6 Βασικά Θεωρήματα συνέχειας

Θεώρημα 6.1 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε είναι φραγμένη στο $[a,b]$, δηλ. υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Απόδειξη Ονομάζω

$$B = \{x \in [a,b] : f|_{[a,x]} \text{ φραγμένη } \}$$

δηλαδή ένα $x \in [a,b]$ ανήκει στο B αν υπάρχει $M(x) \in \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $t \in [a,x]$ να ισχύει $|f(t)| \leq M(x)$.

Πρέπει να δείξω ότι $b \in B$.

Παρατηρώ ότι

- το B δεν είναι κενό, αφού $a \in B$ (η f είναι φραγμένη στο διάστημα $[a,a] = \{a\}$)
- το B είναι άνω φραγμένο, π.χ. από το b (αφού $B \subseteq [a,b]$)

Κατά συνέπεια, από την πληρότητα (!) του $\mathbb{R}$, το B έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω c, και βέβαια $a \leq c \leq b$.

Ισχυρισμός $c = b$.

Απόδειξη Αν $c < b$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο c, όπως έχουμε δείξει θα υπάρχει ένα διάστημα $[c-\delta, c+\delta] \subseteq [a,b]$ στο οποίο η f θα είναι φραγμένη, δηλαδή θα υπάρχει M_1 ώστε

$$t \in [c-\delta, c+\delta] \Rightarrow |f(t)| \leq M_1.$$

Επειδή όμως το $c - \delta$ δεν είναι άνω φράγμα του B, υπάρχει $x \in B$ ώστε $x > c - \delta$. Τότε όμως (από τον ορισμό του B) υπάρχει $M(x)$ ώστε

$$t \in [a,x] \Rightarrow |f(t)| \leq M(x).$$

Επομένως, αν θέσω $M = \max\{M(x), M_1\}$, τότε για καθε $t \in [a, c+\delta]$ θα έχω είτε $t \in [a,x]$ οπότε $|f(t)| \leq M(x) \leq M$ είτε $t \in [c-\delta, c+\delta]$ οπότε $|f(t)| \leq M_1 \leq M$.

Συμπέρασμα: Η f είναι φραγμένη στο $[a, c+\delta]$, δηλαδή $c + \delta \in B$, άτοπο (αφού $c = \sup B$). Έτσι αποδείχτηκε ο Ισχυρισμός.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι $b \in B$. Πράγματι, επειδή η f είναι συνεχής στο b, υπάρχει ένα διάστημα $[b-\eta, b] \subseteq [a,b]$ στο οποίο η f είναι φραγμένη, δηλαδή θα υπάρχει M_1 ώστε

$$t \in [b-\eta, b] \Rightarrow |f(t)| \leq M_2.$$

Όπως πριν βλέπουμε ότι υπάρχει $x > b-\eta$ στο B, δηλ. τέτοιο ώστε η $f|_{[a,x]}$ να είναι φραγμένη, οπότε θα είναι φραγμένη και στην ένωση $[a,x]\cup[b-\eta,b] = [a,b]$. $\square$

Η συνέχεια της f δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παράδειγμα:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R} \quad \text{όπου } f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Επίσης το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα, αν το πεδίο ορισμού της f δεν είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα. Παραδείγματα:

$$f:(0,1]\to\mathbb{R} \quad \text{όπου } f(x) = \frac{1}{x}.$$

Η f είναι συνεχής, ορισμένη σε φραγμένο διάστημα, όχι όμως κλειστό. Δεν είναι άνω φραγμένη.

$$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R} \quad \text{όπου } f(x) = x^2.$$

Η f είναι συνεχής, ορισμένη σε διάστημα, όχι όμως φραγμένο. Δεν είναι άνω φραγμένη.

