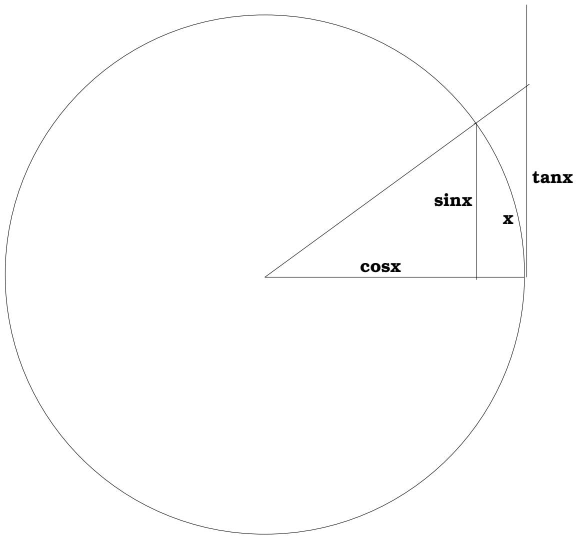
Οι Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θα θεωρήσουμε γνωστές τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως αυτές ορίζονται με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου και τις βασικές αλγεβρικές τους ιδιότητες.



Υπενθυμίζουμε τις αναλυτικές τους ιδιότητες:

1. *Οι* $\sin$ *και* $\cos$ *είναι συνεχείς στο* 0.

Απόδειξη Η ανισότητα $|\sin x| \leq |x|$, που ισχύει όταν $|x| < \frac{\pi}{2}$, δείχνει ότι το όριο $\lim_{x\to 0} \sin x$ υπάρχει και είναι 0, άρα η $\sin$ είναι συνεχής στο 0. Η σχέση $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ δείχνει ότι $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, άρα η $\cos$ είναι συνεχής στο 0.

2. *Οι* $\sin$ *και* $\cos$ *είναι συνεχείς παντού στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη $\lim\limits_{h\to 0} \sin(x+h) = \sin x \lim\limits_{h\to 0} \cos h + \cos x \lim\limits_{h\to 0} \sin h = \sin x.$

$\lim\limits_{h\to 0} \cos(x+h) = \cos x \lim\limits_{h\to 0} \cos h - \sin x \lim\limits_{h\to 0} \sin h = \cos x.$

3. *Ισχυρισμός:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Απόδειξη Από τον τριγωνομετρικό κύκλο ξέρουμε ότι

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

άρα, αφού η sin είναι περιττή και η cos άρτια,

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

οπότε (αφού $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

4. $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

Απόδειξη Από τους γνωστούς τύπους $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ και $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{1}{h}2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}\\ &= \frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x.\\ \text{και}\quad \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= -\frac{1}{h}2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2} \xrightarrow[h\to 0]{} -\sin x\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το όριο (3) και την συνέχεια των sin και cos. Επίσης,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) &= \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Συνέχεια και παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης

Υπενθύμιση: Έχουμε δείξει ότι, αν $x \in \mathbb{R}$ και $(p_n), (p'_n)$ είναι δύο οποιεσδήποτε ακολουθίες ρητών που συγκλίνουν στο x, οι ακολουθίες (e^{p_n}) και $(e^{p'_n})$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο, το οποίο ονομάζουμε $\exp(x)$ ή e^x.

Ορισμός 0.1 *Η **εκθετική συνάρτηση*** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ορίζεται ως εξής: Αν* $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \lim_n e^{p_n}$$

όπου (p_n) *είναι οποιαδήποτε ακολουθία ρητών που συγκλίνει στο* x.
Γράφουμε συχνά e^x *αντί για* $\exp(x)$.

