8 Παράγωγος

Ορισμός 8.1 *Έστω $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $c \in (a,b)$. Λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο c αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \in \mathbb{R}.$$

*Το όριο αυτό λέγεται **παράγωγος της** f **στο** c και συμβολίζεται $f'(c)$ ή $\dfrac{df}{dx}(c)$.*

Ισοδύναμα η f έχει παράγωγο $f'(c)$ στο c αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } \ x \in (a,b) \ \text{ και } \ 0 < |x-c| < \delta \quad \text{τότε} \quad \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < \varepsilon.$$

Θέτοντας $h = x - c$ προκύπτει ότι:
Η παράγωγος $f'(c)$ υπάρχει αν και μόνον αν το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

υπάρχει και ισούται με $f'(c)$.

Παραδείγματα 8.1 ***(1)*** *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = \lambda$ για κάθε x τότε η ϕ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ και $\phi'(x_o) = 0$.*
(2) *Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x$ για κάθε x είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ και $g'(x_o) = 1$.*
(3) *Η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = |x|$ για κάθε x είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_1 > 0$ και $h'(x_1) = 1$. Είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_2 < 0$ και $h'(x_2) = -1$. Όμως η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.*

Αποδεικνύουμε το **(3)**: Αν $x_1 > 0$ τότε στην περιοχή $(0, 2x_1)$ του x_1 έχουμε $h(x) = x$ και επομένως $\frac{h(x)-h(x_1)}{x-x_1} = 1$ για κάθε $x \in (0, 2x_1) \setminus \{x_1\}$ άρα το όριο $\lim\limits_{x\to x_1} \frac{h(x)-h(x_1)}{x-x_1}$ υπάρχει και ισούται με 1. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $h'(x_2) = -1$.

Αν εξετάσουμε όμως τα κλάσματα $k(x) = \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ σε μια περιοχή του 0, παρατηρούμε ότι $k(x) = 1$ όταν $x > 0$ ενώ $k(x) = -1$ όταν $x < 0$. Επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει (τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ και $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ υπάρχουν και είναι διαφορετικά).

(4) *Η συνάρτηση* $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $w(x)=x^2$ *για κάθε* x *είναι παραγωγίσιμη σε κάθε* $x_o\in\mathbb{R}$ *και* $w'(x_o)=2x_o$.

(5) *Η συνάρτηση* $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *όπου* $u(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x\geq 0\\ x^2 & \text{αν } x<0\end{cases}$ *είναι παραγωγίσιμη σε κάθε* $x_o\neq 0$, *όχι όμως και στο* 0.

Για να αποδείξουμε το **(5)**, παρατηρούμε ότι αν $x_o<0$ τότε στην περιοχή $(2x_o,0)$ του x_o έχουμε $u(x)=x^2$ και επομένως για κάθε $x\in(2x_o,0)\setminus\{x_o\}$ έχουμε $\frac{u(x)-u(x_o)}{x-x_o}=x+x_o$ άρα το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{u(x)-u(x_o)}{x-x_o}$ υπάρχει και ισούται με $2x_o$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν $x_o>0$ τότε $u'(x_o)=1$.

Όμως

$$\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=\begin{cases} 1 & \text{αν } x>0\\ x & \text{αν } x<0\end{cases}$$

επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{u(x)-h(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει (τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}$ και $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}$ υπάρχουν και είναι διαφορετικά).

(6) *Η συνάρτηση* $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *όπου* $v(x)=\begin{cases} x^3 & \text{αν } x\geq 0\\ x^2 & \text{αν } x<0\end{cases}$ *είναι παραγωγίσιμη σε κάθε* $x_o\in\mathbb{R}$.

Για την παράγωγο στο 0, έχουμε

$$\frac{v(x)-v(0)}{x-0}=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x>0\\ x & \text{αν } x<0\end{cases}$$

άρα στην περίπτωση αυτή το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{v(x)-v(0)}{x-0}$ υπάρχει και ισούται με 0: Πράγματι[1], για κάθε $x\in[-1,1]$ έχουμε $\left|\dfrac{v(x)-v(0)}{x-0}\right|\leq|x|$. Εφόσον λοιπόν το $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ υπάρχει και είναι 0, το $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{v(x)-v(0)}{x-0}\right|$ υπάρχει και είναι 0.
Εύκολα αποδεικνύει κανείς ότι $v'(x)=3x^2$ αν $x>0$ και $v'(x)=2x$ αν $x<0$.