Θεώρημα 6.2 *Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε έχει μέγιστο στο $[a,b]$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $x_o \in [a,b]$ ώστε $f(x_o) \geq f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 6.1, η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει το $M = \sup\{f(t) : t \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$. Αν η f δεν έχει μέγιστο στο $[a,b]$, τότε θα ισχύει $f(x) < M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε όμως η συνάρτηση

$$g:[a,b]\to\mathbb{R} \qquad \text{με } g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$$

ορίζεται (εφόσον $f(x) \neq M$ για κάθε $x \in [a,b]$) και είναι συνεχής στο $[a,b]$, αλλά δεν είναι φραγμένη, γιατί εφόσον $M = \sup f([a,b])$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $t_n \in [a,b]$ ώστε $f(t_n) > M - \frac{1}{n}$, οπότε $g(t_n) > n$. Αυτό αντιβαίνει στο Θεώρημα 6.1. $\square$

Η συνέχεια της f δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$f:[0,1]\to\mathbb{R} \quad \text{όπου } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x < 1 \\ 0 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

δεν λαμβάνει μέγιστη τιμή[1] στο $[0,1]$.

Πόρισμα 6.3 *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $x_o\in[a,b]$ ώστε $f(x_o)\le f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.*

Απόδειξη Εφάρμοσε το Θεώρημα 6.2 στην $-f$.

Θεώρημα 6.4 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.
Αν $f(a)<0<f(b)$, τότε υπάρχει $x_o\in(a,b)$ ώστε $f(x_o)=0$.*

Απόδειξη Αναζητούμε μια ρίζα x_o της f μεταξύ των a και b. Αν η ρίζα αυτή τύχει να βρίσκεται στη μέση, δηλ. αν $f(\frac{a+b}{2})=0$, θέτουμε $x_o=\frac{a+b}{2}$ και έχουμε τελειώσει. Αλλιώς, έχουμε δύο περιπτώσεις: Αν $f(\frac{a+b}{2})>0$, θέτουμε $a_1=a$, $b_1=\frac{a+b}{2}$. Αν $f(\frac{a+b}{2})<0$, θέτουμε $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=b$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση $a\le a_1<b_1\le b$, ότι $f(a_1)<0<f(b_1)$ και ότι το μήκος του $[a_1,b_1]$ είναι το μισό του προηγουμένου.

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο διάστημα $[a_1,b_1]$. Αν $f(\frac{a_1+b_1}{2})=0$, θέτουμε $x_o=\frac{a_1+b_1}{2}=0$ και έχουμε τελειώσει. Αλλιώς, συνεχίζουμε επαγωγικά: Υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει

$$a\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_n<b_n\le\ldots\le b_2\le b_1\le b$$

με $f(a_k)<0<f(b_k)$ για κάθε $k=1,\ldots,n$ και ότι το μήκος του $[a_n,b_n]$ είναι το μισό του προηγουμένου. Επαναλαμβάνουμε τους συλλογισμούς της προηγούμενης παραγράφου στο διάστημα $[a_n,b_n]$: Αν $f(\frac{a_n+b_n}{2})=0$, θέτουμε $x_o=\frac{a_n+b_n}{2}$ και έχουμε τελειώσει. Αλλιώς, έχουμε δύο περιπτώσεις: Αν $f(\frac{a_n+b_n}{2})>0$, θέτουμε $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$. Αν $f(\frac{a_n+b_n}{2})<0$, θέτουμε $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=b_n$. Παρατηρούμε ότι $a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n$, ότι $f(a_{n+1})<0<f(b_{n+1})$ και ότι το μήκος του $[a_{n+1},b_{n+1}]$ είναι το μισό του προηγουμένου.

Σχηματίζουμε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n). Η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Άρα, όπως έχουμε αποδείξει, και οι δύο συγκλίνουν. Αλλά, όπως είπαμε, ισχύει ότι

$$b_1-a_1=\frac{b-a}{2},\ b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2^2},\ \ldots,b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$$

[1] Παρατήρησε ότι η συνάρτηση αυτή είναι φραγμένη στο $[0,1]$, μολονότι είναι ασυνεχής (στο 1).