Έχουμε δείξει ότι η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Λήμμα 0.1 *Αν* $s \in (0,1)$ *είναι ρητός, τότε*

$$1 + s \leq e^s \leq \frac{1}{1-s}.$$

Απόδειξη Μπορούμε να γράψουμε $s = p/q$, όπου $p < q$ φυσικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι $e > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q$, οπότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli βλέπουμε ότι

$$e^s > \left(\left(1 + \frac{1}{q}\right)^q\right)^{p/q} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^p \geq 1 + \frac{p}{q} = 1 + s.$$

Δείχνουμε τώρα ότι $e^s \leq \frac{1}{1-s}$: Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, εφόσον $\frac{1}{kq} < \frac{1}{kp}$, χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση

$$n \in \mathbb{N},\ 0 \leq a < \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ (1+a)^n < \frac{1}{1-na}$$

με $a = \frac{1}{kq}$ και $n = kp$ βλέπουμε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{kq}\right)^{kp} < \frac{1}{1 - p/q}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$e^s \overset{(1)}{=} \left[\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{kq}\right)^{kq}\right]^{p/q} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{kq}\right)^{kp} \leq \frac{1}{1-p/q} = \frac{1}{1-s}.$$

[1] Αιτιολόγηση: η ακολουθία $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ συγκλίνει στο e. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_o$ να ισχύει $\left|(1 + \frac{1}{n})^n - e\right| < \varepsilon$. Συνεπώς για κάθε $k \geq n_o/q$ έχουμε $\left|(1 + \frac{1}{kq})^{kq} - e\right| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{kq}\right)^{kq} = e$.

Πρόταση 0.2 *Η συνάρτηση* exp *είναι παντού παραγωγίσιμη και* $\exp'(x) = \exp(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη Έστω $s \in (0,1)$. Θεωρώντας ακολουθία (s_n) στο $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ με $s_n \to s$, έχουμε $1 + s = \lim_n (1 + s_n)$ και $\frac{1}{1-s} = \lim_n \frac{1}{1-s_n}$. Επίσης όμως, από τον ορισμό της συνάρτησης exp έχουμε $e^s = \lim_n e^{s_n}$. Επομένως από το Λήμμα συμπεραίνουμε ότι

$$1 + s \leq e^s \leq \frac{1}{1-s} \quad \text{για κάθε} \ \ s \in (0,1). \tag{2}$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$1 \leq \frac{e^s - 1}{s} \leq \frac{1}{1-s}, \tag{3}$$

και παίρνοντας όριο καθώς $s \to 0^+$ παίρνουμε

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{e^s - 1}{s} = 1.$$

Για το όριο καθώς $s \to 0^-$ εργαζόμαστε ως εξής: Αν $-1 < s < 0$ θέτουμε $u = -s$ και έχουμε από την (3), αφου $0 < e^{-u} < 1$,

$$e^{-u} < e^{-u}\frac{e^u - 1}{u} < e^{-u}\frac{1}{1-u} < \frac{1}{1-u}. \tag{4}$$

Αλλά $0 < e^u < \frac{1}{1-u}$ από την (2) άρα $e^{-u} > 1 - u$ οπότε από την (4) έχουμε

$$1 - u < e^{-u} < \frac{1 - e^{-u}}{u} < \frac{1}{1-u}$$

δηλαδή

$$1 + s < \frac{e^s - 1}{s} < \frac{1}{1+s}$$

οπότε $\lim_{s \to 0^-} \dfrac{e^s - 1}{s} = 0$.

Τελικά δείξαμε ότι το όριο $\lim_{s \to 0} \dfrac{e^s - 1}{s}$ υπάρχει και είναι 0.

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$: έχουμε

$$\frac{e^{x+s} - e^x}{s} = \frac{e^x e^s - e^x}{s} = e^x \, \frac{e^s - 1}{s} \to e^x \cdot 1 = e^x$$

καθώς $s \to 0$, άρα η exp είναι παραγωγίσιμη στο x και $(\exp)'(x) = \exp(x)$. □

Πόρισμα 0.3 *Η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής.*

Παρατήρηση Δεν είναι δύσκολο να δώσει κανείς μια ανεξάρτητη απόδειξη για την συνέχεια της exp.