1 Αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Υποσύνολα του $\mathbb{R}$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: οι φυσικοί αριθμοί, $\mathbb{N}_* = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ οι ακέραιοι αριθμοί.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_*\}$: οι ρητοί αριθμοί.

Οι ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης:[1]

(Π1) $\exists 0 : a + 0 = a \, \forall a \in \mathbb{R}$	(Π5) $\exists 1 \neq 0 : a.1 = a \, \forall a \in \mathbb{R}$
(Π2) $\forall a \, \exists (-a) : a + (-a) = 0$	(Π6) $\forall a \neq 0 \, \exists a^{-1} : a.a^{-1} = 1$
(Π3) $\forall a, b, c : a + (b + c) = (a + b) + c$	(Π7) $\forall a, b, c : a.(b.c) = (a.b).c$
(Π4) $\forall a, b : a + b = b + a$	(Π8) $\forall a, b : a.b = b.a$

(Π9) $\forall a, b, c : a.(b + c) = a.b + a.c$

(Π10) $\forall a, b, c : (a > b)$ και $(b > c) \Rightarrow a > c$
(Π11) $\forall a, b :$ ή $a = b$ ή $a > b$ ή $a < b$

(Π12) $\forall a, b, c : a > b \Rightarrow a + c > b + c$
(Π13) $\forall a, b, c : (a > b)$ και $(c > 0) \Rightarrow a.c > b.c$

Η σχέση $a \leq b$ σημαίνει: ή $a < b$ ή $a = b$: είναι η *άρνηση* της $a > b$.

Άσκηση 1.1 Έστω $a \in \mathbb{Z}$.

Ο a είναι άρτιος $\iff$ ο a^2 είναι άρτιος.

Άσκηση 1.2 Δεν υπάρχει *ρητός*[2] αριθμός q ώστε $q^2 = 2$.

[1] Υπενθυμίζουμε τους συμβολισμούς: $\forall$: για κάθε, $\exists$: υπάρχει

[2] Θα δούμε αργότερα ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός x ώστε $x^2 = 2$. Προς το παρόν παρατηρούμε ότι η ύπαρξη τέτοιου x δεν μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μόνον τις ιδιότητες Π1 - Π13.

Παρατηρήσεις 1.3 (i) Πρόσθεση ανισοτήτων κατά μέλη:

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} : \text{αν } a > b \text{ και } c > d \text{ τότε } \ a+c > b+d$$

(για την απόδειξη, χρησιμοποίησε την (Π12) και την (Π10)). Βεβαίως δεν μπορούμε γενικά να αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη: π.χ. $3 > 2$ και $5 > 1$ αλλά $3 - 5 \not> 2 - 1$.

(ii) Δεν μπορούμε εν γένει να πολλαπλασιάζουμε ανισότητες κατά μέλη: π.χ. $3 > -2$ και $-1 > -2$ αλλά $3(-1) \not> (-2)(-2)$. Όμως

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} : \text{αν } a > b > 0 \text{ και } c > d > 0 \text{ τότε } \ ac > bd.$$

Πράγματι, από την $a > b$ αφού $c > 0$ λόγω της (Π13) έχουμε $ac > bc$ και από την $c > d$ αφού $b > 0$ έχουμε $bc > bd$ για τον ίδιο λόγο. Συνεπώς $ac > bc$ και $bc > bd$ άρα $ac > bd$ από την (Π10).

(iii) Έστω $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ομόσημοι.

$$\text{Αν } a > b \text{ τότε } \ \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

Πράγματι, επειδή $ab > 0$ έχουμε και $\frac{1}{ab} > 0$ (γιατί;) και συνεπώς από την $a > b$ λόγω της (Π13) έχουμε $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$ δηλαδή $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα αν οι a και b είναι ετερόσημοι. Π.χ. $3 > -2$ αλλά $\frac{1}{3} \not< \frac{1}{-2}$.

Ασκήσεις 1.4 (**i**) Έστω $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ με $b > 0, y > 0$. Αν $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ τότε (α) $ay < bx$ και (β) $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$.

(**ii**) Έστω $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ με $a^2 > 2$. Θέτουμε $b = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$. Τότε $b < a$ και $b^2 > 2$.