για κάθε n. Εφόσον λοιπόν $b_n - a_n \to 0$, έχουμε $\lim a_n = \lim b_n$. Αν ονομάσουμε x_o αυτό το κοινό όριο, από τη συνέχεια της f και την αρχή της μεταφοράς θα έχουμε

$$\lim_n f(a_n) = f(x_o) = \lim_n f(b_n).$$

Αλλά $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ για κάθε n, και συνεπώς

$$f(x_o) = \lim_n f(a_n) \le 0 \le \lim_n f(b_n) = f(x_o),$$

άρα $f(x_o) = 0$. $\square$

Δεύτερη απόδειξη Εφόσον η f είναι συνεχής στο a και $f(a) < 0$, όπως έχουμε αποδείξει υπάρχει μια περιοχή του a όπου η f παίρνει μόνο γνησίως αρνητικές τιμές. Υπάρχει λοιπόν κάποιο $x_1 \in (a, b]$ ώστε $f(t) < 0$ για κάθε $t \in [a, x_1]$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο b και $f(b) > 0$, υπάρχει $y \in [a, b)$ ώστε $f(s) > 0$ για κάθε $s \in [y, b]$. Το x_1 δηλαδή ανήκει στο σύνολο

$$A = \{x \in [a, b] : f|_{[a,x]} < 0\} = \{x \in [a, b] : f(t) < 0 \text{ για κάθε } t \in [a, x]\}$$

ενώ το y δεν ανήκει στο σύνολο αυτό. Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο (από το y). Επομένως, από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω $x_o \in [x_1, y] \subseteq (a, b)$. Θα δείξουμε ότι $f(x_o) = 0$, αποκλείοντας τις άλλες δύο περιπτώσεις.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $f(x_o) < 0$, τότε από την συνέχεια της f στο x_o θα υπάρχει μια περιοχή $(x_o - \delta, x_o + \delta) \subseteq [a, b]$ του x_o όπου η f παίρνει μόνον αρνητικές τιμές. Εφόσον $x_o = \sup A$, υπάρχει $x \in A$ με $x_o - \delta < x$. Η f λοιπόν παίρνει αρνητικές μόνον τιμές στο διάστημα $[a, x]$ καθώς και στο διάστημα $(x_o - \delta, x_o + \frac{\delta}{2}]$, άρα παίρνει αρνητικές μόνον τιμές στην ένωσή τους, δηλ. στο διάστημα $[a, x_o + \frac{\delta}{2}]$. Μα τότε $x_o + \frac{\delta}{2} \in A$, πράγμα που αντιβαίνει στο γεγονός ότι το x_o είναι άνω φράγμα του A. Αποκλείσθηκε λοιπόν η περίπτωση $f(x_o) < 0$.

Αν πάλι υποθέσουμε ότι $f(x_o) > 0$, τότε από την συνέχεια της f στο x_o θα υπάρχει μια περιοχή $(x_o - \eta, x_o + \eta) \subseteq [a, b]$ του x_o όπου η f παίρνει μόνο θετικές τιμές. Αλλά αφού $x_o = \sup A$, υπάρχει $u \in A$ με $x_o - \eta < u$. Από τη μιά μεριά έχουμε $u \in A$, άρα $f(u) < 0$, και από την άλλη $u \in (x_o - \eta, x_o + \eta)$, άρα $f(u) > 0$. Η αντίφαση αυτή αποκλείει και την περίπτωση $f(x_o) > 0$. $\square$

Η συνέχεια της f δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παράδειγμα: η συνάρτηση

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R} \quad \text{όπου } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } 0 \le x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{αν } \sqrt{2} \le x \le 2 \end{cases}$$

Δεν μπορεί επίσης να παραλειφθεί η υπόθεση ότι η f ορίζεται σε *κλειστό και φραγμένο διάστημα*. Για παράδειγμα η $f : [-1, 0) \cup (0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής, ικανοποιεί $f(-1) < 0 < f(1)$ αλλά δεν μηδενίζεται πουθενά.

