k}$ αν και μόνο αν $(n + m, 1) \sim (k, 1)$ αν και μόνο αν $(n + m)1 = k1$ αν και μόνο αν $n + m = k$.

[β] Ο $(n, 1)(m, 1) = (nm, 11) = (nm, 1)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n}\,\overline{m}$. Άρα ισχύει $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{k}$ αν και μόνο αν $(nm, 1) \sim (k, 1)$ αν και μόνο αν $nm1 = k1$ αν και μόνο αν $nm = k$. □

Μια συνέπεια της πρότασης 13.42 είναι η εξής: *το άθροισμα και το γινόμενο θετικών ακεραίων είναι θετικοί ακέραιοι*. Πράγματι, το άθροισμα $\overline{n}+\overline{m}$ των θετικών ακεραίων $\overline{n}, \overline{m}$ είναι ίσο με τον θετικό ακέραιο $\overline{k}$, όπου $k = n + m$. Με άλλα λόγια, ισχύει $\overline{n}+\overline{m} = \overline{n+m}$. Ομοίως, το γινόμενο $\overline{n}\,\overline{m}$ των θετικών ακεραίων $\overline{n}, \overline{m}$ είναι ίσο με τον θετικό ακέραιο $\overline{k}$, όπου $k = nm$. Δηλαδή, ισχύει $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{nm}$.

Μια πιο σημαντική συνέπεια των προτάσεων 13.39 και 13.42 είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε $n \in \mathbb{N}$ με τον αντίστοιχο $\overline{n} \in \mathbb{Z}_+$ ή, αντιστρόφως, ότι αντικαθιστούμε κάθε $\overline{n} \in \mathbb{Z}_+$ με τον αντίστοιχο $n \in \mathbb{N}$. Τότε *οι σχέσεις διάταξης καθώς και οι αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του $\mathbb{N}$ μένουν αμετάβλητες ως σχέσεις διάταξης καθώς και αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα αντίστοιχα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+$ και αντιστρόφως*. Πιο συγκεκριμένα: (i) ισχύει $n < m$ αν και μόνο αν ισχύει $\overline{n} < \overline{m}$ και ισχύει $n = m$ αν και μόνο αν ισχύει $\overline{n} = \overline{m}$, (ii) ισχύει $n + m = k$ αν και μόνο αν ισχύει $\overline{n} + \overline{m} = \overline{k}$ και (iii) ισχύει $nm = k$ αν και μόνο αν ισχύει $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{k}$. Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ με το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ ή, αντιστρόφως, το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ με το σύνολο $\mathbb{N}$ χωρίς καμιά ουσιαστική αλλαγή στις βασικές δομές των δυο συνόλων, τη δομή διάταξης και τις αλγεβρικές δομές. Μπορούμε να φανταστούμε ότι πρόκειται για το ίδιο βασικό σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο εμφανίζεται με δυο ονόματα: το όνομα n και το όνομα $\overline{n}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Στο εξής, θεωρούμε ότι κάθε φυσικός n έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο θετικό ακέραιο $\overline{n}$ και, επομένως, ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει αντικατασταθεί από το σύνολο $\mathbb{Z}_+$. Αφού, λοιπόν, "πετάξουμε" και "ξεχάσουμε" τους n και το σύνολό τους $\mathbb{N}$, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο n στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου $\overline{n}$ του $\mathbb{Z}_+$. Επίσης, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τα δυο σύμβολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+$ για το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ και να χρησιμοποιούμε και τις δυο ονομασίες "φυσικός" και "θετικός ακέραιος" για τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+$. Ουσιαστικά, λοιπόν, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+$, έτσι ώστε κάθε φυσικός να θεωρείται θετικός ρητός και το σύνολο $\mathbb{N}$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{Q}_+$.*

Για παράδειγμα, στην πρόταση 13.40 θα αντικαταστήσουμε το σύμβολο $\overline{n}$ με το n και θα πούμε: *για κάθε δυο θετικούς ρητούς r, s υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $nr > s$*. Και, επειδή τους θετικούς ακεραίους θα τους λέμε και φυσικούς, θα πούμε:

Για κάθε δυο θετικούς ρητούς r, s υπάρχει φυσικός n ώστε $nr > s$.

Ένα ακόμη παράδειγμα. Η πρόταση 13.41 λέει: *κάθε θετικός ρητός r είναι ίσος με τον λόγο $\frac{n_1}{n_2}$ δυο θετικών ακεραίων* ή, ισοδύναμα,

Κάθε θετικός ρητός r είναι ίσος με τον λόγο $\frac{n_1}{n_2}$ δυο φυσικών.

Με άλλα λόγια, η πρόταση 13.41 διατυπώνει τη γνωστή μας σχέση ανάμεσα σε θετικούς ρητούς και φυσικούς.

13.3 Οι θετικοί πραγματικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** κάθε υποσύνολο x του $\mathbb{Q}_+$, το οποίο έχει τις εξής τρεις ιδιότητες: (i) το x δεν είναι κενό και δεν είναι ολόκληρο το $\mathbb{Q}_+$, (ii) κάθε στοιχείο του συνόλου x είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του $\mathbb{Q}_+$ το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο x και (iii) το x δεν έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή για κάθε στοιχείο του x υπάρχει άλλο μεγαλύτερο στοιχείο του x.*
Το σύνολο των θετικών πραγματικών συμβολίζεται $\mathbb{R}_+$.

Τονίζουμε: *κάθε θετικός πραγματικός είναι (σύμφωνα με τον ορισμό του) σύνολο θετικών ρητών*.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τα σύνολα με τις ιδιότητες $(i) - (iii)$, τα οποία ονομάσαμε θετικούς πραγματικούς, ονομάζονται, επίσης, **τομές** ή και **τομές Dedekind**.*

Η επόμενη πρόταση εκφράζει μερικές απλές ιδιότητες των θετικών πραγματικών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.43. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$.*
[α] *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$: αν $r \notin x$ και $s > r$, τότε $s \notin x$.*

[β] *Για κάθε* $r, s \in \mathbb{Q}_+$ *: αν* $r \in x$ *και* $s < r$*, τότε* $s \in x$.

[γ] *Για κάθε* $r \in x$ *υπάρχει* $s \in x$*,* $s > r$.

Απόδειξη. Καθένα από τα [α], β] είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα (ii) του x. Το [γ] είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα (iii) του x. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω* $x \in \mathbb{R}_+$*. Λόγω της ιδιότητας* (ii) *του* x*, κάθε στοιχείο του* x *χαρακτηρίζεται* ***κατώτερος αριθμός*** *του* x *και κάθε στοιχείο εκτός του* x *χαρακτηρίζεται* ***ανώτερος αριθμός*** *του* x.

Το να αποδείξουμε ότι κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}_+$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή ότι έχει τις ιδιότητες $(i) - (iii)$, είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε τα εξής: (i) το σύνολο περιέχει τουλάχιστον έναν θετικό ρητό και δεν περιέχει τουλάχιστον έναν θετικό ρητό, (ii) για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και *κάθε* θετικός ρητός μικρότερός του και (iii) για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και *κάποιος* θετικός ρητός μεγαλύτερός του.

Διάταξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν* $x, y \in \mathbb{R}_+$*, λέμε ότι ο* y *είναι* ***μεγαλύτερος από*** *τον* x *και γράφουμε* $y > x$ *ή, ισοδύναμα, ότι ο* x *είναι* ***μικρότερος από*** *τον* y *και γράφουμε* $x < y$ *αν είναι* $y \supset x$ *ή, ισοδύναμα,* $x \subset y$.