(7) *Η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)=\sqrt{|x|}$ *είναι παραγωγίσιμη σε κάθε* $x_o\in\mathbb{R}$ *εκτός του* 0*: Αν* $x_o>0$ *τότε* $f'(x_o)=\frac{1}{2\sqrt{|x_o|}}$, *αν* $x_o<0$ *τότε* $f'(x_o)=\frac{-1}{2\sqrt{|x_o|}}$, *ενώ η* $f'(0)$ *δεν υπάρχει.*

[1] Άλλη απόδειξη: τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα με 0.

Απόδειξη:

Αν $x_o < 0$ τότε, για να βρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ αρκεί να περιορίσουμε το x σε μια περιοχή του x_o, οπότε αρκεί να θεωρήσουμε $x < 0$ με $x \neq x_o$. Τότε $(\sqrt{-x_o} - \sqrt{-x})(\sqrt{-x_o} + \sqrt{-x}) = (-x_o) - (-x) = x - x_o$, άρα έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{\sqrt{-x}-\sqrt{-x_o}}{(\sqrt{-x_o}-\sqrt{-x})(\sqrt{-x_o}+\sqrt{-x})} = \frac{-1}{\sqrt{-x_o}+\sqrt{-x}} \underset{x\to x_o}{\longrightarrow} \frac{-1}{2\sqrt{-x_o}}$$

(το όριο $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt{-x}$ υπάρχει και ισούται με $\sqrt{-x_o}$ γιατί, όπως έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη παράγραφο, η f είναι συνεχής στο x_o.) Επομένως η $f'(x_o)$ υπάρχει και ισούται με $\frac{-1}{2\sqrt{|x_o|}}$. Ομοίως, αν $x_o > 0$ δείχνουμε ότι $f'(x_o) = \frac{1}{2\sqrt{|x_o|}}$. Όμως, αν $x_o = 0$, για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} & \text{αν } x > 0 \\ \frac{\sqrt{|x|}}{-|x|} & \text{αν } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{αν } x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

επομένως το όριο καθώς το x τείνει στο 0 δεν υπάρχει, γιατί αν $x \in (0,1)$ τότε $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} > 1$ ενώ αν $x \in (-1,0)$ τότε $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} < -1$.

Πρόταση 8.2 (Παρατήρηση Καραθεοδωρή) *Έστω $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_o \in (a,b)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ που είναι*
(i) συνεχής στο x_o και
(ii) ικανοποιεί $\phi(x) = \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ για κάθε $x \in (a,b)\setminus\{x_o\}$.
Τότε έχουμε $f'(x_o) = \phi(x_o)$.

Απόδειξη Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o. Ορίζουμε τότε τη συνάρτηση $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ από τον τύπο

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} & \text{αν } x \neq x_o \\ f'(x_o) & \text{αν } x = x_o \end{cases}$$

Η ϕ είναι συνεχής στο x_o εφόσον το όριο $\lim\limits_{x\to x_o} \phi(x)$ υπάρχει και ισούται με $\phi(x_o)$.

Αντίστροφα αν υπάρχει συνάρτηση ϕ όπως στην εκφώνηση τότε, εφόσον η ϕ είναι συνεχής στο x_o, το όριο $\lim\limits_{x\to x_o} \phi(x)$ υπάρχει και ισούται με $\phi(x_o)$.

Αλλά για κάθε $x \in (a, b)$, $x \neq x_o$, έχουμε $\phi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$. Δηλαδή το όριο $\lim_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ υπάρχει και ισούται με $\phi(x_o)$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η παράγωγός της ισούται με την τιμή αυτού του ορίου, δηλαδή $f'(x_o) = \phi(x_o)$. □

Πρόταση 8.3 *Έστω $a < b$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_o \in (a, b)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε η f είναι συνεχής στο x_o.*

Απόδειξη Από την παρατήρηση Καραθεοδωρή υπάρχει συνάρτηση $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο x_o ώστε

$$f(x) - f(x_o) = \phi(x)(x - x_o)$$

για κάθε $x \in (a, b) \backslash \{x_o\}$. Εφόσον η ϕ είναι συνεχής στο x_o, το όριο $\lim_{x \to x_o} \phi(x)(x - x_o)$ υπάρχει και ισούται με $\phi(x_o) \cdot 0 = 0$. Δηλαδή το όριο $\lim_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με $f(x_o)$. Αυτό σημαίνει, όπως έχουμε αποδείξει, ότι η f είναι συνεχής στο x_o. □