Πόρισμα 6.5 *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(a) < w < f(b)$, υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $f(x) = w$.*

Απόδειξη Εφάρμοσε το Θεώρημα 6.4 στην $g = f - w$. □

Πόρισμα 6.6 *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(a) > w > f(b)$, υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $f(x) = w$.*

Απόδειξη Εφάρμοσε το Θεώρημα 6.4 στην $g = w - f$. □

Ας θυμίσουμε ότι ένα υποσύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται *διάστημα* αν περιέχει κάθε σημείο που είναι μεταξύ δύο σημείων του, δηλαδή αν ικανοποιεί:

$$x, y \in I,\ x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

Θεώρημα 6.7 (Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών) *Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα και η f ορίζεται και είναι συνεχής στο I, τότε η εικόνα $f(I)$ είναι επίσης διάστημα.*

Απόδειξη Πρέπει να δειχθεί ότι αν $c, d \in f(I)$ με $c \neq d$, τότε κάθε y μεταξύ των c και d ανήκει επίσης στο $f(I)$. Υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) = c$ και $f(b) = d$. Υποθέτουμε ότι $a < b$ (αλλιώς θεωρούμε το διάστημα $[b, a]$ αντί του $[a, b]$). Τότε η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$. Αν $c = f(a) < f(b) = d$, τότε για κάθε $y \in (c, d)$, από το Πόρισμα 6.5 βρίσκουμε $x \in [a, b]$ (οπότε $x \in I$ εφόσον το I είναι διάστημα) ώστε $f(x) = y$, άρα $y \in f(I)$. Αν $c = f(a) > f(b) = d$, το Πόρισμα 6.6 οδηγεί στο ίδιο συμπέρασμα. □

Παρατήρηση 6.8 Το Θεώρημα δεν λέει ότι το $f(I)$ είναι κλειστό ή φραγμένο διάστημα.[2] (Παράδειγμα: αν $I = (0, 1]$ και $f : I \to \mathbb{R} : x \to 1/x$, τότε $f(I) = [1, +\infty)$). Επίσης, αν το I έχει άκρα a, b, τα $f(a), f(b)$ δεν είναι πάντα άκρα του $f(I)$. (Παράδειγμα: αν $I = [0, 2\pi]$ και $f : I \to \mathbb{R} : x \to \sin x$, τότε $f(I) = [-1, 1]$).

Πόρισμα 6.9 *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε το $f([a, b])$ είναι κλειστό (και φραγμένο) διάστημα. Μάλιστα $f([a, b]) = [m, M]$, όπου $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ και $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.*

[2] δες όμως το Πόρισμα 6.9

Απόδειξη Από το Θεώρημα 6.2 και το Πόρισμα 6.3, η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, m και M, στο $[a,b]$, οπότε $m, M \in f([a,b])$ και $f([a,b]) \subseteq [m,M]$. Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών, το $f([a,b])$ είναι διάστημα, και αφού περιέχει τα m και M θα είναι αναγκαστικά ίσο με $[m,M]$. $\square$

Εφαρμογές

Πρόταση 6.10 *Κάθε θετικός αριθμός a έχει μια n-οστή ρίζα, υπάρχει δηλαδή $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x^n = a$. Μάλιστα αν ο n είναι περιττός, κάθε πραγματικός αριθμός a έχει μια n-οστή ρίζα.*

Απόδειξη (ι) Έστω $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : f(x) = x^n$. Έστω $a > 0$. Πρέπει να δειχθεί ότι υπάρχει $x > 0$ ώστε $f(x) = a$. Εφόσον η f είναι συνεχής και το $\mathbb{R}_+$ είναι διάστημα, από το Θεώρημα 6.7 το $f(\mathbb{R}_+)$ θα είναι διάστημα, και βεβαίως περιέχει το 0. Για να δείξουμε λοιπόν ότι περιέχει το a, αρκεί να δείξουμε ότι περιέχει κάποιο $c > a$. Υπάρχει όμως $b > 0$ ώστε $f(b) > a$ (πράγματι αν $a > 1$ πάρε π.χ. $b = a$ και αν $a < 1$ πάρε π.χ. $b = 1$).

(ιι) Αν ο n είναι περιττός και $a < 0$, από το (ι) υπάρχει x ώστε $x^n = -a$. Αλλά τότε $(-x)^n = -x^n = a$.