Θυμηθείτε: το σύμβολο $\supset$ σημαίνει γνήσιο υπερσύνολο και το $\subset$ σημαίνει γνήσιο υποσύνολο ενώ το $\supseteq$ σημαίνει υπερσύνολο και το $\subseteq$ σημαίνει υποσύνολο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.44. *Έστω* $x, y \in \mathbb{R}_+$*. Ισχύει* $x < y$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $r \in \mathbb{Q}_+$ *ώστε* $r \in y$ *και* $r \notin x$.

Απόδειξη. Έστω $x < y$, δηλαδή $x \subset y$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$.
Έστω ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$. Έστω $s \in x$. Τότε $s < r$ και, επομένως, $s \in y$. Άρα $x \subseteq y$ και, λόγω του r, ισχύει $x \subset y$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.45. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό:* $x = y$, $x > y$, $x < y$.

Απόδειξη. Επειδή τα $x = y$, $x > y$, $x < y$ είναι ισοδύναμα, αντιστοίχως, με τα $x = y$, $x \supset y$, $x \subset y$, είναι σαφές ότι τα τρία αυτά ενδεχόμενα αλληλοαποκλείονται.
Έστω $x \neq y$. Τότε είτε (i) υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$ είτε (ii) υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in x$ και $r \notin y$. Στην περίπτωση (i) ισχύει, σύμφωνα με την πρόταση 13.44, $x < y$ και στην περίπτωση (ii) ισχύει, για τον ίδιο λόγο, $x > y$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν* $x, y \in \mathbb{R}_+$*, λέμε ότι ο* y *είναι* ***μεγαλύτερος από ή ίσος με*** *τον* x *και γράφουμε* $y \geq x$ *ή, ισοδύναμα, ότι ο* x *είναι* ***μικρότερος από ή ίσος με*** *τον* y *και γράφουμε* $x \leq y$ *αν είναι* $y > x$ *ή* $y = x$ *ή, ισοδύναμα,* $x < y$ *ή* $x = y$*. Με άλλα λόγια, είναι* $y \geq x$ *ή, ισοδύναμα,* $x \leq y$ *αν και μόνο αν* $y \supseteq x$ *ή, ισοδύναμα,* $x \subseteq y$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.46. *Έστω* $x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

[α] *Αν* $x < y$ *και* $y < z$*, τότε* $x < z$.

[β] *Αν* $x \leq y$ *και* $y < z$ *ή αν* $x < y$ *και* $y \leq z$*, τότε* $x < z$.

[γ] *Αν* $x \leq y$ *και* $y \leq z$*, τότε* $x \leq z$.

Απόδειξη. [α] Έστω $x < y$ και $y < z$. Τότε $x \subset y$ και $y \subset z$ και, επομένως, $x \subset z$. Άρα $x < z$.
[β], [γ]. Ομοίως. □

Πρόσθεση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.3. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το σύνολο $z = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ ισχύει $t + u \notin z$.*

Απόδειξη. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in y$ και, τότε, $r + s \in z$. Άρα το σύνολο z δεν είναι κενό. Επίσης, υπάρχουν $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$. Τότε, για κάθε $r \in x$, $s \in y$ ισχύει $r < t$, $s < u$, οπότε $r + s < t + u$. Άρα κάθε στοιχείο του z είναι $\neq t + u$, οπότε $t + u \notin z$. Συμπεραίνουμε ότι το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Αποδείξαμε, επίσης, ότι για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ ισχύει $t + u \notin z$.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το $r + s$, όπου $r \in x$, $s \in y$. Έστω οποιοσδήποτε $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < r + s$. Επειδή $\frac{t}{r+s}(r + s) = t < r + s = 1(r + s)$, συνεπάγεται $\frac{t}{r+s} < 1$. Άρα $r\frac{t}{r+s} < r1 = r$ και $s\frac{t}{r+s} < s1 = s$. Συνεπάγεται $r\frac{t}{r+s} \in x$ και $s\frac{t}{r+s} \in y$ και, επομένως, $r\frac{t}{r+s} + s\frac{t}{r+s} \in z$. Όμως, $r\frac{t}{r+s} + s\frac{t}{r+s} = (r + s)\frac{t}{r+s} = t$, οπότε $t \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το $r + s$, όπου $r \in x$, $s \in y$. Υπάρχουν $t \in x$, $u \in y$ ώστε $r < t$, $s < u$. Συνεπάγεται $r + s < t + u$ και το $t + u$ είναι στοιχείο του z. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το στοιχείο $z \in \mathbb{R}_+$ στο θεώρημα 13.3 ονομάζεται* ***άθροισμα*** *των x, y και συμβολίζεται*

$$x + y.$$

Δηλαδή, $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει το άθροισμα $x + y$ ονομάζεται ***πρόσθεση*** *στο $\mathbb{R}_+$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.47. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $x + y = y + x$.*

Απόδειξη. $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\} = \{s + r \,|\, s \in y, r \in x\} = y + x$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.48. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

Απόδειξη. Ισχύει $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$ και $y + z = \{s + t \,|\, s \in y, t \in z\}$. Άρα $(x + y) + z = \{(r + s) + t \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = \{r + (s + t) \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = x + (y + z)$. □

Η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικές προσθέσεις καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.49. *Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$ και $x \in \mathbb{R}_+$. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ ώστε $s - r = t$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $r_1 \in x$ και $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$. Τότε ισχύει $s_1 > r_1$, οπότε $s_1 - r_1 \in \mathbb{Q}_+$. Σύμφωνα με την πρόταση 13.40, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $nt > s_1 - r_1$, οπότε $r_1 + nt > s_1$. Άρα το $\{n \in \mathbb{N} \,|\, r_1 + nt \notin x\}$ δεν είναι κενό, οπότε έχει ελάχιστο στοιχείο n_0.
Αν $n_0 = 1$, τότε ορίζουμε $r = r_1$, $s = r_1 + n_0 t = r_1 + t$, οπότε ισχύει $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και $s - r = t$. Αν $n_0 > 1$, τότε ορίζουμε $r = r_1 + (n_0 - 1)t \in x$, $s = r_1 + n_0 t \notin x$, οπότε ισχύει $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και $s - r = t$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.50. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $x + y > x$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $t \in y$. Βάσει της πρότασης 13.49, υπάρχουν $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ ώστε $s - r = t$. Τότε, ισχύει $r + t = s \notin x$ και $r + t \in x + y$. Άρα, από την πρόταση 13.44, ισχύει $x < x + y$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.51. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Ισχύει $x < y$ αν και μόνο αν $x+z < y+z$. Επίσης, ισχύει $x = y$ αν και μόνο αν $x + z = y + z$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Υπάρχει $t_1 \notin x$, $t_1 \in y$. Κατόπιν, υπάρχει $t_2 \in y$, $t_2 > t_1$, οπότε $t_2 - t_1 \in \mathbb{Q}_+$. Βάσει της πρότασης 13.49, υπάρχουν $r \in z$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin z$ ώστε $s - r = t_2 - t_1$. Ορίζουμε $t = t_1 + s = t_2 + r$. Επειδή $t_2 \in y$, $r \in z$, ισχύει $t \in y + z$. Επειδή $t_1 \notin x$, $s \notin z$, ισχύει $t \notin x + z$. Άρα $x + z < y + z$.
Έστω $x + z < y + z$. Αν $x = y$, τότε $x + z = y + z$ και, αν $y < x$, τότε $y + z < x + z$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x < y$.
Προφανώς, αν $x = y$, τότε $x+z = y+z$. Έστω $x+z = y+z$. Αν $x < y$, τότε $x+z < y+z$ και, αν $y < x$, τότε $y + z < x + z$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x = y$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.52. *Έστω $x, y, z, w \in \mathbb{R}_+$.*
[α] *Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.*
[β] *Αν $x \leq y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $x + z < y + w$.*
[γ] *Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x < y$ και $z < w$. Τότε $x + z < y + z < y + w$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.53. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Αν $x < y$, υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + z = y$. Αντιθέτως, αν $x \geq y$, δεν υπάρχει κανένας $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + z = y$.*