Παρατήρηση 8.4 *Το αντίστροφο δεν ισχύει: μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη. Ένα παράδειγμα είναι η $h(x) = |x|$ (παράδειγμα 8.1(3)).*

Θεώρημα 8.5 *Έστω $a < b$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και $x_o \in (a, b)$. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o. Τότε*
(α) *Η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και $(f + g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$.*
(β) *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, η λf είναι παραγωγίσιμη στο x_o και $(\lambda f)'(x_o) = \lambda f'(x_o)$.*
(γ) *Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και*

$$(f \cdot g)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o).$$

(δ) *Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2}.$$

Απόδειξη Τα (α) και (β) έπονται άμεσα από τις ιδιότητες των ορίων.

Για το (γ), έχουμε

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_o)}{x-x_o}=f(x)\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}+g(x_o)\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$ και $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ υπάρχουν εξ υποθέσεως. Επίσης, $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$ γιατί η f είναι συνεχής στο x_o από την προηγούμενη πρόταση. Άρα, από τις ιδιότητες των ορίων,

$$\lim_{x\to x_o}\frac{(f\cdot g)(x)-(f.g)(x_o)}{x-x_o}=f(x_o)g'(x_o)+g(x_o)f'(x_o).$$

Τέλος, για το (δ) αρκεί να δείξουμε ότι η $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και έχει παράγωγο ίση με $\dfrac{-g'(x_o)}{g(x_o)^2}$ (και να εφαρμόσουμε το (γ)). Έχουμε

$$\lim_{x\to x_o}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_o)}}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\left(\frac{g(x_o)-g(x)}{x-x_o}\frac{1}{g(x)g(x_o)}\right)=-g'(x_o)\frac{1}{g(x_o)^2}$$

αφού $\lim\limits_{x\to x_o}g(x)=g(x_o)$ γιατί η g είναι συνεχής στο x_o. □

Το επόμενο Πόρισμα βελτιώνει το (δ) του Θεωρήματος:

Πόρισμα 8.6 *Έστω $a<b$, $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και $x_o\in(a,b)$. Υποθέτουμε ότι οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και ότι $g(x_o)\neq 0$. Τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ (ορίζεται σε μια περιοχή του x_o και) είναι παραγωγίσιμη στο x_o με*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2}.$$

Απόδειξη Αφού η g είναι παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο x_o και επειδή $g(x_o)\neq 0$, υπάρχει μια περιοχή του x_o, έστω (a',b'), ώστε $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a',b')$. Στην περιοχή (a',b') η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται και μπορούμε να εφαρμόσουμε το (δ) του Θεωρήματος.

Πόρισμα 8.7 *(ι) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o\in\mathbb{R}$.*
(ιι) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Θεώρημα 8.8 (Κανόνας αλυσίδας) *Έστω* $a < b$ *και* $f : (a, b) \to (c, d)$, $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ *δύο συναρτήσεις. Αν η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $x_o \in (a, b)$ *και η* g *είναι παραγωγίσιμη στο* $f(x_o)$, *τότε η* $g \circ f$ *είναι παραγωγίσιμη στο* x_o *και*

$$(g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o)) \cdot f'(x_o).$$

Απόδειξη Θέλουμε να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x \to x_o} \frac{g(f(x)) - g(f(x_o)}{x - x_o}$$

υπάρχει και ισούται με $g'(f(x_o)) \cdot f'(x_o)$.

Αν γράψουμε $y = f(x)$ και $y_o = f(x_o)$, έχουμε, *με την προϋπόθεση ότι το* $y - y_o$ *δεν μηδενίζεται,*

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_o)}{x - x_o} = \frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Αν μπορούσαμε να εξασφαλίσουμε ότι η προϋπόθεση αυτή θα ικανοποιείται για κάθε $x \neq x_o$ τότε θα μπορούσαμε να πάρουμε όρια στην τελευταία σχέση και να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Γενικά όμως η προϋπόθεση αυτή δεν ικανοποιείται. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση Καραθεοδωρή, μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία:

Αντί για το «προβληματικό» κλάσμα $\frac{g(y)-g(y_o)}{y-y_o}$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi : (c, d) \to \mathbb{R} \quad \text{όπου} \quad \psi(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_o)}{y-y_o} & \text{αν } y \neq y_o \\ g'(y_o) & \text{αν } y = y_o \end{cases}$$

που είναι συνεχής στο y_o, αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο y_o. Το πλεονέκτημα είναι ότι η ψ ορίζεται παντού στο (c, d) (άρα και για $y = y_o$).