Πρόταση 6.11 *Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει $x_o \in [0,1]$ ώστε $f(x_o) = x_o$.*

Απόδειξη Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Εφόσον $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$, έχουμε $g(0) \geq 0$ και $g(1) \leq 0$. Αν $g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$, τελειώσαμε. Αν όχι, οπότε $g(1) < 0 < g(0)$, από το Θεώρημα 6.4 υπάρχει $x_o \in (0,1)$ ώστε $g(x_o) = 0$. $\square$

Θεώρημα 6.12 *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής* και 1-1. *Τότε*

1. *Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.*
2. *Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.*

Η γνήσια μονοτονία της f είναι εύκολη συνέπεια των δύο λημμάτων που ακολουθούν:

Λήμμα 6.13 *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής* και 1-1. *Αν $a, b, c \in I$ με $a < b < c$, τότε ή $f(a) < f(b) < f(c)$ ή $f(a) > f(b) > f(c)$.*

Απόδειξη Εφόσον $f(a) \neq f(b)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$ (αλλιώς, θεωρούμε την $-f$). Θα δείξουμε ότι $f(a) < f(b) < f(c)$. Από το Θεώρημα 6.7, το σύνολο $f([a,b])$ είναι διάστημα και αφού περιέχει τα a και b, θα περιέχει και όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Αν λοιπόν $f(a) < f(c) < f(b)$, τότε θα υπάρχει $x \in [a,b]$ ώστε $f(x) = f(c)$. Αυτό όμως αποκλείεται αφού η f είναι 1-1, ενώ $x \neq c$.

Αν πάλι $f(c) < f(a) < f(b)$ τότε από το Θεώρημα 6.7 θα υπάρχει $y \in [b,c]$ με $f(y) = f(a)$, πράγμα που επίσης αποκλείεται.

Λήμμα 6.14 *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής* και 1-1. *Αν $a, b, c, d \in I$ με $a < b < c < d$, τότε ή $f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$ ή $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.*

Απόδειξη Εφάρμοσε το προηγούμενο Λήμμα στις τριάδες (a,b,c) και (b,c,d). Από την πρώτη τριάδα, θα έχουμε $f(a) < f(b) < f(c)$ ή $f(a) > f(b) > f(c)$. Αν $f(a) < f(b) < f(c)$, τότε $f(b) < f(c)$ άρα από την δεύτερη τριάδα βρίσκουμε $f(b) < f(c) < f(d)$. Αν πάλι $f(a) > f(b) > f(c)$, τότε $f(b) > f(c)$ άρα $f(b) > f(c) > f(d)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.12 (ι) Μονοτονία

Σταθεροποιούμε δύο σημεία $a < b$ στο I. Εφόσον $f(a) \neq f(b)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$ (αλλιώς, θεωρούμε την $-f$).

Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή ότι η ίδια διάταξη διατηρείται σε όλα τα ζεύγη (x,y) σημείων του I με $x < y$:

$$\text{Δείχνουμε ότι} \quad x, y \in I,\, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Πρώτη Απόδειξη Αν $x = a$ και $y = b$ δεν έχω τίποτε να αποδείξω. Αλλιώς, όποια θέση διάταξης κι αν έχουν τα x, y στο σύνολο $\{a, b, x, y\}$, η ίδια θέση θα διατηρείται στις εικόνες $\{f(a), f(b), f(x), f(y)\}$ (από το Λήμμα 6.14, ή το Λήμμα 6.13, αν κάποιο από τα x, y ανήκει στο $\{a, b\}$). Για παράδειγμα αν $x < a < y < b$ τότε $f(x) < f(a) < f(y) < f(b)$ άρα $f(x) < f(y)$. Αν $a < x = b < y$ τότε $f(a) < f(x) = f(b) < f(y)$ άρα πάλι $f(x) < f(y)$, και ούτω καθεξής.