Λύση της (**ii**) Από τη σχέση $a^2 > 2$, αφού $a > 0$ προκύπτει (πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{2a}$) ότι $\frac{a}{2} > \frac{1}{a}$ και συνεπώς

$$b = \frac{a}{2} + \frac{1}{a} < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} b^2 - 2 &= \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{a^2}{4} + 1 + \frac{1}{a^2} - 2 = \frac{a^2}{4} - 1 + \frac{1}{a^2} \\ &= \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{a}\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

(διότι αν $\frac{a}{2} - \frac{1}{a} = 0$ θα είχαμε $a^2 = 2$).

(iii) Το σύνολο
$$X = \{x > 0 : x^2 > 2\}$$
δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Λύση της (iii) Αν δοθεί ένα οποιοδήποτε $a \in X$ μπορούμε να βρούμε (γνησίως) μικρότερο στοιχείο του X, π.χ. το $b = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$, όπως έπεται από την (ii). Συνεπώς το X δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(iv) Το σύνολο
$$Y = \{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 \geq 2\}$$
δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(v) Αν $a, b \in \mathbb{R}$ τότε $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Πότε ισχύει ισότητα;

(vi) Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $ab > 0$ τότε $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

(vii) Αν $c > 0$ και $n = 1, 2, \ldots$ τότε $c^{2n} + c^{2n-1} + \ldots + c^2 + c + 1 \geq (2n+1)c^n$.

Λύση της (vii) Θέτοντας $b = 1$ στην (vi) έχουμε $a + \frac{1}{a} \geq 2$ για κάθε $a > 0$, οπότε θέτοντας διαδοχικά $a = c$, μετά $a = c^2, \ldots, a = c^n$ έχουμε
$$c + \frac{1}{c} \geq 2,\ c^2 + \frac{1}{c^2} \geq 2, \ldots, c^n + \frac{1}{c^n} \geq 2\,.$$
Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει
$$c^n + c^{n-1} + \ldots + c + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \ldots + \frac{1}{c^n} \geq 2n$$
άρα
$$c^n + c^{n-1} + \ldots + c + 1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \ldots + \frac{1}{c^n} \geq 2n + 1$$
και πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με τον θετικό αριθμό c^n προκύπτει η ζητούμενη.

Άσκηση 1.5 **(i)** Δεν υπάρχει ελάχιστος θετικός αριθμός: Αν $0 \leq a$ και, για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $a < \varepsilon$, τότε $a = 0$.

(ii) Αν $a \leq b + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$ τότε $a \leq b$.

(iii) Αν $a < b + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι αλήθεια ότι $a < b$; ότι $a \leq b$;

Λύση (**i**) Αν $a > 0$ δεν μπορεί να ισχύει η σχέση $a \le \varepsilon$ για *όλα* τα θετικά $\varepsilon > 0$: παραδείγματος χάριν για $\varepsilon = \frac{a}{2}$ δεν ισχύει.

(**ii**) Αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, αν δηλαδή $a > b$, τότε η σχέση $a \le b + \varepsilon$ δεν μπορεί να αληθεύει για κάθε $\varepsilon > 0$: π.χ. για $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ δεν ισχύει[3].

(**iii**) Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι αρνητική: μπορεί να έχουμε $a = b$. Στο δεύτερο ερώτημα η απάντηση είναι θετική από την προηγούμενη άσκηση.

Ορισμός 1.1 *Αν $a \in \mathbb{R}$, θέτουμε*

$$|a| = \begin{cases} a & \textit{αν} \quad a \ge 0 \\ \\ -a & \textit{αν} \quad a < 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση 1.6 *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $b \ge 0$*

$$\begin{aligned} |a| \le b &\iff -b \le a \le b \quad \textit{δηλ.} \ -b \le a \ \boldsymbol{\textit{και}} \ a \le b \\ |a| \ge b &\iff a \le -b \ \ \boldsymbol{\textit{ή}} \ \ b \le a \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.7 *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} |a+b| &\le |a| + |b| \qquad \textit{(τριγωνική ανισότητα)} \\ \big|\,|a| - |b|\,\big| &\le |a - b| \\ \big|\,|a| - |b|\,\big| &\le |a + b| \end{aligned}$$

Απόδειξη (ι) Οι $-|a| \le a \le |a|$ και $-|b| \le b \le |b|$ δίνουν $-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b|$ άρα $-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$ άρα $|a + b| \le |a| + |b|$ (από την προηγούμενη Παρατήρηση).