Απόδειξη. Το τελευταίο μέρος είναι σαφές, διότι $x + z > x$. Επίσης, η μοναδικότητα του z είναι συνέπεια της πρότασης 13.51.
Έστω $x < y$. Ορίζουμε το σύνολο $z = \{s - r \,|\, s \in y, r \notin x, s > r\}$ και θα αποδείξουμε ότι $z \in \mathbb{R}_+$ και $x + z = y$.
Υπάρχει $t_1 \notin x$, $t_1 \in y$. Τώρα, υπάρχει $t_2 \in y$, $t_2 > t_1$. Τότε $t_2 - t_1 \in z$. Κατόπιν, υπάρχει $t \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin y$. Για κάθε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$, ισχύει $s - r < (s - r) + r = s < t$. Άρα $t \notin z$. Άρα το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s - r \in z$, δηλαδή ώστε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < s - r$. Τότε $t + r < (s - r) + r = s$, οπότε $t + r \in y$. Επίσης, $t + r > r$. Άρα $t = (t + r) - r \in z$. Άρα το z έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω $s - r \in z$, δηλαδή ώστε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Υπάρχει $t \in y$, $t > s$, οπότε και $t > r$. Τότε $t - r = (t - s) + (s - r) > s - r$ και ο $t - r \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$.
Κατόπιν, θα αποδείξουμε ότι $x + z \subseteq y$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 + (s - r)$ του $x + z$, δηλαδή ώστε $r_1 \in x$, $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Τότε $(r_1 + (s - r)) + (r - r_1) = s$ και $r > r_1$, οπότε $r_1 + (s - r) < s$. Άρα $r_1 + (s - r) \in y$.
Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $y \subseteq x + z$. (i) Έστω $s \in y$, $s \notin x$. Υπάρχει $s_1 \in y$, $s_1 > s$. Επίσης, υπάρχουν $r \in x$, $s_2 \in \mathbb{Q}_+$, $s_2 \notin x$ ώστε $s_2 - r = s_1 - s$. Τότε ισχύει $s = r + (s_1 - s_2)$, όπου $r \in x$, $s_1 \in y$, $s_2 \notin x$ και $s_1 > s_2$ (διότι $s_1 = s_2 + (s - r)$ και $s > r$). Άρα $s \in x + z$. (ii) Έστω $s \in y$, $s \in x$. Υπάρχει $s_1 \in y$, $s_1 \notin x$ και ισχύει $s < s_1$. Στο (i) είδαμε ότι $s_1 \in x + z$. Άρα $s \in x + z$.
Από $x + z \subseteq y$ και $y \subseteq x + z$ συνεπάγεται $x + z = y$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$, τότε ο μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί την $x + z = y$ ονομάζεται **διαφορά** των y, x και συμβολίζεται*

$$y - x.$$

*Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$ αντιστοιχίζει τον $y - x$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{R}_+$.*

Πολλαπλασιασμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.4. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το σύνολο $z = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $tu \notin z$.*

Απόδειξη. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in y$ και, τότε, $rs \in z$. Άρα το σύνολο z δεν είναι κενό. Επίσης, υπάρχουν $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$. Τότε, για κάθε $r \in x$, $s \in y$ ισχύει $r < t$, $s < u$, οπότε $rs < tu$. Άρα κάθε στοιχείο του z είναι $\neq tu$, οπότε $tu \notin z$. Συμπεραίνουμε ότι το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Αποδείξαμε, επίσης, ότι για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ ισχύει $tu \notin z$.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in y$. Έστω οποιοσδήποτε $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < rs$. Επειδή $r\frac{t}{r} = t < rs$, συνεπάγεται $\frac{t}{r} < s$. Άρα $\frac{t}{r} \in y$ και, επομένως, $t = r\frac{t}{r} \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in y$. Υπάρχουν $t \in x$, $u \in y$ ώστε $r < t$, $s < u$. Συνεπάγεται $rs < tu$ και το tu είναι στοιχείο του z. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το στοιχείο $z \in \mathbb{R}_+$ στο θεώρημα 13.4 ονομάζεται* ***γινόμενο*** *των x, y και συμβολίζεται*

$$x \cdot y.$$

Δηλαδή, $x \cdot y = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει το γινόμενο $x \cdot y$ ονομάζεται ***πολλαπλασιασμός*** *στο $\mathbb{R}_+$.*

Το $x \cdot y$, στο εξής, θα το γράφουμε xy.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.54. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $xy = yx$.*

Απόδειξη. $xy = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\} = \{sr \,|\, s \in y, r \in x\} = yx$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.55. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $(xy)z = x(yz)$.*

Απόδειξη. Ισχύει $xy = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$ και $yz = \{st \,|\, s \in y, t \in z\}$. Άρα $(xy)z = \{(rs)t \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = \{r(st) \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = x(yz)$. □

Η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.56. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $x(y + z) = xy + xz$.*

Απόδειξη. Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $x(y + z)$ γράφεται $r(s + t)$, όπου $r \in x$, $s \in y$, $t \in z$. Όμως, τότε $r(s + t) = rs + rt \in xy + xz$. Άρα $x(y + z) \subseteq xy + xz$.
Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $xy + xz$ γράφεται $r_1s + r_2t$, όπου $r_1, r_2 \in x$, $s \in y$, $t \in z$. Ορίζουμε r να είναι ο μεγαλύτερος από τους r_1, r_2. Τότε $r \in x$ και $rs \geq r_1s$, $rt \geq r_2t$, οπότε $r(s + t) \geq r_1s + r_2t$. Επειδή $r(s + t) \in x(y + z)$, συνεπάγεται $r_1s + r_2t \in x(y + z)$. Άρα $xy + xz \subseteq x(y + z)$.
Άρα $x(y + z) = xy + xz$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.57. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Ισχύει $x < y$ αν και μόνο αν $xz < yz$. Επίσης, ισχύει $x = y$ αν και μόνο αν $xz = yz$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Βάσει της πρότασης 13.53, υπάρχει $w \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + w = y$. Τότε ισχύει $yz = (x + w)z = xz + wz > xz$.
Έστω $xz < yz$. Αν $x = y$, τότε $xz = yz$ και, αν $y < x$, τότε $yz < xz$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x < y$.
Προφανώς, αν $x = y$, τότε $xz = yz$. Έστω $xz = yz$. Αν $x < y$, τότε $xz < yz$ και, αν $y < x$, τότε $yz < xz$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x = y$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.58. *Έστω* $x, y, z, w \in \mathbb{R}_+$.
[α] *Αν* $x < y$ *και* $z < w$, *τότε* $xz < yw$.
[β] *Αν* $x \leq y$ *και* $z < w$ *ή αν* $x < y$ *και* $z \leq w$, *τότε* $xz < yw$.
[γ] *Αν* $x \leq y$ *και* $z \leq w$, *τότε* $xz \leq yw$.

Απόδειξη. [α] Έστω $x < y$ και $z < w$. Τότε $xz < yz < yw$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.59. *Έστω* $r \in \mathbb{Q}_+$. *Τότε το σύνολο* $r^* = \{s \in \mathbb{Q}_+ \,|\, s < r\}$ *είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του* $\mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. Υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < r$ και, προφανώς, ο r δεν ανήκει στο r^*. Άρα το r^* έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s \in r^*$ και $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < s$. Τότε $s < r$, οπότε $t < r$ και, επομένως, $t \in r^*$. Άρα το r^* έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s \in r^*$. Δηλαδή $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < r$. Τότε υπάρχει $s_1 \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s < s_1 < r$. Άρα $s_1 \in r^*$ και $s_1 > s$. Άρα το r^* έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.60. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}_+$ *ισχύει* $x1^* = x$.