Έστω $x \in (a, b) \backslash \{x_o\}$. Αν $f(x) \neq f(x_o)$, τότε $\psi(f(x)) = \frac{g(f(x))-g(f(x_o))}{f(x)-f(x_o)}$, άρα έχουμε

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_o))}{x - x_o} = \psi(f(x)) \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}. \tag{1}$$

Αν πάλι $f(x) = f(x_o)$ τότε και τα δύο μέλη της (1) μηδενίζονται. Δηλαδή η (1) ισχύει για κάθε $x \in (a, b) \backslash \{x_o\}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι το όριο καθώς $x \to x_o$ στην (1) υπάρχει: Πράγματι, το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ υπάρχει και ισούται με $f'(x_o)$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο x_o (γιατί είναι παραγωγίσιμη) και η ψ είναι συνεχής στο $y_o = f(x_o)$, άρα η σύνθεσή τους $\psi \circ f$ είναι συνεχής στο x_o και συνεπώς το όριο $\lim_{x \to x_o} \psi(f(x))$ υπάρχει και ισούται με $\psi(y_o) = g'(y_o) = g'(f(x_o))$. Επομένως τελικά

$$\lim_{x \to x_o} \frac{g(f(x)) - g(f(x_o))}{x - x_o} = \psi(f(x_o))f'(x_o) = g'(f(x_o))f'(x_o) \,. \qquad \square$$

Άσκηση 8.9 *Να βρεθεί το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό:*
«Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Αν $g = f^2$ τότε $g(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως $g'(x) = 0$ για κάθε x. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ και άρα (αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε x) έχουμε $f'(x) = 0$ για κάθε x.»

Θεώρημα 8.10 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 και έστω $x_o \in (a,b)$ στο οποίο υπάρχει η $f'(x_o)$. Θέτουμε $y_o = f(x_o)$.*

(ι) *Αν $f'(x_o) \neq 0$ τότε η $(f^{-1})'(y_o)$ υπάρχει και $(f^{-1})'(y_o) = \dfrac{1}{f'(x_o)}$.*

(ιι) *Αν $f'(x_o) = 0$ τότε η $(f^{-1})'(y_o)$ δεν υπάρχει.*

Απόδειξη (ι) Παρατηρούμε πρώτα ότι η εικόνα $f((a,b))$ είναι διάστημα (Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών) και μάλιστα ανοικτό διάστημα, γιατί όπως έχουμε αποδείξει, αφού η f είναι συνεχής και 1-1, είναι γνησίως μονότονη και επομένως δεν μπορεί να παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή σε ανοικτό διάστημα. Θέτουμε[2] $(c,d) = f((a,b))$ και

$$g = f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$$

και $y_o = f(x_0)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in (c,d)$ με $0 < |y - y_o| < \delta$ να ισχύει

$$\left| \frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} - \frac{1}{f'(x_o)} \right| < \varepsilon \,.$$

Αν $y \in (c,d)$ θέτουμε $x = g(y) \in (a,b)$ και παρατηρούμε ότι αν $y \neq y_o$ τότε $x \neq x_o$. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} = \frac{x - x_o}{y - y_o} = \frac{1}{\frac{y - y_o}{x - x_o}}.$$