(ιι) Έστω $c = |a| - |b|$. Επειδή $a = (a - b) + b$ από την τριγωνική ανισότητα έχω

$$|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|,$$

άρα $c = |a| - |b| \le |a - b|$. Ομοίως $b = (b - a) + a$ άρα $|b| \le |b - a| + |a|$, οπότε

$$-c = -(|a| - |b|) = |b| - |a| \le |b - a| = |a - b|.$$

Δείξαμε ότι $c \le |a - b|$ και $-c \le |a - b|$, άρα $|c| \le |a - b|$.

(ιιι) Στην (ιι) βάλε $-b$ στη θέση του b.

[3] γιατί $a - (b + \varepsilon) = \frac{a-b}{2} > 0$ δηλαδή $a > b + \varepsilon$.

Άσκηση 1.8

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Λύση Η πρώτη ανισότητα προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned}
|a+b| &\leq |a|+|b| \\
&\Downarrow \qquad (\text{προσθέτω} \ \ |a+b|(|a|+|b|)) \\
|a+b|+|a+b|(|a|+|b|) &\leq (|a|+|b|)+(|a|+|b|)|a+b| \\
&\Downarrow \\
|a+b|(1+|a|+|b|) &\leq (|a|+|b|)(1+|a+b|) \\
&\Downarrow \\
\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}.
\end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ανισότητα, θέτοντας $x = |a|$ και $y = |b|$, έχω

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{1+x+y} &= \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \\
&\leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}
\end{aligned}$$

αφού $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

Υπενθύμιση:

Θεώρημα 1.9 (Μαθηματική επαγωγή) *Έστω ότι σε κάθε φυσικό αριθμό n αντιστοιχεί μία πρόταση $P(n)$ που αφορά τον n.*
Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι εξής δύο προϋποθέσεις:

(i) Η $P(0)$ αληθεύει,

ΚΑΙ

(ii) για κάθε φυσικό αριθμό m, ***αν*** *η $P(m)$ αληθεύει*
τότε *η $P(m+1)$ αληθεύει.*

Τότε η $P(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

Παράδειγμα Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Απόδειξη Έστω $P(n)$ η πρόταση

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι η $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Η πρόταση $P(0)$ είναι η $0 = 0$: αληθής.

Ισχυρισμός: Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει η *συνεπαγωγή* $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Πράγματι:

$$\textbf{αν} \;\; 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \textbf{τότε}$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

που είναι η $P(k+1)$.

Μία άλλη μορφή της μαθηματικής επαγωγής είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1.10 (Δεύτερη μορφή της επαγωγής) *Έστω ότι σε κάθε φυσικό αριθμό n αντιστοιχεί μία πρόταση $P(n)$, που αφορά τον n.*
Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι εξής δύο προϋποθέσεις:

(i) Η $P(0)$ αληθεύει,

ΚΑΙ

(ii) για κάθε φυσικό αριθμό m,
***αν** αληθεύουν οι $P(0), P(1), \ldots, P(m)$, **τότε** η $P(m+1)$ αληθεύει.*

Τότε η $P(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

Παράδειγμα Κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 1$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.[4]

[4] Θυμίζουμε ότι *πρώτος* λέγεται ένας $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ αν διαιρείται μόνον από τον εαυτό του και το 1.

Απόδειξη Η Πρόταση «Ο $n+1$ είναι γινόμενο πρώτων» είναι αληθής για $n=0$: ο αριθμός 1 είναι πρώτος.

Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.10, πρέπει να δείξουμε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, ότι **αν** οι αριθμοί $1, 2, \ldots, m$ γράφονται ως γινόμενα πρώτων παραγόντων, **τότε** ο αριθμός $m+1$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Και πράγματι: Αν μεν ο $m+1$ είναι πρώτος, τότε βεβαίως είναι γινόμενο πρώτων παραγόντων. Αν δεν είναι πρώτος, τότε έχει διαιρέτες, οπότε γράφεται $m+1 = k \cdot l$ όπου οι φυσικοί k, l είναι και οι δύο μικρότεροι από τον $m+1$, επομένως ανήκουν στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$. Από την επαγωγική υπόθεση, οι k και l γράφονται ως γινόμενα πρώτων παραγόντων, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για το γινόμενό τους, τον $m+1$.

Συχνά συναντάμε προτάσεις που αληθεύουν για κάθε φυσικό αριθμό μεγαλύτερο από κάποιον $n_o \in \mathbb{N}$, όχι όμως ενδεχομένως για τους προηγούμενους. Μπορεί κανείς τότε να χρησιμοποιήσει το εξής εύκολο Πόρισμα του Θεωρήματος 1.9:

Πόρισμα 1.11 *Έστω ότι σε κάθε φυσικό αριθμό n αντιστοιχεί μία πρόταση $P(n)$ και έστω $n_o \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι εξής δύο προϋποθέσεις:*

(ι) Η $P(n_o)$ ισχύει.

και

(ιι) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_o$, αν η $P(n)$ ισχύει, τότε ισχύει η $P(n+1)$.

Τότε η $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_o$.

Παράδειγμα 1.12 *Η ανισότητα $2^n \geq n^2$ ισχύει για κάθε $n \geq 4$, όχι όμως για $n = 3$.*

Απόδειξη Εδώ $P(n)$ είναι η πρόταση $2^n \geq n^2$. Η $P(3)$ δεν αληθεύει, αφού $2^3 < 3^2$.

Η $P(4): \; 2^4 \geq 4^2$ είναι αληθής.

Μένει να αποδείξουμε για κάθε $n \geq 4$ την συνεπαγωγή $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, δηλαδή

$$2^n \geq n^2 \;\Rightarrow\; 2^{n+1} \geq (n+1)^2.$$

Πράγματι, αν $2^n \geq n^2$ τότε

$$\begin{aligned}2^{n+1}-(n+1)^2 &= 2.2^n-(n^2+2n+1) \geq 2.n^2-(n^2+2n+1)\\ &= n^2-2n-1=(n-1)^2-2\geq 0\end{aligned}$$

εφόσον $n \geq 4$.

Το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$\begin{array}{ccc}
(a+b)^0 &=& 1\\
a+b &=& a+b\\
(a+b)^2 &=& a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &=& a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &=& a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &=& a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
(a+b)^6 &=& a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{array}$$

Οι συντελεστές σχηματίζουν το λεγόμενο 'τρίγωνο του Pascal':

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

Κάθε συντελεστής είναι το άθροισμα των δύο συντελεστών που βρίσκονται ακριβώς από πάνω του. Αυτή η παρατήρηση είναι η ιδέα για την επαγωγική απόδειξη που ακολουθεί.

Θα χρειασθούν οι

Συμβολισμοί $0! = 1,\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$(\text{δηλ. } n! = n(n-1)!)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad (k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ μπορεί επίσης να γραφτεί

$$\sum_{m=0}^{n} a_m = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}.$$

Η ισότητα των δύο αυτών παραστάσεων μπορεί να προκύψει και με την «αλλαγή μεταβλητής» $j = m + 1$.

Πρόταση 1.13 (Διωνυμικό ανάπτυγμα) *Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, τότε*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad (: P(n)).$$

Σημείωση: Για $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}(a+b)^n = & a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots \\ & + \frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Η **απόδειξη** γίνεται με επαγωγή:

Για $n = 1$ η $P(1)$ είναι η $a + b = a + b$ που προφανώς αληθεύει.

Θα δείξουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, την συνεπαγωγή $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

Αν

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

τότε

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{n-m}b^{m+1} \\
&= \underset{(k=0)}{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n}{m}a^{n-m}b^{m+1} + \underset{(m=n)}{b^{n+1}} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \underset{(k=m+1)}{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Αλλά

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!k}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}
$$

άρα

$$
(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k. \quad \square
$$

Πρόταση 1.14 (Ανισότητα Bernoulli) *Αν* $x > -1$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη Η ανισότητα για $n = 0$ είναι προφανής: $1 = 1$.