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του $x1^*$. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < 1$. Τότε ισχύει $rs \in \mathbb{Q}_+$ και $rs < r1 = r$, οπότε $rs \in x$. Άρα $x1^* \subseteq x$.
Έστω $r \in x$. Υπάρχει $r_1 \in x$, $r_1 > r$. Τότε $\frac{r}{r_1}r_1 = r < r_1 = 1r_1$, οπότε $\frac{r}{r_1} < 1$ και, επομένως, $\frac{r}{r_1} \in 1^*$. Άρα $r = r_1\frac{r}{r_1} \in x1^*$. Άρα $x \subseteq x1^*$.
Άρα $x1^* = x$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.61. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}_+$ *υπάρχει μοναδικός* $y \in \mathbb{R}_+$ *ώστε* $xy = 1^*$.

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του y είναι συνέπεια της πρότασης 13.57.
Αν δεν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$, ορίζουμε $y = \{\frac{1}{s} \,|\, s \in \mathbb{Q}_+, s \notin x\}$. Αν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και αυτός είναι ο s_0, ορίζουμε $y = \{\frac{1}{s} \,|\, s \in \mathbb{Q}_+, s \notin x, s \neq s_0\}$.
Υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$. Τότε $s + s \in \mathbb{Q}_+$, $s + s > s$, οπότε $s + s \notin x$ και ο $s + s$ δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα ο $\frac{1}{s+s}$ είναι στοιχείο του y. Κατόπιν, υπάρχει $r \in x$. Για κάθε $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ ισχύει $s \neq r$ και, επειδή $s\frac{1}{s} = 1 = r\frac{1}{r}$, συνεπάγεται $\frac{1}{r} \neq \frac{1}{s}$. Άρα ο $\frac{1}{r}$ δεν είναι ίσος με κανένα στοιχείο του y. Άρα το y έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $\frac{1}{s}$ του y, δηλαδή έστω $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$. Έστω $r < \frac{1}{s}$. Τότε $r\frac{1}{r} = 1 = \frac{1}{s}s$, οπότε $s < \frac{1}{r}$. Άρα $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}_+$, $\frac{1}{r} \notin x$ και ο $\frac{1}{r}$ δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $r = \frac{1}{1/r} \in y$. Άρα το y έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $\frac{1}{s}$ του y, δηλαδή έστω $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και ο s δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα υπάρχει $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$, $s_1 < s$ και, επομένως, υπάρχει $s_2 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 < s_2 < s$. Τότε, φυσικά, $s_2 \notin x$ και ο s_2 δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $\frac{1}{s_2} \in y$ και $\frac{1}{s} < \frac{1}{s_2}$. Άρα το y έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $y \in \mathbb{R}_+$.
Τώρα, θα αποδείξουμε ότι $xy \subseteq 1^*$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r\frac{1}{s}$ του xy, δηλαδή έστω $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$. Τότε $s > r$, οπότε $r\frac{1}{s} < s\frac{1}{s} = 1$ και $r\frac{1}{s} \in \mathbb{Q}_+$. Άρα $r\frac{1}{s} \in 1^*$.
Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $1^* \subseteq xy$. Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < 1$. Υπάρχει $r \in x$ και, κατόπιν, υπάρχουν $r_1 \in x$, $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$ ώστε $s_1 - r_1 = (1-t)r$. Τότε $\frac{r_1}{t} \in \mathbb{Q}_+$ και $\frac{r_1}{t} > s_1$ (διότι $(1-t)s_1 > (1-t)r$, οπότε $r_1 = s_1 - (1-t)r > ts_1$). Άρα $\frac{r_1}{t} \notin x$ και δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $\frac{1}{r_1/t} \in y$. Τέλος, ισχύει $t = r_1\frac{1}{r_1/t} \in xy$.
Από $xy \subseteq 1^*$ και $1^* \subseteq xy$ συνεπάγεται $xy = 1^*$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο* y *της πρότασης 13.61 ονομάζεται* ***αντίστροφος*** *του* x *και συμβολίζεται*

$$x^{-1}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.62. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $xz = y$.*

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του z είναι συνέπεια της πρότασης 13.57.
Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Αν $z = x^{-1}y \in \mathbb{R}_+$, τότε $xz = xx^{-1}y = 1^*y = y$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $x, y \in \mathbb{R}_+$, τότε ο μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί την $xz = y$, δηλαδή ο $x^{-1}y$, ονομάζεται **λόγος** των y, x και συμβολίζεται*

$$\frac{y}{x}.$$

*Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει τον $\frac{y}{x}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbb{R}_+$.*

Η ιδιότητα supremum του $\mathbb{R}_+$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα μη-κενό $A \subseteq \mathbb{R}_+$ χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει $u \in \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα: $a \leq u$ για κάθε $a \in A$. Κάθε u με αυτήν την ιδιότητα χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.5. *Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}_+$. Το A έχει μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $u_0 = \bigcup\{a \,|\, a \in A\} = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, r \in a$ για κάποιο $a \in A\}$. Δηλαδή, το u_0 είναι η ένωση όλων των συνόλων a $(a \in A)$.
Υπάρχει κάποιο $a_0 \in A$ και υπάρχει κάποιος $r_0 \in \mathbb{Q}_+$, $r_0 \in a_0$. Άρα $r_0 \in u_0$. Κατόπιν, υπάρχει κάποιο άνω φράγμα u του A και υπάρχει κάποιος $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin u$. Έστω $r \in u_0$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$. Επειδή $a \leq u$ (δηλαδή $a \subseteq u$), ισχύει $r \in u$, οπότε $r \neq s$. Συμπεραίνουμε ότι $r \neq s$ για κάθε $r \in u_0$, οπότε $s \notin u_0$. Άρα το u_0 έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $r \in u_0$ και $r_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$, οπότε $r_1 \in a$. Άρα $r_1 \in u_0$. Άρα το u_0 έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω $r \in u_0$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$. Επομένως, υπάρχει $r_1 \in a$, $r_1 > r$. Άρα υπάρχει $r_1 \in u_0$, $r_1 > r$. Άρα το u_0 έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $u_0 \in \mathbb{R}_+$.
Από τον ορισμό του το u_0 έχει την ιδιότητα: $a \subseteq u_0$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $a \leq u_0$ για κάθε $a \in A$, οπότε το u_0 είναι άνω φράγμα του A. Κατόπιν, έστω u άνω φράγμα του A. Επειδή $a \leq u$ για κάθε $a \in A$, ισχύει $a \subseteq u$ για κάθε $a \in A$ και, επομένως, $u_0 \subseteq u$. Άρα ισχύει $u_0 \leq u$ για κάθε άνω φράγμα u του A. Άρα το u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Έστω, επίσης, ${u_0}'$ ελάχιστο άνω φράγμα του A. Επειδή το u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A και το ${u_0}'$ είναι άνω φράγμα του A, ισχύει $u_0 \leq {u_0}'$. Ομοίως, επειδή το ${u_0}'$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A και το u_0 είναι άνω φράγμα του A, ισχύει ${u_0}' \leq u_0$. Άρα $u_0 = {u_0}'$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}_+$. Το ελάχιστο άνω φράγμα του A, η ύπαρξη και μοναδικότητα του οποίου εξασφαλίζεται από το θεώρημα 13.5, ονομάζεται και **supremum** του A και συμβολίζεται*

