

Απειροστικός Λογισμός Ι (2009–10)

Παράγωγος – Ασκήσεις

Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) , τότε η f είναι συνεχής στο (a, b) .
2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(1/n) = 0$.
3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.
4. Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$.
5. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ και $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.
6. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in (a, b)$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x_0) = \ell$.
7. Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.
8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Ασκήσεις – Ομάδα Α'

1. Υπολογίστε τις παραγώγους (στα σημεία που υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}, \quad h(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

2. Υπολογίστε τις παραγώγους (στα σημεία που υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \sin((x+1)^2(x+2)), \quad g(x) = \frac{\sin(x^2)\sin^2 x}{1+\sin x}, \quad h(x) = \sin\left(\frac{\cos x}{x}\right).$$

3. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο 0.

- (α) $f(x) = x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{Q}$.
- (β) $g(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $g(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$.
- (γ) $h(x) = \sin x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $h(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$.

4. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} . Αν είναι, εξετάστε αν η παράγωγός τους είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

- (α) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $f(0) = 0$.
- (β) $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $g(0) = 0$.
- (γ) $h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $h(0) = 0$.

5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν η $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

6. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & , \quad x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \text{MK}\Delta(p, q) = 1 \end{cases}$$

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 3$ και $f'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε την $(f^{-1})'(3)$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Υπολογίστε την $(f^{-1})'(y)$ στα σημεία $f(0)$, $f(1)$ και $f(-1)$.

9. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $a < x_0 < b$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^\rho$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 .

(β) Αν $\rho > 1$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Ποιά είναι η τιμή της $f'(x_0)$;

(γ) Δώστε παράδειγμα όπου $\rho = 1$ αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

10. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία:

(α) είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

(β) είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$.

11. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$.

(β) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) < 0$.

(γ) $f(0) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$.

(δ) $f(m) = 0$ και $f'(m) = (-1)^m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0 . Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

13. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα που υποδεικνύεται.

(α) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ στο $[-2, 2]$.

(β) $f(x) = x^5 + x + 1$ στο $[-1, 1]$.

(γ) $f(x) = x^3 - 3x$ στο $[-1, 2]$.

14. Δείξτε ότι η εξίσωση:

(α) $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

(β) $6x^4 - 7x + 1 = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

(γ) $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

15. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^n + ax + b = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες αν ο n είναι άρτιος και το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες αν ο n είναι περιττός.

16. Έστω $a_1 < \dots < a_n$ στο \mathbb{R} και έστω $f(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ λύσεις.

17. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f(x) = x + \frac{3}{x^2}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

θεωρώντας σαν πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο μπορούν να οριστούν.

18. (α) Δείξτε ότι: από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή διαγώνιο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

(β) Δείξτε ότι: από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

19. Βρείτε τα σημεία της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ που έχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(0, 1)$.

20. Πάνω σε κύκλο ακτίνας 1 θεωρούμε δύο αντιδιαμετρικά σημεία A, B . Βρείτε τα σημεία Γ του κύκλου για τα οποία το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει τη μέγιστη δυνατή περίμετρο.

21. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$.

22. Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - a|}$$

είναι ίση με $\frac{2+a}{1+a}$.

23. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ και ότι $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x στο (a, b) για το οποίο οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

24. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x) = 0$ βρίσκεται μια ρίζα της $g(x) = 0$, και αντίστροφα.

25. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) , με $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

26. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

27. Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + \sqrt{x}) - f(x)] = 0$.

28. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[0, a]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x) > 0, g'(x) > 0$ στο $(0, a)$.

(α) Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0, a)$, δείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.

(β) Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$, δείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.

Ασκήσεις: εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση – τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Ομάδα Α'

29. (α) Αν $0 < a < 1$ ή $a > 1$, δείξτε ότι

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $a > 0$,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Επίσης, η a^x είναι κυρτή στο \mathbb{R} και η $\log_a x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

30. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq 1 + x$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1.$$

31. Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\ln x \leq n (\sqrt[n]{x} - 1) \leq \sqrt[n]{x} \ln x.$$

Συμπεράνατε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x$ για $x > 0$.

32. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

33. Μελετήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

στο $(0, +\infty)$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Ποιός είναι μεγαλύτερος, ο e^π ή ο π^e ;

34. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις \ln και \exp ικανοποιούν τα εξής: (α) για κάθε $s > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty$$

και (β)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0.$$

Δηλαδή, η \exp αυξάνει στο $+\infty$ ταχύτερα από οποιαδήποτε (μεγάλη) δύναμη του x , ενώ η \ln αυξάνει στο $+\infty$ βραδύτερα από οποιαδήποτε (μικρή) δύναμη του x .

35. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x) = cf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c μια σταθερά. Δείξτε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

36. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b) , ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $g_\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα (a, b) .

37. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) > f(\xi)$. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $e^{-x} f(x)$.]

38. Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

39. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

40. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

(α) Δείξτε ότι: για κάθε $x \geq 0$, $f'''(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$ και, για κάθε $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

41. (α) Δείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$.

(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k , $k \in \mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

Ασκήσεις - Ομάδα Β'

42. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k|$.

43. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις, όλες στο διάστημα $(-1, 1)$.

44. Να βρεθούν όλοι οι $a > 1$ για τους οποίους η ανισότητα $x^a \leq a^x$ ισχύει για κάθε $x > 1$.

45. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή και ίση με 0 στο $[0, 1]$.

46. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

47. Έστω $\alpha > 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha e^x = 1 + x + x^2/2$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

48. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

49. Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ και $f'(x) \geq a$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

50. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f' είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 \in (a, b)$, δείξτε ότι η ασυνέχεια της f' στο x_0 είναι ουσιώδης (δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$).

51. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ τότε είναι ίσο με $+\infty$.

52. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ τότε είναι ίσο με 0.