[2]δεν αποκλείονται οι περιπτώσεις $c = -\infty$ ή $d = +\infty$

Αλλά
$$\frac{y-y_o}{x-x_o}=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\underset{x\to x_o}{\longrightarrow} f'(x_o).$$
Εφόσον λοιπόν $f'(x_o)\neq 0$, το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{1}{\frac{y-y_o}{x-x_o}}$ υπάρχει και ισούται με $\frac{1}{f'(x_o)}$. Επομένως υπάρχει $\theta>0$ ώστε για κάθε $x\in(a,b)$ με $0<|x-x_o|<\theta$ να ισχύει
$$\left|\frac{1}{\frac{y-y_o}{x-x_o}}-\frac{1}{f'(x_o)}\right|<\varepsilon\,.$$
Όμως η $g=f^{-1}$ είναι συνεχής, όπως έχουμε αποδείξει. Επομένως υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $y\in(c,d)$ με $|y-y_o|<\delta$ να ισχύει $|g(y)-g(y_o)|<\theta$, δηλαδή $|x-x_o|<\theta$. Συνεπώς για κάθε $y\in(c,d)$ με $0<|y-y_o|<\delta$ έχουμε $0<|x-x_o|<\theta$ και επομένως τελικά
$$\left|\frac{g(y)-g(y_o)}{y-y_o}-\frac{1}{f'(x_o)}\right|=\left|\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}-\frac{1}{f'(x_o)}\right|<\varepsilon\,.$$

(ιι) Αν η παράγωγος $g'(f(x_o))$ υπάρχει, τότε (αφού η $f'(x_o)$ υπάρχει εξ υποθέσεως) από τον κανόνα της αλυσίδας η παράγωγος της σύνθεσης $g\circ f$ στο x_o θα υπάρχει και
$$(g\circ f)'(x_o)=g'(f(x_o)).f'(x_o). \tag{2}$$
Αλλά η $g\circ f$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση $(g\circ f)(x)=x$, άρα $(g\circ f)'(x_o)=1$, επομένως από την (2) αποκλείεται να ισχύει $f'(x_o)=0$.

Πόρισμα 8.11 *Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και $(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$.*

Παράγωγος συνάρτηση.
Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ορισμός 8.2 *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in(a,b)$. Ορίζεται τότε μια συνάρτηση*
$$f':(a,b)\to\mathbb{R}:x\to f'(x).$$
*Αν η συνάρτηση $g=f'$ είναι και αυτή παραγωγίσιμη στο (a,b), η παράγωγός της $g':(a,b)\to\mathbb{R}$ ονομάζεται **η δεύτερη παράγωγος** της f στο (a,b) και συμβολίζεται f''.*

*Επαγωγικά, αν έχει ορισθεί η n-οστή παράγωγος $f^{(n)}:(a,b)\to\mathbb{R}$ της f και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (a,b), τότε η παράγωγος της $f^{(n)}$ ορίζεται στο (a,b), ονομάζεται **η** $(n+1)$**-τάξης παράγωγος** της f στο (a,b) και συμβολίζεται $f^{(n+1)}$.*

*Μια συνάρτηση που έχει παράγωγο τάξης n λέγεται n φορές παραγωγίσιμη. Μια συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ λέγεται **απεριόριστα παραγωγίσιμη στο** $x_o\in(a,b)$ αν υπάρχει η $f^{(n)}(x_o)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

Παράδειγμα 8.12 *Μια πολυωνυμική συνάρτηση $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και, αν $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ τότε*
$a_0=p(0)$ και $a_k=\dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$ για $k=1,\ldots,n$ (βεβαίως $p^{(k)}=0$ όταν $k>n$).

Πράγματι, για κάθε x έχουμε
$$p(x)=a_0+\sum_{m=1}^{n}a_mx^m \qquad \text{άρα}\;\; p'(x)=a_1+\sum_{m=2}^{n}ma_mx^{m-1}$$
$$\text{και αν}\;\; p^{(k)}(x)=k!a_k+\sum_{m=k+1}^{n}m(m-1)\ldots(m-k+1)a_mx^{m-k}\;\;\text{όπου}\;\;1\le k\le n-1$$
$$\begin{aligned}\text{τότε}\;\; p^{(k+1)}(x)&=0+\sum_{m=k+1}^{n}m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)a_mx^{m-k-1}\\ &=(k+1)!a_{k+1}x^0+\sum_{m=k+2}^{n}m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)a_mx^{m-k-1}.\end{aligned}$$
Δείξαμε λοιπόν επαγωγικά ότι
$p^{(k)}(x)=k!a_k+\sum_{m=k+1}^{n}m(m-1)\ldots(m-k+1)a_mx^{m-k}$ όταν $1\le k\le n-1$
οπότε $p^{(n)}(x)=n!a_n$.

Θέτοντας $x=0$ προκύπτει $p(0)=a_0$ και $p^{(k)}(0)=k!a_k$ οταν $1\le k\le n$.