$$\sup A.$$

Οι ρητοί θετικοί πραγματικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$, ο θετικός πραγματικός $r^* \in \mathbb{R}_+$ ονομάζεται **ρητός θετικός πραγματικός** και για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N})$, ο θετικός πραγματικός $n^* \in \mathbb{R}_+$ ονομάζεται **ακέραιος θετικός πραγματικός**. Θα συμβολίσουμε (προσωρινά) ${\mathbb{Q}_+}^*$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ με στοιχεία τους ρητούς θετικούς πραγματικούς r^* $(r \in \mathbb{Q}_+)$ και θα συμβολίσουμε (προσωρινά) ${\mathbb{Z}_+}^*$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ με στοιχεία τους ακέραιους θετικούς πραγματικούς n^* $(n \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N}))$. Δηλαδή, ${\mathbb{Q}_+}^* = \{r^* \,|\, r \in \mathbb{Q}_+\}$ και ${\mathbb{Z}_+}^* = \{r^* \,|\, r \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N})\}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.63. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε ισχύει $r < s$ αν και μόνο αν $r^* < s^*$. Επίσης, ισχύει $r = s$ αν και μόνο αν $r^* = s^*$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$. Τότε $r \in s^*$ και $r \notin r^*$. Άρα $r^* < s^*$.
Έστω $r^* < s^*$. Αν $r = s$, τότε $r^* = s^*$ και, αν $s < r$, τότε $s^* < r^*$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $r < s$.
Αν $r = s$, τότε, προφανώς, $r^* = s^*$. Έστω $r^* = s^*$. Αν $r < s$, τότε $r^* < s^*$ και, αν $s < r$, τότε $s^* < r^*$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $r = s$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.64. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$.*
[α] *Ισχύει $r + s = t$ αν και μόνο αν $r^* + s^* = t^*$.*
[β] *Ισχύει $r - s = t$ αν και μόνο αν $r^* - s^* = t^*$.*
[γ] *Ισχύει $rs = t$ αν και μόνο αν $r^*s^* = t^*$.*
[δ] *Ισχύει $\frac{r}{s} = t$ αν και μόνο αν $\frac{r^*}{s^*} = t^*$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r + s = t$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 + s_1$ του $r^* + s^*$, δηλαδή έστω $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$, $s_1 < s$. Τότε $r_1 + s_1 \in \mathbb{Q}_+$ και $r_1 + s_1 < r + s = t$, οπότε $r_1 + s_1 \in t^*$. Άρα $r^* + s^* \subseteq t^*$.
Αντιστρόφως έστω $t_1 \in t^*$, δηλαδή $t_1 \in \mathbb{Q}_+$, $t_1 < t = r+s$. Τότε είναι $\frac{t_1}{r+s} < 1$, οπότε $\frac{t_1}{r+s}r < r$ και $\frac{t_1}{r+s}s < s$ και, επομένως, $\frac{t_1}{r+s}r \in r^*$ και $\frac{t_1}{r+s}s \in s^*$. Άρα $t_1 = \frac{t_1}{r+s}r + \frac{t_1}{r+s}s \in r^* + s^*$. Άρα $t^* \subseteq r^* + s^*$.
Άρα $r^* + s^* = t^*$.
Αντιστρόφως, έστω $r^* + s^* = t^*$ και $r + s = u$. Τότε ισχύει $u^* = r^* + s^* = t^*$ και, επομένως, $u = t$.
[β] Συνέπεια του [α].
[γ] Έστω $rs = t$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο r_1s_1 του r^*s^*, δηλαδή έστω $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$, $s_1 < s$. Τότε $r_1s_1 \in \mathbb{Q}_+$ και $r_1s_1 < rs = t$, οπότε $r_1s_1 \in t^*$. Άρα $r^*s^* \subseteq t^*$.
Αντιστρόφως έστω $t_1 \in t^*$, δηλαδή $t_1 \in \mathbb{Q}_+$, $t_1 < t = rs$. Υπάρχει $t_2 \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $t_1 < t_2 < rs$. Τότε ισχύει $\frac{t_2}{s} < r$ και $\frac{t_1}{t_2}s < s$ και, επομένως, $\frac{t_2}{s} \in r^*$ και $\frac{t_1}{t_2}s \in s^*$. Άρα $t_1 = \frac{t_2}{s}\frac{t_1}{t_2}s \in r^*s^*$. Άρα $t^* \subseteq r^*s^*$.
Άρα $r^*s^* = t^*$.
Αντιστρόφως, έστω $r^*s^* = t^*$ και $rs = u$. Τότε ισχύει $u^* = r^*s^* = t^*$ και, επομένως, $u = t$.
[δ] Συνέπεια του [γ]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.65. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Τότε $x \in {\mathbb{Q}_+}^*$ αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$. Στην περίπτωση αυτή, αν ο r είναι ο ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$, τότε $x = r^*$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in {\mathbb{Q}_+}^*$. Συγκεκριμένα, έστω $x = r^*$, όπου $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε, $x = \{t \in \mathbb{Q}_+ \,|\, t < r\}$, οπότε είναι φανερό ότι ο r είναι ο ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$ και ότι αυτός ο ελάχιστος s είναι ο r. Τότε για κάθε $t \in x$ συνεπάγεται $t < r$ (διότι $r \notin x$) και, αντιστρόφως, αν $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < r$, συνεπάγεται $t \in x$. Άρα $x = \{t \in \mathbb{Q}_+ \,|\, t < r\} = r^*$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.66. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε (i) ισχύει $r \in x$ αν και μόνο αν $r^* < x$ και (ii) ισχύει $r \notin x$ αν και μόνο αν $r^* \geq x$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $r \in x$. Επειδή $r \notin r^*$, συνεπάγεται $r^* < x$. Αντιστρόφως, έστω $r^* < x$. Τότε υπάρχει $r_1 \in x$, $r_1 \notin r^*$. Άρα $r_1 \in x$ και $r_1 \geq r$, οπότε $r \in x$.
Το (ii) είναι ισοδύναμο με το (i). □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.67. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $x < r^* < y$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Τότε υπάρχει $s \in y$, $s \notin x$. Επίσης, υπάρχει $r \in y$, $r > s$. Τότε ισχύει $r \in y$ και $r \notin r^*$, οπότε $r^* < y$. Επίσης, ισχύει $s \in r^*$ και $s \notin x$, οπότε $x < r^*$. □

Μια συνέπεια των προτάσεων 13.63 και 13.64 είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ με τον αντίστοιχο $r^* \in \mathbb{Q}_+{}^*$. Τότε *οι σχέσεις διάταξης καθώς και οι αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία r του $\mathbb{Q}_+$ μένουν αμετάβλητες ως σχέσεις διάταξης καθώς και αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα αντίστοιχα στοιχεία r^* του $\mathbb{Q}_+{}^*$*. Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ των *θετικών ρητών* r με το υποσύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$ που αποτελείται από τους αντίστοιχους *ρητούς θετικούς πραγματικούς* r^*.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Στο εξής, θα θεωρούμε ότι κάθε θετικός ρητός r έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο ρητό θετικό πραγματικό r^* και, επομένως, ότι το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ έχει αντικατασταθεί από το αντίστοιχο υποσύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$. Αφού, λοιπόν, "πετάξουμε" και "ξεχάσουμε" τους r και το σύνολό τους $\mathbb{Q}_+$, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο r στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου r^* του $\mathbb{Q}_+{}^*$. Επίσης, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{Q}_+$ για το σύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ και να χρησιμοποιούμε την ονομασία "θετικός ρητός" αντί "ρητός θετικός πραγματικός" για τα στοιχεία του $\mathbb{Q}_+{}^*$. Ουσιαστικά, λοιπόν, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+{}^*$, έτσι ώστε κάθε θετικός ρητός να θεωρείται ρητός θετικός πραγματικός και το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}_+$.*
Αυτομάτως, κάθε θετικός ακέραιος (δηλαδή, φυσικός) n αντικαθίσταται από τον αντίστοιχο ακέραιο θετικό πραγματικό n^*, οπότε το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ αντικαθίσταται από το αντίστοιχο υποσύνολο $\mathbb{Z}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$. Όμως, χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο n στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου n^* του $\mathbb{Z}_+{}^*$. Επίσης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{Z}_+$ ή, ισοδύναμα, το σύμβολο $\mathbb{N}$ για το σύνολο $\mathbb{Z}_+{}^*$ και χρησιμοποιούμε την ονομασία "θετικός ακέραιος" αντί "ακέραιος θετικός πραγματικός" για τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+{}^*$. Δηλαδή, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+{}^*$, έτσι ώστε κάθε θετικός ακέραιος να θεωρείται ακέραιος θετικός πραγματικός και το σύνολο $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}_+$.