Δείχνουμε το επαγωγικό βήμα:

Αν $(1+x)^n \geq 1+nx$ τότε $(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$ (εφόσον $1+x > 0$) άρα

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x. \quad \square\end{aligned}$$

Παρατήρηση Για $x \geq 0$ η ανισότητα Bernoulli είναι άμεση συνέπεια του διωνυμικού αναπτύγματος, αφού όλοι οι προσθετέοι του είναι μη αρνητικοί.

Πρόταση 1.15 *Αν* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *και οι* $b_1, \ldots b_n$ *είναι θετικοί αριθμοί με γινόμενο* $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$, *τότε* $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq n$.

Απόδειξη Με επαγωγή στο πλήθος n των αριθμών που εμφανίζονται. Για $n = 1$ η ανισότητα είναι τετριμένη: $1 \geq 1$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι για κάθε m-αδα θετικών αριθμών $d_1, \ldots d_m$ με γινόμενο $d_1 d_2 \ldots d_m = 1$ ισχύει η ανισότητα

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m \geq m$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι αν δοθούν $m+1$ θετικοί αριθμοί $b_1, \ldots b_{m+1}$ με γινόμενο $b_1 b_2 \ldots b_{m+1} = 1$ τότε θα ισχύει η

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{m+1} \geq m + 1\,.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $b_1 = b_2 = \ldots = b_{m+1}$, η ανισότητα ισχύει προφανώς. Αν όχι, διατάσσοντας τους αριθμούς $b_1, \ldots, b_{m+1}$ κατά αύξουσα σειρά μεγέθους (πράγμα που δεν αλλάζει το άθροισμά τους), παρατηρούμε ότι αναγκαστικά $b_1 < 1 < b_{m+1}$ (αλλιώς το γινόμενο όλων τους δεν θα ήταν 1).

Αν θεωρήσω την m-αδα θετικών αριθμών

$$b_1 \cdot b_{m+1}\,, b_2, \ldots, b_m$$

που έχουν γινόμενο 1, από την επαγωγική υπόθεση θα έχω

$$b_1 \cdot b_{m+1} + b_2 + \ldots + b_m \geq m \,. \tag{1}$$

Όμως από τις σχέσεις $b_1 < 1 < b_{m+1}$ έπεται ότι $(b_{m+1} - 1)(1 - b_1) > 0$ δηλαδή $b_1 + b_{m+1} > b_{m+1} \cdot b_1 + 1$ και συνεπώς

$$b_1 + b_{m+1} + b_2 + \ldots + b_m > b_1 \cdot b_{m+1} + 1 + b_2 + \ldots + b_m \overset{(1)}{\geq} m + 1 \,.$$

Ο **γεωμετρικός μέσος** μιας n-άδας $a_1, \ldots, a_n$ θετικών αριθμών είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός γ που ικανοποιεί $\gamma^n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται $\gamma = \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}$. Την ύπαρξη και μοναδικότητά του θα αποδείξουμε σε επόμενο Κεφάλαιο.

Πρόταση 1.16 (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου) *Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ και οι $a_1, \ldots, a_n$ είναι θετικοί αριθμοί, τότε*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n} \,. \tag{2}$$

Απόδειξη Αν θέσω

$$b_k = \frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$, παρατηρώ ότι οι b_k είναι θετικοί αριθμοί με γινόμενο

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}} \cdots \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n})^n} = 1.$$

Άρα από την προηγούμενη Πρόταση θα έχουμε

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq n \,, \tag{3}$$

ισοδύναμα

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}} \geq n$$

που είναι ισοδύναμη με την αποδεικτέα. □

Παρατήρηση 1.17 Όπως ήδη παρατηρήσαμε, αν οι αριθμοί $a_1, \ldots a_n$ είναι όλοι ίσοι, τότε η ανισότητα (2) είναι στην πραγματικότητα ισότητα. Αν δεν είναι όλοι ίσοι, τότε όπως προκύπτει από την απόδειξη, η ανισότητα είναι γνήσια (διότι $b_1 + b_{m+1} > b_{m+1}.b_1 + 1$). Συνεπώς:

Στην ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.