Δεύτερη Απόδειξη (χωρίς χρήση των 6.13 ή 6.14) Θέτω

$$x(t) = (1-t)a + tx \;\text{ και }\; y(t) = (1-t)b + ty, \quad t \in [0,1].$$

Παρατηρώ ότι $x(t), y(t) \in I$ για κάθε $t \in [0,1]$ (γιατί;) και ότι, αφού $x < y$ και $a < b$,

$$x(t) = (1-t)a + tx < (1-t)b + ty = y(t) \ \ (t \in [0,1]).$$

Κατά συνέπεια αν θέσω $h(t) = f(x(t)) - f(y(t))$, τότε $h(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ γιατί η f είναι 1-1. Η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $h(0) = f(a) - f(b) < 0$. Έχουμε $h(t) < 0$ για κάθε $t \in [0,1]$, γιατί αν υπήρχε $t \in [0,1]$ με $h(t) > 0$, τότε από το Θεώρημα 6.4 θα υπήρχε $t_0 \in (0,t)$ ώστε $h(t_0) = 0$. Άρα ειδικότερα $h(1) < 0$. Μα αυτό σημαίνει ότι $f(x) - f(y) < 0$, και αυτό θέλαμε να δείξουμε.

(ιι) Συνέχεια της f^{-1}. Έχουμε δείξει τώρα ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Υποθέτουμε ότι είναι αύξουσα (αλλιώς θεωρούμε την $-f$). Θέτουμε $J \equiv f(I)$. Έστω $y_o \in J$ και $x_o = f^{-1}(y_o)$. Αν δοθεί $\varepsilon > 0$ πρέπει να βρεθεί $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $(y_o - \delta, y_o + \delta) \cap J$ να απεικονίζεται από την f^{-1} μέσα στο $(x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το x_o δεν είναι άκρο του I. Υπάρχει τότε $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ ώστε $(x_o - \varepsilon', x_o + \varepsilon') \subset I$. Αν $a = f(x_o - \varepsilon')$ και $b = f(x_o + \varepsilon')$ τότε $a, b \in J$ και $a < y_o < b$ (εφόσον $x_o - \varepsilon' < x_o < x_o + \varepsilon'$ και η f είναι γνησίως αύξουσα). Αφού $y_o \in (a,b)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(y_o - \delta, y_o + \delta) \subseteq (a,b)$ (π.χ. $\delta = \min\{y_o - a, b - y_o\}$). Τότε για κάθε $y \in (y_o - \delta, y_o + \delta) \cap J$ έχουμε

$$a = f(x_o - \varepsilon') < y < f(x_o + \varepsilon') = b$$

και άρα, εφόσον η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα[3]

$$x_o - \varepsilon' < f^{-1}(y) < x_o + \varepsilon'$$

δηλαδή $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)| = |f^{-1}(y) - x_o| < \varepsilon' \leq \varepsilon$.

Αν πάλι το x_o είναι το κάτω άκρο του I (οπότε το y_o είναι το κάτω άκρο του J), τότε υπάρχει $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ ώστε $[x_o, x_o + \varepsilon') \subset I$ οπότε θέτοντας $\delta = f(x_o + \varepsilon') - y_o$ έχουμε για κάθε $y \in (y_o - \delta, y_o + \delta) \cap J$ ότι

$$y_o \leq y < y_o + \delta = f(x_o + \varepsilon')$$

άρα

$$x_o - \varepsilon' < x_o \leq f^{-1}(y) < x_o + \varepsilon'$$

και άρα $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)| = |f^{-1}(y) - x_o| < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Όμοια αντιμετωπίζεται και η περίπτωση που το x_o είναι το άνω άκρο του I.

[3] αν $u < v$ τότε $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$, γιατί αν $f^{-1}(u) \geq f^{-1}(v)$ θα είχαμε $u \geq v$

Παρατηρήσεις 6.15 (ι) Η υπόθεση ότι η f ορίζεται σε διάστημα δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f : [0,1) \cup [2,3] \to [0,2] \text{ με } \ f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

είναι συνεχής, 1-1 και επί, όμως η αντίστροφή της

$$f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R} \text{ με } \ f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq x < 1 \\ y+1, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

είναι ασυνεχής στο σημείο $y = 1$.

(ιι) Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη της συνέχειας της f^{-1} δεν χρησιμοποιήθηκε η συνέχεια της f, αλλά μόνον η γνήσια μονοτονία της και το γεγονός ότι ορίζεται σε διάστημα. Δείξαμε λοιπόν ότι, *αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα, η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.*