Μετά από αυτές τις αλλαγές, έχει ενδιαφέρον να δούμε πώς διατυπώνονται μερικές από τις προηγούμενες προτάσεις.

Η πρόταση 13.67 λέει:

Ανάμεσα σε δυο οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός ρητός.

Η πρόταση 13.66 περιγράφει την αντιστοιχία ανάμεσα στη σχέση διάταξης των (νέων) θετικών ρητών με τους θετικούς πραγματικούς και στη σχέση εγκλεισμού των (παλαιών) θετικών ρητών με τους θετικούς πραγματικούς: *ένας (νέος) θετικός ρητός είναι μικρότερος από έναν θετικό πραγματικό αν και μόνο αν ο αντίστοιχος (παλαιός) θετικός ρητός περιέχεται στον ίδιο θετικό πραγματικό* και *ένας (νέος) θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με έναν θετικό πραγματικό αν και μόνο αν ο αντίστοιχος (παλαιός) θετικός ρητός δεν περιέχεται στον ίδιο θετικό πραγματικό.*

Μετά από αυτά, η πρόταση 13.65 λέει το εξής "προφανές": *ένας θετικός πραγματικός είναι θετικός ρητός αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστος θετικός ρητός μεγαλύτερος από ή ίσος με αυτόν και, σ' αυτήν την περίπτωση, αυτός ο ελάχιστος θετικός ρητός είναι ο ίδιος ο εαυτός του.*

Η πρόταση 13.60 λέει:

$x1 = x$ για κάθε x θετικό πραγματικό.

Η πρόταση 13.61 λέει:

Για κάθε θετικό πραγματικό x υπάρχει θετικός πραγματικός y ώστε $xy = 1$.

13.4 Οι πραγματικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Εκτός από τους θετικούς πραγματικούς, δηλαδή τα στοιχεία του $\mathbb{R}_+$, δημιουργούμε ένα στοιχείο το οποίο ονομάζουμε **μηδέν** και συμβολίζουμε 0. Θεωρούμε τον 0 διαφορετικό από κάθε $x \in \mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}_+$, δημιουργούμε ένα νέο στοιχείο το οποίο ονομάζουμε **μείον** x ή **αντίθετο** του x και συμβολίζουμε $-x$. Θεωρούμε ότι κάθε $-x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ είναι διαφορετικός από τον 0 καθώς και από κάθε $y \in \mathbb{R}_+$. Επίσης, θεωρούμε ότι, για κάθε δυο διαφορετικούς $x, y \in \mathbb{R}_+$, οι αντίστοιχοι $-x, -y$ είναι διαφορετικοί.*

*Οι $-x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ ονομάζονται **αρνητικοί πραγματικοί** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{R}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{R}_- = \{-x \,|\, x \in \mathbb{R}_+\}$. Οι θετικοί πραγματικοί, το μηδέν και οι αρνητικοί πραγματικοί ονομάζονται **πραγματικοί** και συμβολίζουμε $\mathbb{R}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.*
*Οι $-r$ $(r \in \mathbb{Q}_+)$ ονομάζονται **αρνητικοί ρητοί** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{Q}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{Q}_- = \{-r \,|\, r \in \mathbb{Q}_+\}$. Οι θετικοί ρητοί, το μηδέν και οι αρνητικοί ρητοί ονομάζονται **ρητοί** και συμβολίζουμε $\mathbb{Q}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.*
*Τέλος, οι $-n$ $(n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N})$ ονομάζονται **αρνητικοί ακέραιοι** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{Z}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{Z}_- = \{-n \,|\, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Οι θετικοί ακέραιοι, το μηδέν και οι αρνητικοί ακέραιοι ονομάζονται **ακέραιοι** και συμβολίζουμε $\mathbb{Z}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.*

Διάταξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε $|x|$ και ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του x τον πραγματικό που ορίζεται με τον τύπο*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ y, & \text{αν } x = -y, y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι, αν ο x δεν είναι μηδέν, τότε ο $|x|$ είναι θετικός πραγματικός.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ότι $x, y \in \mathbb{R}$. Το νόημα του $x > y$ ή του ισοδύναμου $y < x$ είναι ήδη γνωστό στην περίπτωση που οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $y < x$ αν (i) οι x, y είναι και οι δυο αρνητικοί και $|x| < |y|$ ή (ii) είναι ο x θετικός και ο y αρνητικός ή (iii) είναι ο x θετικός και $y = 0$ ή (iv) είναι $x = 0$ και ο y αρνητικός.*

Η πρόταση 13.68 είναι προφανής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.68. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ο x είναι θετικός αν και μόνο αν $x > 0$. Επίσης, ο x είναι αρνητικός αν και μόνο αν $x < 0$.*

Οι προτάσεις 13.69 και 13.70, παρακάτω, αποδεικνύονται με απλή εφαρμογή των ορισμών διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς το αν οι πραγματικοί είναι θετικοί ή αρνητικοί ή μηδέν και με αναγωγή στην περίπτωση των θετικών πραγματικών. Θα αποφύγουμε να γράψουμε τις τελείως στοιχειώδεις αποδείξεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.69. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $x = y$, $x > y$, $x < y$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον y και συμβολίζουμε $x \geq y$ ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον x και συμβολίζουμε $y \leq x$ αν $x > y$ ή $x = y$ ή, ισοδύναμα, αν $y < x$ ή $y = x$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.70. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$.*
[α] *Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.*
[β] *Αν $x \leq y$ και $y < z$ ή αν $x < y$ και $y \leq z$, τότε $x < z$.*
[γ] *Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.*

Πρόσθεση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Έχει ήδη οριστεί το άθροισμα $x + y$ αν οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Ορίζουμε το **άθροισμα** των x, y και το συμβολίζουμε*

$$x + y$$

να είναι (i) ο $-(|x|+|y|)$ αν $x<0$, $y<0$, (ii) ο $|x|-|y|$ αν $x>0$, $y<0$, $|x|>|y|$, (iii) ο $-(|y|-|x|)$ αν $x>0$, $y<0$, $|x|<|y|$, (iv) ο 0 αν $x>0$, $y<0$, $|x|=|y|$, (v) ο $|y|-|x|$ αν $x<0$, $y>0$, $|y|>|x|$, (vi) ο $-(|x|-|y|)$ αν $x<0$, $y>0$, $|y|<|x|$, (vii) ο 0 αν $x<0$, $y>0$, $|x|=|y|$, $(viii)$ ο x αν $y=0$ και (ix) ο y αν $x=0$.
*Έτσι, η πράξη **πρόσθεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

Όλες οι επόμενες προτάσεις αποδεικνύονται με αναγωγή σε περιπτώσεις όπου όλες οι μεταβλητές έχουν θετικές τιμές. Παραλείπουμε τις βαρετές πράξεις - δεν προσφέρουν τίποτα ουσιαστικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.71. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $x+y=y+x$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.72. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x+y)+z=x+(y+z)$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε ορίσει τον αντίθετο του x αν ο x είναι θετικός. Αν, τώρα, ο x δεν είναι θετικός, ορίζουμε τον **αντίθετο** του x και τον συμβολίζουμε*

$$-x$$

να είναι (i) ο 0 αν $x=0$ και (ii) ο $|x|$ αν $x<0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.73. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x>0$ ή $x=0$ ή $x<0$ αν και μόνο αν, αντιστοίχως, $-x<0$ ή $-x=0$ ή $-x>0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.74. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-(-x)=x$, $|-x|=|x|$ και $x+(-x)=0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.75. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $-(x+y)=-x+(-y)$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ονομάζουμε **διαφορά** των x, y και συμβολίζουμε*

$$x-y$$

*τον $x+(-y)$. Έτσι, η πράξη **αφαίρεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.76. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $-(x-y)=y-x$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.77. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $x>y$ αν και μόνο αν $x-y>0$ αν και μόνο αν $y-x<0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.78. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $x>y$ αν και μόνο αν $-x<-y$. Επίσης, ισχύει $x=y$ αν και μόνο αν $-x=-y$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.79. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ισχύει $x<y$ αν και μόνο αν $x+z<y+z$. Επίσης, ισχύει $x=y$ αν και μόνο αν $x+z=y+z$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.80. *Έστω $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.*
[α] *Αν $x<y$ και $z<w$, τότε $x+z<y+w$.*
[β] *Αν $x \leq y$ και $z<w$ ή αν $x<y$ και $z \leq w$, τότε $x+z<y+w$.*
[γ] *Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x+z \leq y+w$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.81. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}$ ώστε $x+z=y$.*

Ο μοναδικός z στην πρόταση 13.81 είναι ο $y+(-x)=y-x$.

Πολλαπλασιασμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Έχει ήδη οριστεί το γινόμενο xy αν οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Ορίζουμε το* ***γινόμενο*** *των x, y και το συμβολίζουμε*

$$x \cdot y$$

ή, πιο απλά, xy να είναι (i) ο $|x||y|$ αν $x < 0$, $y < 0$, (ii) ο $-(|x||y|)$ αν $x < 0$, $y > 0$ ή $x > 0$, $y < 0$ και (iii) ο 0 αν $x = 0$ ή $y = 0$.
Έτσι, η πράξη ***πολλαπλασιασμός*** *επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.82. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Ισχύει $xy = 0$ αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους x, y είναι μηδέν.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.83. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $|xy| = |x||y|$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.84. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $xy = yx$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.85. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύει $(xy)z = x(yz)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.86. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x1 = x$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.87. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $(-x)y = x(-y) = -xy$, $(-x)(-y) = xy$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.88. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύει $x(y + z) = xy + xz$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.89. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$. Αν $z > 0$, τότε ισχύει $x > y$ αν και μόνο αν $xz > yz$. Αν $z < 0$, τότε ισχύει $x > y$ αν και μόνο αν $xz < yz$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Αν ο x είναι θετικός, έχουμε ήδη ορίσει τον αντίστροφό του. Τώρα, αν ο x είναι αρνητικός, συμβολίζουμε*

$$x^{-1}$$

και ονομάζουμε ***αντίστροφο*** *του x τον $-|x|^{-1}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.90. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ ισχύει $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.91. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Τότε υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}$ ώστε $xz = y$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο z που ικανοποιεί την $xz = y$ είναι, απλώς, ο $x^{-1}y$. Αυτός ο πραγματικός ονομάζεται* ***λόγος*** *των y, x και συμβολίζεται*

$$\frac{y}{x}.$$

Έτσι, η πράξη ***διαίρεση*** *επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

Η ιδιότητα supremum.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα μη-κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* ***άνω φραγμένο*** *αν υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $a \leq u$ για κάθε $a \in A$. Κάθε u με αυτήν την ιδιότητα χαρακτηρίζεται* ***άνω φράγμα*** *του A.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.6. *Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}_+$. Το A έχει μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα.*

Απόδειξη. Το A είναι άνω φραγμένο, οπότε υπάρχει $u_1 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $a \leq u_1$ για κάθε $a \in A$.
Πρώτη περίπτωση: Έστω ότι το A περιέχει τουλάχιστον έναν $a_0 \in \mathbb{R}_+$.
Τότε το $A_1 = A \cap \mathbb{R}_+$ είναι μη-κενό και ισχύει $a \leq u_1$ για κάθε $a \in A_1$. Άρα το A_1 είναι μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ και, σύμφωνα με το θεώρημα 13.5, το A_1 έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω u_0, στο $\mathbb{R}_+$. Έστω $a \in A$ και $a \in \mathbb{R}_+$. Τότε $a \in A_1$, οπότε $a \leq u_0$. Έστω

$a \in A$ και $a \notin \mathbb{R}_+$. Τότε $a \leq a_0$ και, επειδή $a_0 \leq u_0$, ισχύει $a \leq u_0$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, αν $a \in A$, τότε $a \leq u_0$, οπότε ο u_0 είναι άνω φράγμα του A. Τώρα, έστω u άνω φράγμα του A. Τότε ο u είναι άνω φράγμα και του A_1, οπότε $u_0 \leq u$. Άρα ο u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι το A δεν περιέχει κανένα στοιχείο του $\mathbb{R}_+$.
Έστω $a_0 \in A$, οπότε $a_0 \leq 0$. Θεωρούμε $a_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $a_0 + a_1 \in \mathbb{R}_+$ και ορίζουμε το σύνολο $A_1 = \{a + a_1 \,|\, a \in A\}$. Το A_1 είναι μη-κενό και άνω φραγμένο διότι ο $u_1 + a_1$ έχει την ιδιότητα: $a + a_1 \leq u_1 + a_1$ για κάθε $a \in A$. Επίσης, το A_1 περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\mathbb{R}_+$ (το $a_0 + a_1$). Από την πρώτη περίπτωση, το A_1 έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω u_2. Τώρα, για κάθε $a \in A$ ισχύει $a + a_1 \in A_1$, οπότε $a + a_1 \leq u_2$ και, επομένως, $a \leq u_2 - a_1$. Άρα ο $u_0 = u_2 - a_1$ είναι άνω φράγμα του A. Επίσης, αν ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε για κάθε $a \in A$ ισχύει $a + a_1 \leq u + a_1$, οπότε ο $u + a_1$ είναι άνω φράγμα του A_1 και, επομένως, $u + a_1 \leq u_2$ και άρα $u \leq u_2 - a_1 = u_0$. Άρα ο u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Άρα, σε κάθε περίπτωση το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα u_0.
Έστω, επίσης, $u_0{}'$ ελάχιστο άνω φράγμα του A. Επειδή το u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A και το $u_0{}'$ είναι άνω φράγμα του A, ισχύει $u_0 \leq u_0{}'$. Ομοίως, επειδή το $u_0{}'$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A και το u_0 είναι άνω φράγμα του A, ισχύει $u_0{}' \leq u_0$. Άρα $u_0 = u_0{}'$. $\square$

Οι βασικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

Όλες οι ιδιότητες του $\mathbb{R}$ που παρουσιάζονται στο θεώρημα 13.7 έχουν αποδειχθεί. Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζονται “βασικές” διότι με βάση αυτές μπορούν να αποδειχτούν όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.7. 1. **Ιδιότητες πρόσθεσης**. *Σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $x + y$ και:*
α. $x + y = y + x$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$.
β. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
γ. *υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 0 ώστε $x + 0 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*
δ. *για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $-x$ ώστε $x + (-x) = 0$.*
2. **Ιδιότητες πολλαπλασιασμού**. *Σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε xy και:*
α. $xy = yx$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$.
β. $(xy)z = x(yz)$ *για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
γ. *υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 1, διαφορετικό από τον 0, ώστε $x1 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*
δ. *για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε x^{-1} ώστε $xx^{-1} = 1$.*
3. **Επιμεριστική ιδιότητα**. $x(y + z) = xy + xz$ *για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
4. **Ιδιότητες διάταξης**. *Υπάρχει ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{R}_+$ ώστε:*
α. $x + y \in \mathbb{R}_+$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}_+$,
β. $xy \in \mathbb{R}_+$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}_+$,
γ. *για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα $x = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, $-x \in \mathbb{R}_+$ είναι σωστό.*
5. **Ιδιότητα supremum**. *Κάθε μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Επειδή το $\mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού καθώς και την επιμεριστική ιδιότητα, χαρακτηρίζεται **σώμα**. Επειδή το $\mathbb{R}$ έχει και τις ιδιότητες διάταξης, χαρακτηρίζεται **διατεταγμένο σώμα**. Τέλος, επειδή το $\mathbb{R}$ έχει και την ιδιότητα supremum, χαρακτηρίζεται **πλήρες διατεταγμένο σώμα**.

13.5 Εναλλακτικές μέθοδοι.

Στην υποενότητα 13.3 περιγράψαμε έναν τρόπο ορισμού των θετικών πραγματικών θεωρώντας γνωστούς τους θετικούς ρητούς (τους οποίους είχαμε ορίσει στην ενότητα 13.2 θεωρώντας γνωστούς τους φυσικούς από την ενότητα 13.1). Η μέθοδος που εφαρμόσαμε είναι η μέθοδος των **τομών Dedekind**.

Κάθε μέθοδος ορισμού των θετικών πραγματικών έχει τα εξής βασικά "συστατικά". Κατ' αρχάς ορίζονται τα "αντικείμενα" τα οποία χαρακτηρίζονται *θετικοί πραγματικοί*. Κατόπιν καθορίζεται μια **σχέση διάταξης** στο σύνολο των θετικών πραγματικών: καθορίζεται, δηλαδή, τι σημαίνει να είναι ένας θετικός πραγματικός *μεγαλύτερος* (ή *μικρότερος*) από έναν άλλον. Μετά ορίζεται η πράξη **πρόσθεση**: περιγράφεται διαδικασία σχηματισμού του *αθροίσματος* δυο θετικών πραγματικών. Τέλος, ορίζεται η πράξη **πολλαπλασιασμός**: περιγράφεται διαδικασία σχηματισμού του *γινομένου* δυο θετικών πραγματικών.

Αφού οριστεί η διάταξη και οι δυο πράξεις στο σύνολο των θετικών πραγματικών, απομένει να αποδειχτούν όλες οι γνωστές ιδιότητες: οι ιδιότητες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, επιμερισμού, διάταξης και, κυρίως, η ιδιότητα supremum.

Τέλος, από το σύνολο των θετικών πραγματικών ορίζεται το σύνολο των πραγματικών με τη διαδικασία της ενότητας 13.4.

Θα περιγράψουμε, τώρα, πολύ συνοπτικά, δυο εναλλακτικές μεθόδους ορισμού των θετικών πραγματικών θεωρώντας, πάντοτε, γνωστούς τους θετικούς ρητούς. Θα αποφύγουμε τις αποδείξεις, περιοριζόμενοι στην περιγραφή των εννοιών.

Η μέθοδος με τις ακολουθίες Cauchy.

Μια ακολουθία (r_n) στο $\mathbb{Q}_+$ χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|r_n - r_m| < \varepsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$.

Λέμε ότι δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$ είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $(r_n) \sim (s_n)$ αν $\lim_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|r_n - s_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* ανάμεσα στις ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$. Έτσι το σύνολο των ακολουθιών Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ διαμερίζεται σε *κλάσεις ισοδυναμίας*: δυο ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ οι οποίες είναι ισοδύναμες ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και δυο ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας ονομάζεται **θετικός πραγματικός** και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των θετικών πραγματικών, συμβολίζεται $\mathbb{R}_+$.

Έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Λέμε ότι η (r_n) είναι **μεγαλύτερη από** την (s_n) ή, ισοδύναμα, ότι η (s_n) είναι **μικρότερη από** την (r_n) και συμβολίζουμε $(r_n) \succ (s_n)$ ή, ισοδύναμα, $(s_n) \prec (r_n)$ αν υπάρχουν $\delta \in \mathbb{Q}_+$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $r_n - s_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αποδεικνύεται ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \succ (s_n)$, $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(t_n) \succ (u_n)$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν ισχύει $(r_n) \succ (s_n)$ ή, ισοδύναμα, $(s_n) \prec (r_n)$.

Έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $(r_n + s_n)$ στο $\mathbb{Q}_+$ είναι ακολουθία Cauchy. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(r_n + s_n) \sim (t_n + u_n)$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Ορίζουμε $x + y \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $(r_n + s_n)$.

Τέλος, έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $(r_n s_n)$ στο $\mathbb{Q}_+$ είναι ακολουθία Cauchy και, επίσης, ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(r_n s_n) \sim (t_n u_n)$. Άρα μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Ορίζουμε $xy \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $(r_n s_n)$.

Αφού ορίσαμε τη σχέση διάταξης, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο $\mathbb{R}_+$, αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathbb{R}_+$ έχει όλες τις ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 3, συμπεριλαμβανομένης της ιδιότητας supremum.

Υπάρχει μια παραλλαγή αυτής της μεθόδου, δηλαδή της μεθόδου του **Cantor**, όπου αντί για ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ χρησιμοποιούνται αύξουσες, άνω φραγμένες ακολουθίες στο $\mathbb{Q}_+$.

Η μέθοδος με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.

Μια ακολουθία διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ θα λέμε ότι είναι **σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων** στο $\mathbb{Q}_+$ αν η (r_n) είναι αύξουσα στο $\mathbb{Q}_+$ και η (r_n') είναι φθίνουσα στο $\mathbb{Q}_+$ και $\lim_{n\to+\infty}(r_n' - r_n) = 0$.

Λέμε ότι δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$ είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $([r_n, r_n']) \sim ([s_n, s_n'])$ αν $\lim_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{n\to+\infty}(r_n' - s_n') = 0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* ανάμεσα στις σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Έτσι το σύνολο των σημειακών ακολουθιών εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ διαμερίζεται σε *κλάσεις ισοδυναμίας*. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας θα την ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των θετικών πραγματικών, θα το συμβολίζουμε $\mathbb{R}_+$.

Έστω δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$. Λέμε ότι η $([r_n, r_n'])$ είναι **μεγαλύτερη από** την $([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, ότι η $([s_n, s_n'])$ είναι **μικρότερη από** την $([r_n, r_n'])$ και συμβολίζουμε $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, $([s_n, s_n']) \prec ([r_n, r_n'])$ αν υπάρχουν $\delta \in \mathbb{Q}_+$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $r_n - s_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αποδεικνύεται ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$, $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([t_n, t_n']) \succ ([u_n, u_n'])$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν ισχύει $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, $([s_n, s_n']) \prec ([r_n, r_n'])$.

Έστω δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $([r_n + s_n, r_n' + s_n'])$ είναι σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([r_n + s_n, r_n' + s_n']) \sim ([t_n + u_n, t_n' + u_n'])$. Μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε τα εξής. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Ορίζουμε $x + y \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $([r_n + s_n, r_n' + s_n'])$.

Τέλος, έστω σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $([r_n s_n, r_n' s_n'])$ είναι σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([r_n s_n, r_n' s_n']) \sim ([t_n u_n, t_n' u_n'])$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Ορίζουμε $xy \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $([r_n s_n, r_n' s_n'])$.

Κατόπιν, μπορεί να αποδειχτεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}_+$ έχει όλες τις ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 3, συμπεριλαμβανομένης της ιδιότητας supremum.